

M. SARIAN E. CARAGHEORGHE D. D. BOIANGIU D. VOICULESCU
A. CODOBAN E. DECIU N. ENESCU
L. GHERMANESCU-IONESCU E. HAŞEGANU-ZAMFIRESCU ŞT. STAICU

PROBLEME de MECANICĂ

EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ, BUCUREŞTI — 1983

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMINTULUI

M. SARIAN E. CARAGHEORGHE D. D. BOIANGIU D. VOICULESCU
A. CODOBAN E. DECIU N. ENESCU
L. GHERMĂNESCU-IONESCU E. HAȘEGANU-ZAMFIRESCU ȘT. STAICU

PROBLEME de MECANICĂ

Ediția a II-a



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI 1983

Lucrarea a fost analizată și aprobată de colectivul Catedrei de mecanică, de Consiliul profesoral al Facultății de mecanică agricolă și de Senatul Institutului politehnic din București.

Contribuția autorilor la prezenta lucrare este următoarea:

prof. ing. MIHAIL SARIAN și prof. ing. EMIL CARAGHEORGHE — elaborarea capitolului 1 și a subcapitolelor 2.A, 3.A, 4.A, 5.A, 6.A, 7.A, 8.A, 9.A, 10.A, 11.A, 12.A, 14.A, 15.A, 16.A, 17.A, 19.A;

prof. dr. ing. DUMITRU D. BOIANGIU — elaborarea capitolului 21, 23, 26, a subcapitolelor 6.B, 9.B, 12.B, 14.B, 16.B și participare la subcapitolul 10.B;

prof. dr. ing. DUMITRU VOICULESCU — elaborarea capitolului 13 și 18.

șef lucr. dr. ing. ALEXANDRU CODOBAN — elaborarea capitolului 25 și participare la capitolul 26 și subcapitolul 3.B;

conf. dr. ing. EUGEN DECIU — elaborarea capitolului 24 și a subcapitolului 2.B și participare la capitolul 26 și subcapitolul 20.B;

conf. dr. ing. NICOLAE ENESCU — elaborarea capitolului 22 și a subcapitolelor 8.B, 10.B, 15.B;

șef lucr. ing. LUCIA GHERMĂNESCU-IONESCU — elaborarea subcapitolelor 4.B și 7.B;

șef lucr. ing. ELIZA HAȘEGANU-ZAMFIRESCU — elaborarea subcapitolelor 20.A, 5.B, 11.B și participare la subcapitolele 3.B și 20.B;

șef lucr. dr. ing. ȘTEFAN STAIU — elaborarea subcapitolelor 17.B și 19.B.

COORDONATOR — *prof. dr. ing. DUMITRU D. BOIANGIU*.

Redactor : ing. Felleia Balasan

Tehnoredactor : Victoria Ghimiș

Coperta : F. Macoveanu

Coli de tipar: 22,75.

Format: 16/70×100.

Bun de tipar: 18. VII. 1983.

Ediția: 1983. Nr. plan: 9233.



Întreprinderea Poligrafică Cluj

B-dul Lenin Nr. 146

Municipiul Cluj-Napoca

Republica Socialistă România

Comanda Nr. 671

Prefață la ediția I

Lucrarea pe care o prezentăm este un rezultat al activității practice de curs și de seminar de mecanică teoretică și al observațiilor autorilor privind modul de înțelegere și de însușire mai deplin, mai eficient și mai operativ al acestei discipline de către studenți.

Autorii au urmărit să scoată în evidență fenomenele fizice și corespondența lor cu expresiile matematice, evitându-se permanent înlocuirea legilor prin formule, adică aplicarea automată a unor relații. În acest fel, cititorul este antrenat, pe de o parte, la însușirea logică a cunoștințelor și, pe de altă parte, la analizarea anumitor fenomene pe baza înțelegerii lor în adâncime.

Lucrarea se adresează unui cerc larg de cititori, cuprinzând în primul rând studenții facultăților tehnice de ingineri și sub-ingineri precum și inginerii, fizicienii și matematicienii care se interesează de problemele de mecanică teoretică.

În special lucrarea este întocmită pentru studenții facultăților de electrotehnică, energetică, electronică, automatică, metalurgie etc. Autorii au ținut seama de numărul mic de ore de curs și de seminar prevăzute în programele acestor facultăți la această disciplină și, din acest motiv, materialul este prezentat în lucrare în mod concentrat. Autorii au urmărit cu insistență ca cititorii să înțeleagă fenomenele și să evite superficialitatea în tratarea problemelor. În acest scop, la începutul fiecărui capitol este prezentată o sinteză cuprinzătoare, în care sînt date definițiile, sînt explicate ideile esențiale, sînt analizate rezultatele și valabilitatea lor și apoi sînt descrise metodele de lucru în mod succint. De asemenea, sînt rezolvate unele aplicații devenite clasice în mecanica teoretică.

În fiecare capitol sînt prezentate probleme din care unele sînt rezolvate integral, iar la unele se dau indicații succesive pînă la rezolvare.

Autorii au urmărit în acest mod să angreneze efectiv studentul în procesul de gîndire pentru ca să-și dezvolte judecata și, ca urmare, să capete experiență și deci încredere în posibilitățile sale.

Colectivul de autori își exprimă mulțumirile sale tov. Acad. Radu Voinea, pentru ajutorul dat prin prețioase îndrumări și sugestii în vederea apariției acestei lucrări în condiții optime.

AUTORII

Prefață la ediția a II-a

Pentru a răspunde mai bine necesităților pregătirii cadrelor tehnice superioare la un nivel ridicat și în permanentă legătură cu practica, în această ediție conținutul lucrării a fost amplificat și restructurat într-un număr sporit de capitole. De asemenea, s-au introdus probleme noi, în anumite cazuri renunțându-se la unele probleme din ediția precedentă.

Pentru o mai ușoară orientare a cititorului, prezentarea teoretică a fiecărui capitol este notată cu A, iar aplicațiile, cu B.

Colectivul de autori aduce pe această cale mulțumiri tovarășilor D. Rugescu și D. Coman pentru contribuția adusă la prima ediție a acestei lucrări.

AUTORII

CONCEPTELE FUNDAMENTALE ȘI CONCEPTELE DE LUCRU ALE MECANICII NEWTONIENE

Mecanica este primul capitol al științelor naturii, științe care studiază multiplele însușiri și manifestări ale materiei.

Materia¹ este categoria filozofică care desemnează realitatea obiectivă dată omului prin senzații, oglindită de senzații, dar existînd independent de ele.

Materia este inepuizabilă, iar procesul cunoașterii ei este de asemenea inepuizabil.

Însușirea fundamentală și modul ei de existență este *mișcarea*. *Mișcarea², în accepția cea mai largă a cuvîntului, înglobează în sine toate schimbările și procesele care au loc în univers, începînd cu simpla deplasare și terminînd cu gîndirea.*

Mecanica newtoniană³ studiază forma cea mai simplă de mișcare, forma mecanică, adică deplasarea, în spațiu și timp, în raport cu un reper, a corpurilor (părți de materie), sub influența interacțiunilor reciproce ale lor.

Mișcarea mecanică este forma cea mai simplă și însoțește sau este cuprinsă în celelalte forme mai complexe de mișcare.

Formele fundamentale ale mișcării, calitativ specifice, nu sînt niciodată izolate, ele se însoțesc și se întrepătrund.

În natură nu există fenomene care să poată fi socotite ca mișcări mecanice pure. În general, mișcarea mecanică este însoțită de frecări și deformări care vor fi considerate forme nemecanice de mișcare.

În studiul mișcării mecanice se poate face *abstracție* de alte forme nemecanice care o însoțesc, dacă acestea din urmă sînt *neesențiale*, adică nu modifică *prea mult* realitatea obiectivă. Acest proces de abstractizare stă la baza *modelării* care simplifică studiul, permițînd folosirea largă a matematicilor. Totuși, cu toată precizia matematică a calculelor, rezultatul obținut nu reprezintă, deseori, decît o primă aproximație a fenomenului studiat.

Corpuri. În faza actuală a științelor naturii, materia este cunoscută ca avînd o structură *duală*: una, discontinuă, discretă, concentrată, *substanța*, iar cealaltă, difuzată în spațiu și continuă, *cîmpul*.

Corpurile în mecanică sînt considerate constituite numai din *substanță*, adică se face *abstracție* de *cîmpul* propriu.

Cîmpurile, cum sînt cel gravitațional sau cel electromagnetic, își au importanța lor și în mecanică, însă numai din punctul de vedere al influenței lor asupra mișcării mecanice a corpurilor.

¹ V. I. Lenin, *Opere*. Vol. 14 E.S.P.L.A., 1954, p. 120.

² Fr. Engels. *Dialectica naturii*. E.S.P.L.A., 1954, p. 55.

³ Denumită și Mecanică teoretică.

Deci, *corpul constituit numai din substanță este primul concept al mecanicii newtoniene*, primul model al acestei discipline.

Deplasarea este în sine o operație geometrică: schimbarea poziției unui corp în raport cu altul presupus nemișcat.

Deplasarea nu este o formă de mișcare, ci însoțește formele de mișcare, deoarece numai deplasarea nu implică și considerarea timpului necesar, ci numai modificarea poziției unui corp în spațiu. *Deplasarea unui corp se poate face într-o infinitate de moduri*. Numai prin considerarea timpului deplasarea în spațiu devine unică și se numește mișcare.

Spațiul și timpul sînt forme obiective de existență a materiei. „*Spațiul, timpul și mișcarea ca forme fundamentale de existență a materiei, formează o unitate organică indisolubilă, determinată de unitatea lumii materiale*”¹.

Concepția care stă la baza mecanicii newtoniene² este materialistă. Spațiul și timpul sînt obiective, dar absolute, adică: conceptul de spațiu al acestei mecanici este independent de timp și de mișcarea materiei, iar timpul este *universal absolut*, același în orice punct al spațiului. De asemenea, *simultaneitatea* este concepută ca *absolută*, adică dacă două evenimente sînt simultane în raport cu un sistem de referință, ele sînt considerate simultane față de orice sistem de referință independent de mișcările lor.

Conceptele de spațiu absolut, de timp absolut și de simultaneitate absolută, care dau mecanicii newtoniene un *caracter metafizic*, se bazează pe presupunerea că ar exista în natură *fenomene instantanee*, adică a căror propagare s-ar face cu *viteză infinită*. Ori, toate fenomenele din natură se propagă cu viteze finite, iar cea mai mare viteză cunoscută pînă azi este viteza luminii³.

Einstein⁴ a enunțat sub formă de principiu, că viteza luminii în vid ($c = 300\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$) este o constantă universală, adică viteza luminii nu depinde de mișcarea sursei care o emite.

Acesta este un principiu fundamental al mecanicii relativiste, care a apărut în știință la începutul secolului XX. În această mecanică, spațiul și timpul depind unul de altul și ambele de materia în mișcare. *Spațiul-timp* al mecanicii relativiste este o varietate cvadridimensională a geometriilor riemanniene. O consecință importantă a legăturii spațiului cu timpul și cu mișcarea materiei este faptul că simultaneitatea evenimentelor este relativă și nu absolută ca în mecanica newtoniană. Evenimentele simultane față de un sistem de referință, în anumite condiții de mișcare, nu sînt simultane față de un alt sistem și în alte condiții de mișcare.

Mecanica relativistă, prin conceptele și rezultatele ei, corespunde mai bine decît mecanica newtoniană cu imaginea pe care o avem astăzi despre natură.

Astfel, mecanica newtoniană nu poate explica fenomene care se propagă cu viteze comparabile cu viteza luminii și care au putut fi explicate cu mecanica relativistă.

¹ *Materialismul dialectic*, E.S.P.L.A., 1954, p. 295.

² Isaac Newton (1643–1727) unul din geniiile omenirii.

³ În consecință, *spațiul absolut, timpul absolut și simultaneitatea absolută* sînt modele ale mecanicii newtoniene.

⁴ Albert Einstein (1879–1955).

Dar pentru vitezele folosite în tehnică și chiar în cosmonautică, care nu depășesc a 20 000-a parte din viteza luminii, rezultatele aplicării mecanicii newtoniene sînt pe deplin satisfăcătoare și extrem de puțin diferite de rezultatele obținute dacă s-ar aplica mecanica relativistă la rezolvarea aceluiași probleme.

În consecință, se poate trage următoarea concluzie: în problemele în care corpurile au viteze foarte mici în comparație cu viteza luminii, se poate presupune că legăturile dintre spațiu, timp și materie, deși reale, sînt totuși necesare și ca atare se poate să nu se țină seamă de aceste legături și să se folosească mecanica newtoniană pentru rezolvarea acestor probleme. Justificarea științifică a acestor neglijări se găsește în procesul de abstractizare și în gradul de aproximație cerut de practică.

Se mai precizează următoarele:

Spațiul mecanicii newtoniene este tridimensional și euclidian, adică este nelimitat, continuu, omogen, izotrop iar geodezicele lui sînt linii drepte.

Timpul mecanicii newtoniene este continuu, omogen, monoton crescător, ireversibil, fără început și fără sfîrșit.

Timpul are o singură dimensiune și face legătura dintre procesele materiale în sensul succesiunii și al duratei lor.

Mișcarea mecanică se studiază în raport cu un reper, ca atare mișcarea mecanică are un caracter relativ.

Prin reper sau sistem de referință se înțelege un corp care nu-și schimbă forma și dimensiunile și la care se raportează mișcarea mecanică. Spațiul concret al mecanicii newtoniene fiind tridimensional, înseamnă că, ducînd prin orice punct al spațiului două drepte distincte oarecare, prin același punct nu se mai poate duce decît o singură dreaptă perpendiculară pe primele. Se formează astfel un triedru care este denumit sistem de referință. De obicei în mecanică se folosește triedrul tridreptunghic drept. Studiul mișcării mecanice a corpurilor se face în raport cu acest sistem de referință care se presupune fix.

Caracterul relativ al mișcării mecanice trebuie înțeles în sensul că această mișcare poate fi observată în mod diferit din sisteme de referință diferite. Însă mișcarea mecanică, la fel cu mișcarea în general, este unică, este absolută în sine, ea există în mod obiectiv, independent de observator.

Repausul absolut nu există în natură deoarece materia este în permanentă mișcare. În mecanică se poate concepe doar repausul relativ, cazul în care corpul se mișcă la fel cu sistemul de referință la care se raportează mișcarea lui.

Newton și-a stabilit principiile pe care și-a construit mecanica, presupunînd existența unui reper fix. Totuși, deoarece nimic nu este fix, ar fi însemnat ca mecanica newtoniană să fie fundamental greșită. Însă, rezultatele acestei mecanici, mai ales în domeniul mișcării corpurilor cerești, au dovedit că principiile au fost corect enunțate, doar că în locul reperului fix trebuie să fie luat reperul heliocentric care are o mișcare aproape inerțială, adică de translație rectilinie și uniformă.

Convenție.

Prin reper fix se va denumi în mecanica newtoniană un reper în repaus față de un reper considerat inerțial în problema studiată.

Interacțiunea corpurilor este una dintre cele mai caracteristice manifestări ale materiei. Noțiunea de interacțiune este foarte generală. Procesului deosebit de complex de interacțiune i se asociază, în mecanică, două din însușirile mai importante ale materiei: gravitația și inerția.

Gravitația este însușirea corpurilor în interacțiune de a se atrage reciproc.

Inerția caracterizează tendința corpurilor de a-și menține starea de mișcare sau de repaus și opunerea lor la acțiunea altor corpuri de a le modifica mișcarea sau starea de repaus.

Cele două însușiri ale materiei, gravitația și inerția se reflectă în noțiunea și mărimea de masă. Astfel, însușirii gravitaționale îi corespunde noțiunea de *masă gravifică*, iar însușirii inerțiale îi corespunde cea de *masă inertă*¹.

Fizicienii Eötvös și Zeeman au dovedit experimental că raportul mărimilor celor două mase este constant și că, alegând unitățile în mod convenabil, *masa gravifică este egală cu masa inertă*.

Egalitatea lor oglindește strânsa legătură dintre cele două însușiri ale materiei, gravitația și inerția.

Definiția mărimii de masă întâlnită de obicei în mecanică newtoniană este: *masa unui corp este măsura inerției lui în mișcarea sa de translație rectilinie și uniformă în raport cu un reper fix*.

Masa este o mărime scalară pozitivă, independentă de mișcarea corpului².

Alte concepte ale mecanicii newtoniene. Procesul de abstractizare în această mecanică se continuă printr-o serie de simplificări, prin crearea unor modele care să aproximeze destul de satisfăcător realitatea obiectivă. Așa după cum spațiul absolut și timpul universal absolut sînt modele satisfăcătoare pentru studiul mișcărilor cu viteze relativ foarte mici în comparație cu viteza luminii, tot astfel și *masa independentă de viteză* satisface nevoile mecanicii newtoniene. Mai sînt și alte modele folosite în această mecanică.

— **Punct material** poate fi considerat orice corp solid ale cărui *dimensiuni, deformări, mișcări de rotație sînt neesențiale* în raport cu alte elemente sau obiective ale problemei, în așa fel încît să fie neglijabile, într-un prim studiu aproximativ al mișcării corpului. În aceste condiții, corpul poate fi asimilat cu un punct în care se *presupune* concentrată întreaga masă a corpului (*centrul de masă*).

Nu orice corp și nu în orice problemă poate fi asimilat cu un punct material; astfel, Pămîntul în mișcarea sa pe orbită poate fi conceput ca un punct material pe cînd electronul în interiorul atomului, nu.

— **Sistem discret de puncte materiale** poate fi conceput ca orice mulțime finită de corpuri asimilabile cu puncte materiale care se interacționează și care sînt așezate în punctele unui domeniu.

Masele corpurilor sînt presupuse concentrate în aceste puncte iar masa totală a sistemului este egală cu suma maselor punctelor materiale (fig. 1.1)

$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$

(axioma adunării maselor).

— **Continuu material** este un corp în care un volum, oricît de mic, conține materie. Dacă $A(\vec{r})$ este un punct curent al domeniului, ΔV , un element

¹ Nu în înțelesul obișnuit de pasivitate.

² În Teoria relativității restrinse se arată că masa corpului variază cu v , viteza lui; $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, unde m_0 este masa de repaus.

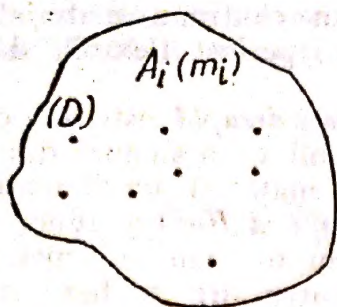


Fig. 1.1.

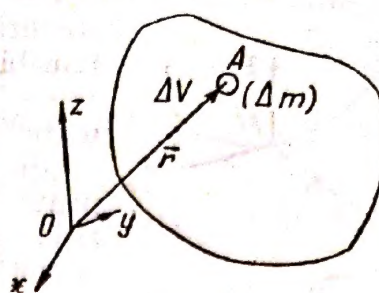


Fig. 1.2.

de volum din jurul punctului A și Δm , masa elementară distribuită acestui volum, prin definiție :

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV};$$

dacă această limită există, este densitatea volumică din A (fig. 1.2). Masa totală a continuului este :

$$m = \int_{(D)} dm = \int_{(V)} \rho dV,$$

integrala fiind extinsă la întreg domeniul (D) al continuului tridimensional de volum V , unde $\rho = \rho(\vec{r})$.

— **Continuul material omogen** este caracterizat prin independența densității de poziția punctului A , adică $\rho = \text{const.}$, deci :

$$m = \rho V.$$

Sistemele materiale din natură nu sînt nici continue și, ca atare, nici omogene.

— **Solid rigid.** Corpurile sînt toate deformabile, unele mai puțin, altele mai mult, deformațiile depinzînd și de felul cum ele sînt acționate. Corpurile care, după dispariția cauzei care le-a deformat, revin sensibil la forma și dimensiunile inițiale se numesc *elastice*, mai bine zis se găsesc în *stare elastică*, iar corpurile care, după dispariția cauzei deformării, revin prea puțin la starea inițială se numesc *plastice* sau sînt în *stare plastică*.

În natură nu există corpuri *perfect elastice* sau *perfect plastice*.

În mecanica newtoniană se folosește într-un prim studiu, *modelul de solid rigid* pentru corpurile solide care, față de acțiunile exterioare la care sînt supuse, *au deformații neglijabile în raport cu aspectele esențiale ale problemei*.

Solidul rigid se caracterizează prin invarianța distanțelor reciproce ale punctelor lui și este definit ca *un continuu material nedeformabil*.

Modele pentru corpuri care au una sau două din dimensiuni mici în comparație cu celelalte dimensiuni. Într-un studiu aproximativ dimensiunile relativ mici se neglijează ajungîndu-se la :

— *membrana*, un continuu material deformabil avînd numai două dimensiuni ;

— *placa curbă sau plană*, un continuu material nedeformabil cu două dimensiuni.

În același mod ca la continuul tridimensional, se scoate în evidență la continuul bidimensional, *densitatea superficială*, care poate fi variabilă sau constantă (membrană sau placă omogenă) ;

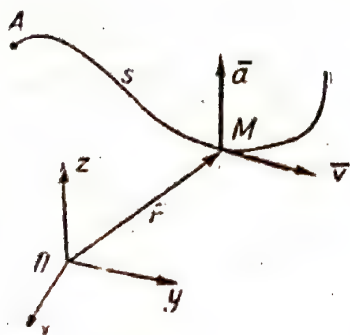


Fig. 1.3.

— firul este un continuu material cu o singură dimensiune, perfect flexibil, dar inextensibil;

— bara curbă sau dreaptă este un continuu material nedeformabil cu o singură dimensiune.

Și la continuul material unidimensional se poate concepe *densitatea liniară*, funcție de poziția punctului curent sau independent de această poziție, pentru fire și bare omogene.

Toate aceste modele nu reprezintă decît aproximativ corpurile considerate în problemele de mecanică, totuși ele trebuie să conțină acele caracteristici ale corpurilor care sînt *esențiale*

pentru rezolvarea satisfăcătoare a acestor probleme. Folosirea lor permite aplicarea în rezolvare a unui instrument matematic de înalt nivel și cu mare precizie. Totuși, din cauza modelării, cu toată precizia lor matematică, rezultatele nu oglindesc decît imperfect fenomenul real.

În continuarea mecanicii newtoniene, alte discipline folosind *modele perfecționate* pot obține rezultate mai apropiate de realitate, corespunzătoare gradului de aproximație cerut de aplicațiile tehnice.

Definiții din cinematica punctului¹

Traectoria este mulțimea continuă a pozițiilor prin care trece, în timp, punctul mobil (fig. 1.3).

Ecuția vectorială a curbei este

$$\vec{r} = \vec{r}(s)$$

unde s este arcul măsurat de la originea arcelor A .

Ecuția orară a mișcării este

$$s = s(t),$$

t fiind timpul.

Ecuția traiectoriei conținînd și legea mișcării este:

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Viteza într-un moment t a punctului mobil este o mărime vectorială care caracterizează direcția tangentă la traiectorie, sensul, în sensul vectorului și drumul parcurs în unitatea de timp, avînd expresia:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}.$$

Tipuri de mișcări:

- *uniformă*: $\vec{v} = \vec{c}$, traiectoria nu poate fi decît o linie dreaptă;
- *rectilinie variată*, viteza este variabilă;
- *curbilinie pseudouniformă*, $|\vec{v}| = c$;
- *curbilinie variată*.

¹ Fîind necesare pentru înțelegerea principiilor fundamentale ale mecanicii newtoniene, sînt prezentate și aici.

Accelerația într-un moment t a punctului mobil este viteza de variație a vectorului viteză și se exprimă prin :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}.$$

Dacă mișcarea este uniformă $\vec{v} = \vec{c}$, accelerația este nulă : $\vec{a} = \vec{c} = 0$.

În toate celelalte cazuri mișcarea punctului se face cu accelerație diferită de zero.

1.A. PRINCIPIILE FUNDAMENTALE ALE MECANICII NEWTONIENE ȘI PROBLEMELE EI

1.A.1. Principiul inerției (I)

Un punct material izolat în spațiu are, în raport cu un reper fix, o mișcare uniformă.

Observații și consecințe

Nu există punct material și nici izolare în spațiu, astfel că principiul inerției nu poate fi verificat direct. Valabilitatea acestui principiu este verificată indirect prin consecințele aplicării lui corecte.

Coexistența în spațiu și timp a corpurilor este urmată de acțiuni reciproce ale lor.

Dintre multiplele și complexe efecte ale interacțiunilor, mecanica studiază pe cele mai simple :

- modificarea mișcării mecanice ;
- modificarea formei corpurilor.

Sub forma cea mai simplificată, asociind-o cu principiul inerției, modificarea mișcării mecanice înseamnă scoaterea punctului material din mișcare sau în virtutea inerției, imprimându-i-se o accelerație.

Accelerația caracterizează aspectul pur mecanic al interacțiunii.

Tot sub forma cea mai simplificată, de pildă pentru un sistem de două puncte materiale care se interacționează, un al doilea efect al interacțiunii este *deformația sistemului*, adică mărirea sau micșorarea distanței dintre cele două puncte. În general, un asemenea sistem se deformează. Însă, mai există și posibilitatea ca, în anumite condiții speciale, sistemul să nu se deformeze, adică dacă unul din punctele materiale este considerat fix, celălalt să descrie un cerc avînd primul punct material ca centru.

În aceste condiții, *interacțiunea se manifestă numai prin imprimarea unei accelerații celui de al doilea punct material, adică numai prin aspectul mecanic.*

Dacă însă distanța dintre punctele materiale ale sistemului se modifică, pe lângă accelerație mai apare și fenomenul de deformare a sistemului care va reprezenta, se înțelege, sub forma cea mai simplă, unul din aspectele nemecanice ale interacțiunii.

Forța. Aspectul mecanic al interacțiunii, în orice moment se reflectă în noțiunea și mărirea de forță care caracterizează în direcție, sens și intensitate acțiunea unui sistem material asupra unui punct material căruia îi modifică mișcarea, adică îi imprimă o accelerație.

Forța este una din cele mai importante și mai subtile noțiuni pe care Newton și-a fundamentat mecanica. Folosirea acestei noțiuni a adus importante simplificări studiului mișcării mecanice. Însă, deseori s-a făcut

o gravă eroare identificându-se complexul proces de interacțiune care se produce în spațiu și timp cu forța care nu este decît o *caracteristică momentană* (instantanee) a interacțiunii.

Forța, în procesul de interacțiune, face legătura dintre forma mecanică și alte forme nemecanice de mișcare a materiei.

Cînd asupra particulei, asimilată cu un punct material, acționează un sistem material oarecare printr-o forță, pentru simplificarea exprimării se spune că asupra punctului material acționează o forță. De asemenea, dacă particula face parte dintr-un solid rigid, se spune că o forță este aplicată solidului rigid. În acest fel în mecanică se face abstracție de natura fizică a forței, care poate fi deosebit de variată, de pildă: cîmpurile gravitaționale și electromagnetice, elasticitatea corpurilor, presiunea și rezistența unui fluid, frecările dintre solide etc.

În trecut, asemenea abstractizări au înlesnit pătrunderea concepției idealiste după care forța ar fi o cauză nematerială a mișcării materiei care ar fi inertă, în sensul că nu s-ar mișca decît acționată de forțe.

Filozofia materialistă bazată pe știința contemporană a stabilit că: *mișcarea este modul de existență a materiei, iar forța are întotdeauna un substrat material și este o caracteristică obiectivă a interacțiunii.*

În afară de principiul inerției (I), în care nu intervine noțiunea de forță, la baza mecanicii newtoniene mai stau următoarele trei¹ principii: *principiul acțiunii (II), principiul egalității acțiunii și reacțiunii (III) și principiul paralelogramului forțelor (IV).*

1.A.2. Principiul acțiunii forței (II)

O forță imprimă unui punct material de masă independentă de mișcare, o accelerație² egală cu raportul dintre intensitatea forței și masa punctului.

Observații și consecințe

Accelerația este o mărime vectorială (\vec{a}), legată de punctul material M , iar masa (m) o mărime scalară pozitivă; în consecință, forța \vec{F} , cauza accelerației, este și ea o mărime vectorială avînd pe M ca punct de aplicație, aceeași direcție și același sens cu \vec{a} (fig. 1.4) iar ca expresie:

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (1.1)$$

Se precizează că (1.1) nu este definiția forței ci expresia principiului II al mecanicii newtoniene.

Principiul se extinde și la punctul cu masa variabilă, expresia lui fiind în acest caz:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{a})}{dt}. \quad (1.2)$$

Relația (1.1) scrisă sub forma:

$$m\vec{a} - \vec{F} = 0 \quad (1.3)$$

este ecuația fundamentală a mecanicii newtoniene.

¹ Deseori și perfect justificat, unele observații sau consecințe care însoțesc prezentarea lor, avînd și ele un caracter principal, sînt enunțate tot ca principii.

² În raport cu un reper fix.

Scriind expresia (1.1) sub forma :

$$\bar{a} = \frac{\bar{F}}{m}$$

se poate observa că, cu cît m este mai mare, cu atît o aceeaşi forţă îi imprimă punctului material o acceleraţie mai mică, adică cu atît şi opunerea punctului material, la acţiunea de modificare a vitezei lui, este mai mare.

Acastă observaţie poate da o explicaţie inerţiei corpurilor în mişcare (repaus) şi justifică denumirea de *masă inertă* în mişcarea mecanică a materiei.

Masa gravifică apare în mecanica newtoniană la *legea gravitaţiei universale*, dedusă de N e w t o n din observaţiile lui K e p l e r. Scrisă sub forma :

$$|\bar{F}| = k \frac{m_1 m_2}{d^2} \quad (1.4)$$

exprimă forţa de atracţie reciprocă a două corpuri, asimilate cu două puncte materiale, situate la distanţa d între ele şi avînd masele gravifice m_1 şi m_2 , k fiind constanta universală (Gauss) de valoare $6,664 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$, independentă de corpurile care se atrag (fig. 1.5).

Dacă se notează cu $\bar{\Gamma}$ forţa cu care Pămîntul atrage un punct material de masă m , situat la suprafaţa lui, ecuaţia (1.4) s-ar scrie sub forma :

$$|\bar{\Gamma}| = k \frac{mM}{R^2} \quad (1.5)$$

unde R este raza Pămîntului, iar M este masa lui presupusă concentrată în centrul lui de masă.

Dacă Pămîntul ar fi un reper inerţial, pe baza egalităţii numerice a masei gravifice cu masa inertă s-ar putea scrie şi ecuaţia :

$$m\bar{\gamma} - \bar{\Gamma} = 0 \quad (1.6)$$

la fel ca (1.3), unde $\bar{\gamma}$ este acceleraţia gravitaţiei.

Dar Pămîntul nu poate fi conceput ca reper inerţial în special din cauza mişcării sale de rotaţie în jurul axei polilor. Din această cauză, pentru un observator de pe Pămînt, asupra punctului material ar acţiona atît $\bar{\Gamma}$, cît şi o forţă \bar{C} , denumită *centrifugă*, dînd ceea ce se numeşte greutatea \bar{G} la suprafaţa Pămîntului :

$$\bar{G} = m\bar{\gamma} + \bar{C},$$

iar ecuaţia fundamentală la suprafaţa Pămîntului devine :

$$m\bar{g} - \bar{G} = 0 \quad (1.7)$$

unde \bar{g} este acceleraţia greutăţii.

Cea mai importantă completare care trebuie făcută atît la enunţul principiu-lui II, cît şi la observaţiile precedente are următorul enunţ :

Efectul unei forţe nu depinde de starea de mişcare a punctului material şi nici de acţiunea altor forţe aplicate lui.

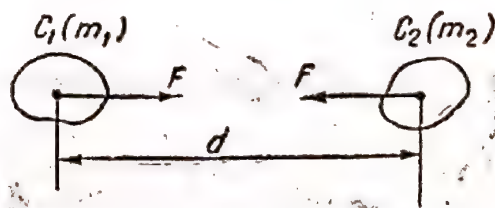


Fig. 1.5.

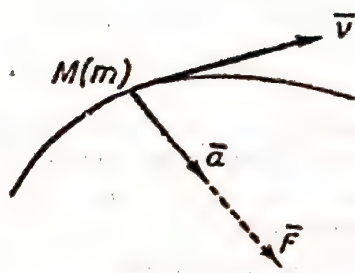


Fig. 1.6.

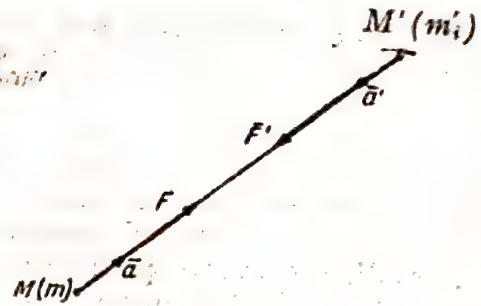


Fig. 1.7.

Adică, indiferent dacă punctul $M(m)$ se mișcă ($\bar{v} \neq 0$) sau este în repaus ($\bar{v} = 0$), accelerația imprimată de forță asupra punctului M este aceeași, independent și de faptul dacă asupra lui mai acționează sau nu vreo altă forță (fig. 1.6).

Această completare are caracterul unui *principiu*: al independenței acțiunii forței.

1.A.3. Principiul egalității acțiunii și reacțiunii (III)

Forțele de interacțiune reciprocă a două puncte materiale sînt egale și direct opuse.

Observații și consecințe

Se înțelege că aici este considerat numai aspectul mecanic al interacțiunii.

Dacă punctul material $M(m)$ este acționat din afară (de celălalt punct material) cu forța \bar{F} , efectul mecanic asupra lui este:

$$\bar{a} = \frac{\bar{F}}{m},$$

adică imprimă accelerația \bar{a} , scoțindu-l din mișcarea pe care ar fi avut-o M în virtutea inerției dacă ar fi fost izolat. La rîndul lui, M acționează asupra lui $M'(m')$ cu o forță \bar{F}' egală și direct opusă lui \bar{F} (fig. 1.7). Cele două forțe se găsesc pe același suport și în plus mai satisfac și condiția:

$$\bar{F} + \bar{F}' = 0. \quad (1.8)$$

Dacă se studiază mișcarea punctului M , atunci \bar{F} reprezintă acțiunea din afară asupra lui, iar \bar{F}' se consideră reacțiunea lui M asupra lui M' , care în această problemă este *agentul* (cel care acționează).

Reacțiunea punctului material M față de acțiunea celui alt punct material M' (agentul), care tinde să-i modifice mișcarea sau repausul, adică tinde să-l scoată din „inerția” lui, este numită *forță de inerție* și este aplicată punctului M' , adică exclusiv agentului.

1.A.4. Principiul paralelogramului forțelor (IV)

Dacă două forțe acționează simultan asupra unui punct material, efectul lor comun este același cu efectul unei a treia forțe care ar acționa singură asupra punctului material în direcția, sensul și cu mărimea diagonalei paralelogramului avînd ca laturi cele două forțe aplicate punctului material.

Observații și consecințe

Cu ajutorul caracteristicilor cunoscute ale forțelor \vec{F}_1 și \vec{F}_2 care acționează simultan asupra punctului material M , folosind o scară convenabilă, se construiesc vectorii \vec{MA} și \vec{MB} (fig. 1.8) care reprezintă aceste forțe.

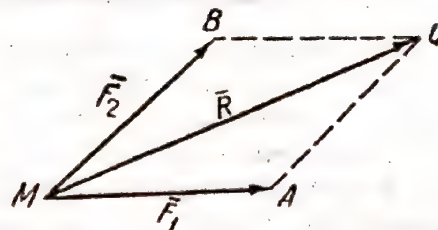


Fig. 1.8.

Dacă se completează paralelogramul $MABC$, vectorul \vec{MC} reprezintă, la aceeași scară, cea de a treia forță \vec{R} , care, dacă ar acționa singură asupra lui M , ar produce același efect cu efectul comun al forțelor \vec{F}_1 și \vec{F}_2 .

Relația vectorială a principiului paralelogramului este :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{R} \quad (1.9)$$

completată cu faptul că forțele acționează punctul material M . De aceea \vec{R} se numește *rezultanta forțelor* \vec{F}_1 și \vec{F}_2 , care sînt componentele forței \vec{R} .

Dacă nu se precizează că forțele sînt aplicate aceluiași punct material M relația (1.9) *nu reprezintă altceva decît o însumare vectorială*.

Deseori, principiul paralelogramului forțelor este omis din rîndul principiilor mecanicii newtoniene, fiind aplicat sub forma regulii de însumare vectorială. În acest fel se confundă *rezultanta* cu *suma*, se pierde din vedere că la baza calculului vectorial (disciplină matematică) a stat mecanica newtoniană (disciplină fizică) și nu invers. De altfel și *N e w t o n* a enunțat după primele trei principii (pe care le-a denumit axiome sau legi) și două corolare care justifică completarea principiilor cu cel al paralelogramului forțelor. Încercările făcute ulterior de a demonstra matematic acest principiu nu au dat rezultate.

Și la acest principiu este de făcut completarea că *acțiunea unei forțe este independentă de mișcarea punctului material M și de efectul produs de cealaltă forță*.

Cîmpul de aplicare al acestui principiu este larg. Sub forma *principiului suprapunerii efectelor* el este întîlnit și în alte discipline, avînd însă o valabilitate condiționată¹.

În cazul particular în care :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0,$$

forțele aplicate punctului material M sînt egale și direct opuse, ele au asupra punctului material același efect ca și forța $\vec{F} = 0$, adică *efect nul, ca și cum punctul material ar fi izolat*. În acest caz punctul material se mișcă în virtutea inerției, iar dacă era în repaus, rămîne în această stare. Acesta este cazul *forțelor în echilibru*. Realizarea unor experiențe de acest fel constituie *verificări indirecte ale principiului inerției*.

Două puncte materiale se interacționează reciproc cu forțele \vec{F} și \vec{F}' egale și direct opuse :

$$\vec{F} + \vec{F}' = 0.$$

Aceste forțe nu se echilibrează, deoarece ele nu acționează asupra aceluiași punct material.

¹ Astfel, în Rezistența materialelor, domeniul de valabilitate este condiționat de aplicabilitatea și după însumare a legii lui Hooke.

1.A.5. Probleme generale ale mecanicii punctului material

Problema directă. Se cunoaște mișcarea sau poziția de repaus în raport cu un reper fix a unui punct material, să se determine caracteristicile forțelor care acționează punctul.

Problema inversă. Se cunosc forțele care acționează un punct material, să se determine mișcarea sau poziția de repaus în raport cu un reper fix a punctului. Pentru a găsi soluția unică a problemei inverse, mai trebuie cunoscute și condițiile inițiale¹ ale mișcării.

Problema mixtă. Se cunosc unele din caracteristicile mișcării, sau ale poziției de repaus, în raport cu un reper fix și unele din caracteristicile forțelor care îl acționează, să se determine caracteristicile necunoscute.

¹ adică: poziția inițială (\vec{r}_0) și viteza inițială (\vec{v}_0).

REDUCEREA SISTEMELOR DE FORȚE. ELEMENTE DE TEORIA VECTORILOR ALUNECĂTORI

2.A. PREZENTAREA TEORETICĂ

2.A.1. Forța,

Forța, o caracteristică importantă a interacțiunii corpurilor, este o mărime vectorială. Are punct de aplicație, direcție, sens și intensitate (mărime). Se convine a se considera ca punct de aplicație, un punct material al corpului acționat. *Deoarece corpurile sînt deformabile*, forța poate fi reprezentată *numai printr-un vector legat de punct*.

Una din problemele de bază ale mecanicii este reducerea sistemului de forțe aplicat unui corp, adică găsirea unui sistem de forțe cît mai simplu cu putință și care să fie echivalent (să producă același efect) cu sistemul inițial. Dacă forțele acționează corpurile deformabile, operația de simplificare se poate folosi numai în cazul forțelor care au același punct de aplicație. La baza operației stă principiul paralelogramului forțelor. Un sistem de forțe concurente în același punct este echivalent — și se poate înlocui — cu o forță unică : rezultanta sistemului. Uneori, rezultanta poate fi nulă ; atunci *sistemul de forțe se echilibrează*.

În cazul corpurilor solide, la care deformările rezultate din acțiunile forțelor *sînt neesențiale* pentru problemele de mișcare mecanică, se poate recurge la *modelul de solid rigid*. În acest caz forța poate fi reprezentată printr-un *vector alunecător*. Adică oricare din forțele care acționează solidul poate fi deplasată prin alunecare pe suportul ei, cu condiția ca noul punct de aplicație al forței să fie tot un punct al solidului sau legat rigid de acesta.

Observație

In nici o ipoteză fizică forța nu poate fi reprezentată printr-un vector liber.

2.A.2. Reducerea sistemului de forțe

Reducerea unui sistem de forțe la un sistem echivalent, dar cît mai simplu, se face cu ajutorul următoarelor cinci operații elementare de echivalență :

- alunecarea forței pe suportul ei ;
- înlocuirea a două forțe concurente prin rezultanta lor ;
- suprimarea a două forțe egale și de sens contrar aplicate în același punct (forțe direct opuse) ca avînd o rezultantă nulă, adică avînd un efect nul ;
- adăugarea unui sistem de două forțe direct opuse, avînd un efect nul ;
- înlocuirea unei forțe prin cele două componente rezultate din descompunerea ei după două drepte concurente în același punct pe suportul forței și situate în același plan cu forța.

La baza acestor operații elementare de echivalență stau : *modelul de solid rigid, principiul paralelogramului forțelor și consecințele imediate ale acestui principiu*.

2.A.3. Cuplu de forțe

Dacă asupra unui solid rigid ar acționa două forțe cu suporturile paralele, prin aplicarea operațiilor elementare de echivalență acest sistem de forțe se poate reduce în general la o rezultantă unică. Sistemul nu se poate echilibra decât dacă forțele ar fi egale și direct opuse. Uneori, însă, forțele sînt astfel încît oricît și oricum s-ar aplica operațiile de echivalență sistemul nu este reductibil la o rezultantă unică. Acest caz special apare numai dacă cele două forțe sînt egale, de sens contrar și situate pe două suporturi paralele distincte. Sistemul constituie un nou *element mecanic* — după forță — și se numește *cuplu de forțe*.

Observație

Efectul unui cuplu de forțe aplicat unui solid rigid diferă de efectul unei singure forțe aplicată aceluiași solid, în aceleași condiții.

2.A.4. Torsorul de forțe

Dacă asupra unui solid rigid ar acționa două forțe cu suporturile nesi-tuate în același plan, orice operații de echivalență s-ar aplica acestui sistem, el este ireductibil. Sistemul nu se echilibrează, nu se poate reduce la o rezul-tantă unică și nici la un cuplu de forțe. În schimb, acest sistem poate fi întotdeauna înlocuit printr-un sistem compus dintr-o forță și dintr-un cuplu de forțe, forța nefiind situată în planul cuplului. Acest sistem se numește *torsor de forțe* și este cel de al treilea *element mecanic ireductibil*.

Efectul unui torsor aplicat unui solid rigid este cu totul altul decît al unui cuplu sau al unei singure forțe aplicată solidului, în condiții mecanice identice.

Observație

Dacă forța \vec{F} ar fi situată în planul (P) al cuplului, este evident că sis-temul nu ar mai constitui un *torsor veritabil*, deoarece aplicînd operațiile ele-mentare de echivalență s-ar obține, întotdeauna, reducerea sistemului la o *rezultantă unică*.

Reciproc, orice forță \vec{F} , de pe suportul ei (D) , poate fi înlocuită printr-un sistem compus dintr-o forță egală cu \vec{F} , dar situată pe un suport paralel (D') și un cuplu de forțe (\vec{F}, \vec{F}') al cărui plan (P) este determinat de cele două suporturi paralele (D) și (D') (fig. 2.A.1).

Pentru aceasta, este de ajuns ca pe o dreaptă (D') paralelă cu (D) să se aplice forțele \vec{F} și \vec{F}' , astfel ca :

$$\vec{F} + \vec{F}' = 0.$$

Forța \vec{F} de pe (D) cu \vec{F}' formează un cuplu care, împreună cu forța \vec{F} de pe (D') , reprezintă un sistem de forțe echivalent cu forța \vec{F} de pe (D) , forță de la care s-a pornit. Și acest sistem — o forță și un cuplu de forțe — se

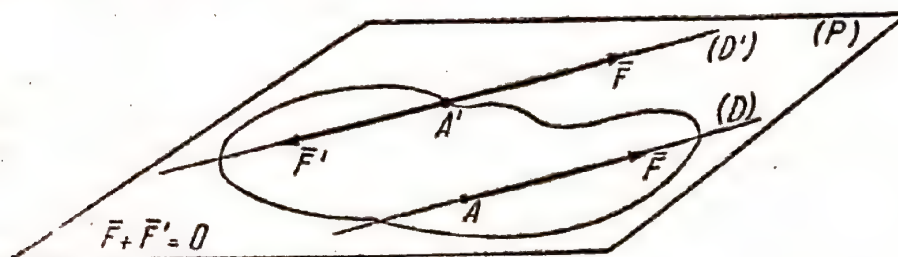


Fig. 2.A.1

poate numi *torsor*. Însă acest torsor fiind reductibil, nu este un torsor veritabil și va fi denumit *torsor formal*.

Torsorul formal stă la baza unei metode de reducere a unui sistem oarecare de forțe aplicat unui solid rigid.

2.A.5. Vectori alunecători

În mecanică, în afară de forțe se mai întâlnesc și alte mărimi care pot fi reprezentate prin vectori alunecători care vor necesita operații de reducere. De aceea, în cadrul lucrării de față, s-a extins problema reducerii unui sistem de forțe acționând un solid rigid la aceea a reducerii unui sistem de vectori alunecători.

Pentru ca această extindere să dea rezultate valabile, este necesar ca mărimilor reprezentate prin vectori alunecători să li se poată aplica definițiile și operațiile elementare de echivalență care se aplică forțelor acționând un solid rigid.

Caracteristicile unui vector alunecător sînt: *dreapta suport*, *sensul* și *mărimea*. Oricare din punctele dreptei suport poate fi considerat ca origine a vectorului, iar direcția vectorului este aceeași cu direcția dreptei suport. Dacă (D) este dreapta suport iar \vec{V} un vector liber, care prezintă pe lângă direcție și celelalte caracteristici ale vectorului alunecător, adică sensul și mărimea, vectorul, alunecător poate fi notat simbolic prin (\vec{V}, D) .

2.A.6. Momentul unui vector alunecător în raport cu un punct

Momentul unui vector alunecător (\vec{V}, D) , în raport cu un punct O , este prin definiție:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{V},$$

un vector legat de punctul O (fig. 2.A.2), perpendicular pe planul (P) determinat de suportul (D) și punctul O , orientat în sensul în care observatorul avînd picioarele în O și capul plasat în sensul vectorului moment vede originea vectorului alunecător la dreapta sa și vîrfurile acestuia la stînga sa. Modulul este:

$$|\vec{M}_O| = d |\vec{V}|,$$

d fiind distanța de la O la (D) .

Proprietățile momentului vectorului alunecător (\vec{V}, D) în raport cu un punct O sînt:

- \vec{M}_O este invariant în raport cu operația de alunecare a vectorului pe suport.
- \vec{M}_O este nul, \vec{V} nefiind nul, dacă (D) trece prin O .

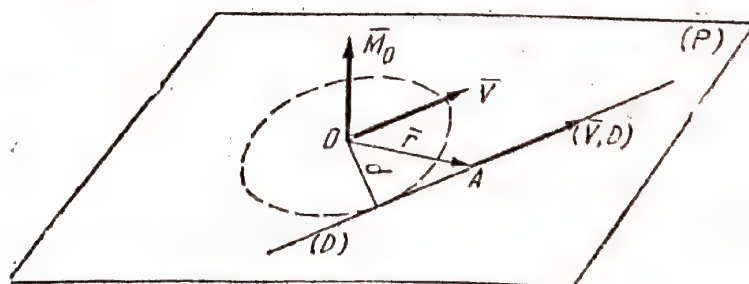


Fig. 2.A.2

- Împreună cu \vec{V} ca vector liber, \vec{M}_0 determină, în mod univoc, vectorul alunecător (\vec{V}, \vec{D}) .
- (\vec{V}, \vec{M}_0) sînt coordonatele vectoriale, în raport cu reperul avînd originea în O , ale vectorului alunecător.
- Triedrul $(\vec{r}, \vec{V}, \vec{M}_0)$ are aceeași orientare cu triedrul drept.

Observație

Noțiunea de moment este fără semnificație pentru un vector liber.

2.A.7. Momentul unui vector alunecător în raport cu o axă

Momentul unui vector alunecător (\vec{V}, D) în raport cu o axă (Δ) este, prin definiție, proiecția ortogonală pe (Δ) a momentului \vec{M}_0 , în raport cu un punct oarecare O al axei (Δ) , a vectorului (\vec{V}, D) (fig. 2. A.3), adică :

$$\vec{M}_\Delta = pr_\Delta \vec{M}_0$$

Convenție

Deoarece proiecția unui vector pe o dreaptă sau pe un plan este un vector, proiecția putîndu-se face ortogonal sau paralel cu o direcție dată, se convine că proiecția ortogonală¹ pe o axă este *tot un vector* și nu un scalar, deoarece proiectarea este în primul rînd o operație geometrică și în al doilea rînd se determină valoarea scalară, în raport cu axa, a momentului și care se obține folosind produsul scalar :

$$\vec{M}_0 \vec{u} = M_\Delta; \quad \vec{M}_\Delta = M_\Delta \vec{u},$$

unde \vec{u} este versorul axei (Δ) .

Consecință

Momentul unui vector alunecător (\vec{V}, D) în raport cu o axă (Δ) mai este și momentul proiecției vectorului pe un plan perpendicular pe axă, în raport cu punctul în care axa înțeapă planul. Adică :

$$\vec{M}_\Delta = \vec{oa} \times \vec{v}.$$

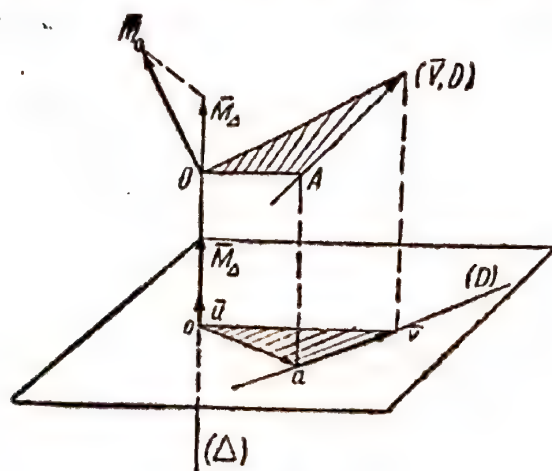


Fig. 2.A.3

Proprietățile momentului vectorului alunecător (\vec{V}, D) în raport cu axa (Δ) sînt :

- \vec{M}_Δ este un vector alunecător, fiind invariant în raport cu poziția punctului O de pe axa (Δ) .
- \vec{M}_Δ este invariant în raport cu operația de alunecare pe suport a vectorului (\vec{V}, D) .
- \vec{M}_Δ este nul, \vec{V} nefiind nul, ori de cîte ori suportul (D) și axa (Δ) sînt în același plan.

¹ sau oblică.

2.A.8. Teorema momentelor (Varignon)¹

Dacă un sistem de vectori alunecători se reduce la un vector rezultat unic, momentul vectorului rezultat este egal cu momentul rezultat al sistemului².

Definiție. Momentul rezultat, în raport cu un punct sau o axă, este suma vectorială a momentelor, în raport cu același punct sau aceeași axă, a vectorilor alunecători ai sistemului.

Observații:

a) Cu ajutorul teoremei momentelor se poate determina suportul vectorului rezultat al unui sistem dat de vectori alunecători.

b) Dacă un sistem de vectori alunecători se reduce la un cuplu, este evident că nu se poate aplica teorema momentelor, deoarece nu există vector rezultat. În schimb apare o proprietate deosebit de importantă, și anume, *momentul rezultat al unui sistem de vectori alunecători care se reduce la un cuplu este invariant în raport cu poziția punctului față de care se calculează momentele vectorilor sistemului.*

Proprietățile cuplului de vectori alunecători sînt:

— Momentul rezultat al celor doi vectori alunecători ai cuplului, în raport cu orice punct din spațiu este un vector invariant care se numește *momentul cuplului*. El este un *vector liber perpendicular* pe planul cuplului avînd *sensul* astfel încît un observator (fig. 2.A.4), așezat între suporturile celor doi vectori ai cuplului, cu capul în sensul vectorului moment, să vadă originile vectorilor la dreapta sa și extremitățile lor la stînga sa, sau astfel încît triedrul construit cu vectorii $\overrightarrow{A'A}$, \vec{V} , \vec{M} să fie un triedru drept, iar modulul $|\vec{M}| = |\vec{V}| d$, unde d este distanța dintre suporturile paralele ale celor doi vectori ai cuplului.

— Vectorul \vec{M} caracterizează cuplul și reprezintă măsura lui. Dacă cuplul este compus dintr-o pereche de forțe aplicate unui solid rigid, *momentul măsoară efectul acestui cuplu de forțe în mișcarea de rotație a solidului.*

Unui cuplu de vectori alunecători i se pot aplica următoarele operații de echivalență:

Să fie deplasat prin *translație* în planul său sau în alt plan paralel.

Să fie *rotit* în jurul unui ax perpendicular pe planul său.

Să fie *deformat* prin modificarea modulului vectorilor $|\vec{V}|$ și a distanței d dintre suporturi cu condiția să nu se schimbe nici sensul cuplului și nici modulul momentului său.

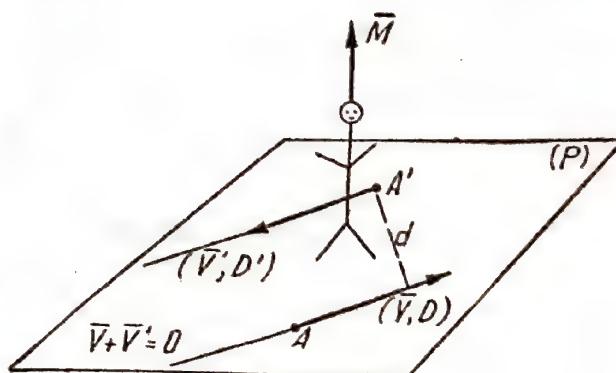


Fig. 2.A.4

¹ Stabilită de Varignon (1654—1722) pentru un sistem de forțe se extinde și asupra unui sistem de vectori alunecători. Teorema este o consecință a distributivității produsului vectorial.

² Se dă și următorul enunț concis: *Momentul rezultantei este egal cu momentul rezultat, în scopul precis de a se evita confuziile care se fac deseori.*

Două cupluri avînd momente egale (ca vectori) sînt echivalente, deoarece prin operații de echivalență aplicabile atît cuplurilor cît și vectorilor alunecători se poate transforma unul în celălalt.

2.A.9. Reducerea unui sistem de n vectori alunecători cu suporturi concurente

Dacă (\vec{V}_i, D_i) , unde $i = 1, 2, 3 \dots n$, reprezintă cei n vectori alunecători ale căror suporturi trec printr-un punct A , sistemul se reduce la un vector rezultat unic :

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^n \vec{V}_i$$

al cărui suport trece și el prin A .

Acest rezultat se obține aplicîndu-se, de cîte ori este nevoie, operațiile elementare de echivalență sau construindu-se poligonul care reprezintă suma vectorială \vec{V} a vectorilor \vec{V}_i ca și cum ar fi vectori liberi, iar apoi ducîndu-se prin A o paralelă cu direcția lui \vec{V} și care va fi suportul vectorului rezultat unic.

Observații

Dacă poligonul se închide, $\vec{V} = 0$, iar sistemul de vectori alunecători este echivalent cu zero (în cazul forțelor acționînd un solid rigid, sistemul se echilibrează).

Dacă punctul A nu se află în cadrul desenului, pentru determinarea suportului, se aplică teorema lui Varignon care va da momentul vectorului rezultat unic ca fiind egal cu momentul rezultat al sistemului de vectori alunecători dat :

$$\vec{r} \times \vec{V} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{V}_i$$

unde \vec{r}_i reprezintă vectorul de poziție al unui punct A_i al suportului (D_i) în raport cu un reper cu originea într-un punct arbitrar O , toți vectorii cunoscuți, iar \vec{r} , singura necunoscută a ecuației vectoriale, este vectorul de poziție al unui punct oarecare al suportului vectorului rezultat unic.

Rezolvarea vectorială sau analitică permite determinarea suportului (D) și deci a vectorului rezultat unic (\vec{V}, D) .

2.A.10. Reducerea unui sistem de cupluri de vectori alunecători

Dacă \vec{M}_i , unde $i = 1, 2, 3 \dots n$, reprezintă momentele celor n cupluri, sistemul se reduce, în general, la un *cuplu rezultat* al cărui moment este :

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i$$

Deoarece momentul \vec{M}_i al unui cuplu este egal cu momentul rezultat al vectorilor (\vec{V}_i, D_i) și (\vec{V}'_i, D'_i) , *momentul cuplului rezultat este egal cu momentul rezultat al tuturor vectorilor cuplurilor sistemului în raport cu orice punct O ales arbitrar.*

Observații

Dacă $\bar{M} = 0$ sistemul este echivalent cu zero.

Deoarece $\bar{V}_i + \bar{V}'_i = 0$ pentru fiecare cuplu și cum $\bar{V} = \sum_{i=1}^n \bar{V}_i$, iar $\bar{V}' = \sum_{i=1}^n \bar{V}'_i$, rezultă: $\bar{V} + \bar{V}' = 0$.

Un sistem de cupluri de forțe aplicate unui solid rigid se echilibrează dacă momentul cuplului rezultat este nul.

2.A.11. Reducerea unui sistem oarecare de n vectori alunecători cu suporturi dispuse oricum în spațiu

Se notează acest sistem de vectori cu (\bar{V}_i, D_i) , unde i poate lua orice valoare întreagă între 1 și n .

Se consideră un punct O oarecare în spațiu.

Se aplică metoda torsorului formal, iar punctul O primește denumirea de centru de reducere. Când se trece la exprimarea analitică, acest punct devine originea sistemului de referință (de obicei cartezian). Dacă vectorului (\bar{V}_i, D_i) i se adaugă în O vectorii \bar{V}_i și \bar{V}'_i (fig. 2.A.5) astfel încât: $\bar{V}_i + \bar{V}'_i = 0$, sistemul celor trei vectori este echivalent cu (\bar{V}_i, D_i) .

Deci oricare din vectorii (\bar{V}_i, D_i) este echivalent cu vectorul echipolent \bar{V}_i cu originea în O la care se adaugă cuplul $(\bar{V}_i$ din A_i și \bar{V}'_i din O), de moment:

$$\bar{M}_i = \bar{r}_i \times \bar{V}_i.$$

Deci (\bar{V}_i, D_i) a fost înlocuit cu un torsor formal, echivalent cu (\bar{V}_i, D_i) .

Aplicând aceeași operație și celorlalți vectori alunecători ai sistemului ($i = 1, 2, 3 \dots n$), se obține un sistem de n torsori formali compuși din n vectori \bar{V}_i ($i = 1, 2, 3 \dots n$) cu originea în O și din n cupluri de vectori alunecători de momente \bar{M}_i , sistem echivalent cu sistemul celor n vectori alunecători inițial considerat.

Reducând cei n vectori \bar{V}_i ($i = 1, 2, 3 \dots n$) cu originea în O , se găsește vectorul rezultat cu originea în O al sistemului:

$$\bar{V} = \sum_{i=1}^n \bar{V}_i$$

la care trebuie adăugat și cuplul rezultat al celor n cupluri al cărui moment este:

$$\bar{M} = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{V}_i$$

adică momentul cuplului rezultat este chiar momentul rezultat, în raport cu centrul O al sistemului considerat de vectori alunecători, sistem care în acest fel este echivalent cu un torsor de vectori alunecători reprezentat prin \bar{V} și \bar{M} .

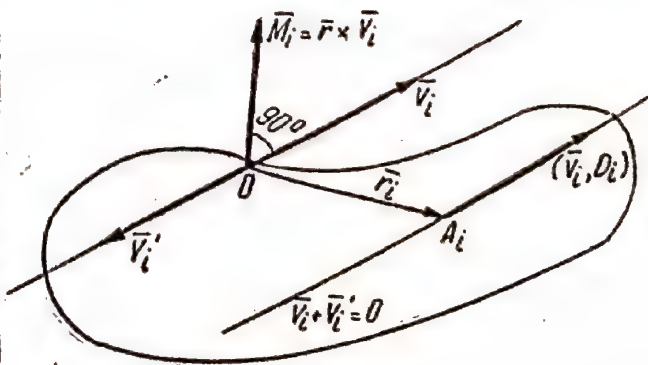


Fig. 2.A.5

Observație importantă

Nu se va confunda *cuplul* cu *momentul* care îl reprezintă și care nu este decât *măsura* cuplului.

2.A.12. Invarianții reducerii

Primul invariant al sistemului de vectori alunecători este *vectorul rezultat*, deoarece acesta nu depinde de centrul de reducere.

Momentul rezultat nu este, în general, un invariant (fig. 2.A.6)

Astfel, într-un nou centru de reducere O' , momentul rezultat al sistemului este :

$$\bar{M}' = \bar{M} + \overline{O'O} \times \bar{V},$$

în schimb, proiecția ortogonală a momentului rezultat pe direcția vectorului rezultat este cel de al doilea invariant al sistemului, adică :

$$\bar{M}'_v = \bar{M}_v.$$

Altfel spus : *momentul rezultat în raport cu axa vectorului rezultat nu depinde de centrul de reducere.*

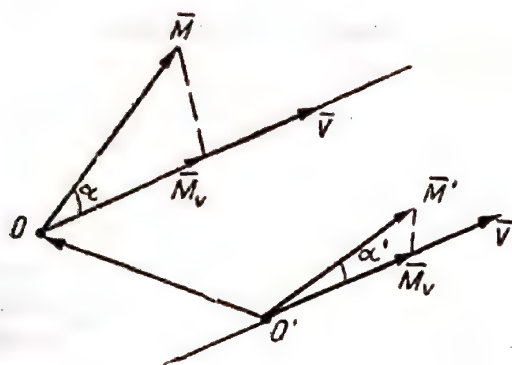


Fig. 2.A.6.

2.A.13. Discuția reducerii pe bază invariantilor \bar{V} și \bar{M} .

Cazul I : $\bar{V} \neq 0$, $\bar{M} \neq 0$, sistemul de vectori alunecători (\bar{V}_i, D_i) , unde $i = 1, 2, 3 \dots n$, este echivalent în orice centru de reducere cu un *torsor veritabil*.

Cazul II : $\bar{V} \neq 0$, $\bar{M}_v = 0$, proiecția momentului rezultat \bar{M} pe direcția lui \bar{V} fiind nulă, torsorul nu mai este veritabil, iar sistemul este echivalent cu un vector rezultat unic.

Dacă, în particular și $\bar{M} = 0$, înseamnă că vectorul rezultat trece prin O , centrul de reducere ales.

Cazul III : $\bar{V} = 0$ în orice centru de reducere, dar $\bar{M}' = \bar{M} = \bar{C}$, adică momentul rezultat este el acum cel de al doilea invariant. Sistemul se reduce la un cuplu al cărui moment este momentul rezultat al sistemului.

Cazul IV : $\bar{V} = 0$, $\bar{M} = 0$, sistemul este echivalent cu zero, în orice centru de reducere.

Observație

În cazul unui *sistem de forțe* aplicat unui solid rigid

$$\bar{V} = 0, \bar{M} = 0$$

sînt condițiile vectoriale, *necesare și suficiente*, pentru echilibrul sistemului de forțe.

2.A.14. Axa centrală

Axa centrală a unui sistem de vectori alunecători este, prin definiție locul geometric al centrelor de reducere în care torsorul echivalent cu sistemul de vectori alunecători este minimal, adică momentul rezultat al sistemului \bar{M} este egal cu \bar{M}_v în aceste centre de reducere.

Sau altfel: în aceste centre de reducere momentul rezultat este coliniar cu vectorul rezultat al sistemului.

Pentru determinarea axei centrale a unui sistem de vectori alunecători (\vec{V}_i, D_i) se calculează, într-un centru arbitrar O de reducere (fig. 2.A.7),

vectorul rezultat $\vec{V} = \sum_{i=1}^n \vec{V}_i$, și mo-

mentul rezultat $\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{V}_i$ ale

torsorului echivalent cu sistemul.

Se caută un nou centru de reducere O' cu vector de poziție necunoscut \vec{r} , în care \vec{M}' să fie minimal.

În centrul O , \vec{M} are două componente: \vec{M}_v și $\vec{\mu}$, prima dirijată după \vec{V} , iar cealaltă după perpendiculara pe \vec{V} în planul (\vec{V}, \vec{M}) . În centrul O' trebuie ca \vec{M}' să se reducă numai la \vec{M}_v , adică:

$$\vec{M}' = \vec{M} + \vec{O'O} \times \vec{V} = \vec{M}_v + \vec{\mu} - \vec{r} \times \vec{V}$$

din care se obține condiția:

$$\vec{r} \times \vec{V} = \vec{\mu},$$

o ecuație vectorială avînd pe \vec{r} ca necunoscută.

Uneori este mai comod să se exprime că \vec{M}' este colinear cu \vec{V} .

Alteori se exprimă \vec{M} analitic și se pun condițiile de minim pentru \vec{M}' ca funcție de coordonatele x, y, z ale centrului necunoscut de reducere O' .

Observație

Axa centrală este o dreaptă, iar în cazul unui sistem de forțe aplicat unui solid rigid în repaus, acțiunea torsorului minimal se poate asocia cu deplasarea unui șurub în raport cu piulița, sau mai general, cu o mișcare elicoidală.

2.A.15. Reducerea unor sisteme particulare de vectori alunecători

Vectori cu suporturile situate în același plan. În raport cu O , un centru de reducere din planul (P) al suporturilor (fig. 2.A.8.), toți vectorii (\vec{V}_i, D_i) sînt înlocuiți prin torsori formali \vec{V}_i cu originile în O și cupluri de momente:

$$\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{V}_i,$$

perpendicular pe planul (P) .

Sistemul este echivalent cu un torsor formal compus din vectorul rezultat:

$\vec{V} = \sum_{i=1}^n \vec{V}_i$, și cuplul de mo-

ment egal cu momentul rezul-

tant: $\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{V}_i$, perpen-

dicular pe planul (P) . Siste-

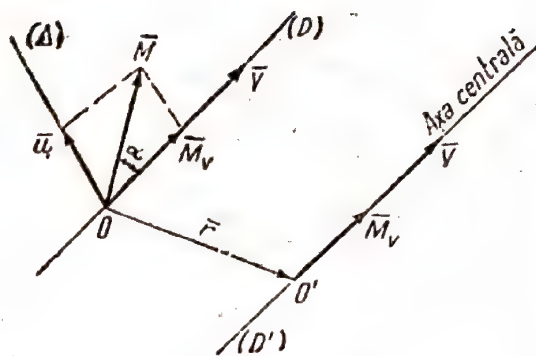


Fig. 2.A.7.

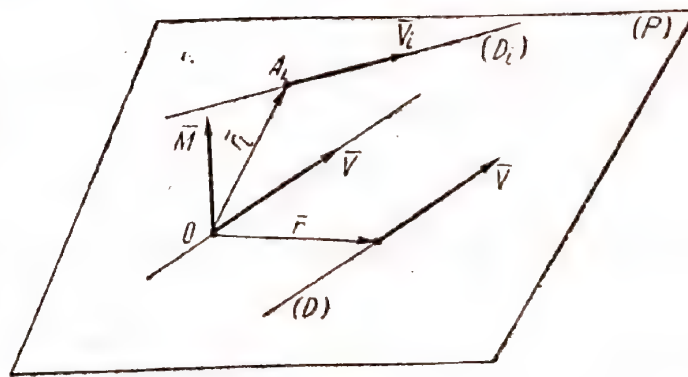


Fig. 2.A.8.

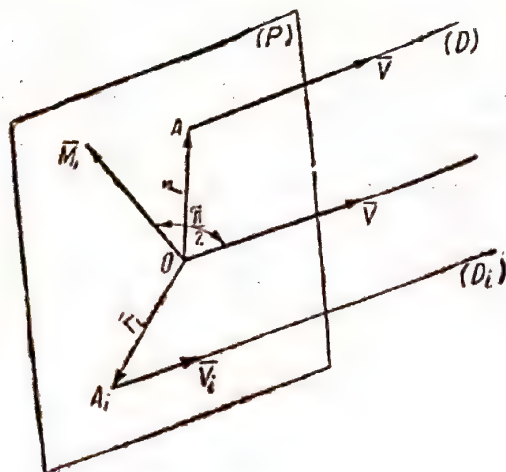


Fig. 2.A.9.

Vectori cu suporturile paralele în spațiu și sensuri arbitrare. Într-un plan (P) perpendicular pe direcția comună a vectorilor (\vec{V}_i, D_i) al sistemului se consideră un centru de reducere oarecare O (fig. 2.A.9). Toți vectorii pot fi înlocuiți prin torsori formali, cu vectorii \vec{V}_i în O și cuplurile de momente :

$$\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{V}_i,$$

situate în planul (P) .

Sistemul este echivalent cu un *torsor formal compus din vectorul rezultat* $\vec{V} = \sum_{i=1}^n \vec{V}_i$ și *cuplul de moment* egal cu *momentul rezultat* $\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{V}_i$, situat în planul (P) , adică perpendicular pe \vec{V} .

Deci, sistemul se reduce la un *vector rezultat unic* \vec{V} , al cărui suport se determină prin rezolvarea ecuației vectoriale deduse din teorema momentelor :

$$\vec{r} \times \vec{V} = \vec{M},$$

unde \vec{r} este necunoscută.

Discuția este identică cu cea de la cazul vectorilor coplanari.

2.A.16. Teoremă ajutătoare

Dacă momentele rezultante ale unui sistem de vectori alunecători cu suporturile dispuse oricum în spațiu în raport cu trei centre O_1, O_2 și O_3 care formează un triunghi veritabil, sînt toate nule, adică :

$$\vec{M}_1 = 0, \vec{M}_2 = 0, \vec{M}_3 = 0,$$

se demonstrează că sistemul de vectori alunecători este echivalent cu zero, adică :

$$\vec{V} = 0, \vec{M} = 0,$$

în raport cu orice centru de reducere.

mul se reduce la un *vector rezultat unic* \vec{V} al cărui suport se află rezolvînd ecuația vectorială avînd pe \vec{r} ca necunoscută :

$$\vec{r} \times \vec{V} = \vec{M},$$

obținută prin aplicarea teoremei momentelor.

Discuție

$\vec{V} \neq 0, \vec{M} \neq 0$, vector rezultat unic deoarece : $\vec{V} \cdot \vec{M} = 0$;

$\vec{V} \neq 0, \vec{M} \neq 0$, vector rezultat unic care trece prin centrul de reducere O ;

$\vec{V} = 0, \vec{M} \neq 0$, cuplu de moment \vec{M} ;

$\vec{V} = 0, \vec{M} = 0$, sistemul este echivalent cu zero.

2.A.17. Indicații generale pentru reducerea expresiilor analitice

În mecanica teoretică, un rol de o utilitate și de o importanță incontestabilă îl au calculele și expresiile analitice în raport cu diferite sisteme de referință. De obicei, se stabilesc aceste expresii pentru cazurile cele mai generale sub aspectul unor formule tocmai bune de memorat, iar pentru rezolvarea exercițiilor și problemelor particulare se fac înlocuirile necesare în aceste formule generale. De aici rezultă, în primul rând, o substituie a procesului de gândire prin operația quasiautomată a înlocuirilor în formule, urmată de micșorarea atenției și slăbirea controlului, ceea ce poate fi o sursă de erori.

De aceea, pentru a se evita memorarea formulelor generale, în această lucrare se recomandă următoarele:

Se va da o atenție deosebită pentru a înțelege temeinic și a reține definițiile, proprietățile, principiile, teoremele și metodele — care constituie bazele disciplinei — și fără de care, toate formulele și rezultatele memorate nu înseamnă, decît prea puțin, cunoaștere.

Se va aplica definiția, proprietatea, principiul, teorema sau metoda *direct* asupra *problemei particulare*, fără a se trece prin formula generală.

Dacă definiția, proprietatea, principiul sau teorema se prezintă sub forma unei relații vectoriale, se va traduce această relație scalar, folosindu-se expresiile complexe, cunoscute din geometria analitică, însă *direct pentru cazul aplicației și nu pentru cazul general*. În acest fel calculele sînt mai simple, cu mai puține erori, controlul fiind direct și mai ușor.

2.B. APLICAȚII LA REDUCEREA SISTEMELOR DE FORȚE

2.B.1. Să se determine rezultanta forțelor plane concurente în punctul O . Se dau $|\vec{F}_1| = 100$ daN; $|\vec{F}_2| = 141$ daN; $|\vec{F}_3| = 200$ daN; $|\vec{F}_4| = 100$ daN (fig. 2.B.1).

R e z o l v a r e. Proiecțiile forței rezultante sînt:

$$\begin{aligned} X = \Sigma X_i &= F_1 \cos 0^\circ + F_2 \cos 45^\circ - F_3 \cos 60^\circ - F_4 \cos 30^\circ = \\ &= 100 + 141 \frac{\sqrt{2}}{2} - 200 \frac{1}{2} - 100 \frac{\sqrt{3}}{2} = 13,4 \text{ daN}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y = \Sigma Y_i &= F_1 \sin 0^\circ + F_2 \sin 45^\circ + F_4 \sin 60^\circ - F_3 \sin 30^\circ = \\ &= 141 \frac{\sqrt{2}}{2} + 200 \frac{\sqrt{3}}{2} - 100 \frac{1}{2} = 223,2 \text{ daN}. \end{aligned}$$

Rezultanta este:

$$\vec{R} = X\vec{i} + Y\vec{j} = 13,4\vec{i} + 223,2\vec{j}.$$

Modulul rezultantei este

$$\begin{aligned} |\vec{R}| &= \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{13,4^2 + 223,2^2} = \\ &= 223,6 \text{ daN}. \end{aligned}$$

Unghiul format de suportul rezultantei \vec{R} cu axa Ox este dat de relația:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Y}{X} = \frac{223,2}{13,4} = 16,78, \text{ deci } \alpha = 86^\circ 35' 24''.$$

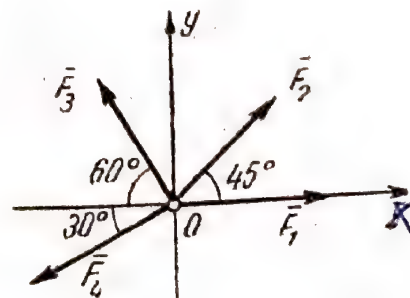


Fig. 2.B.1

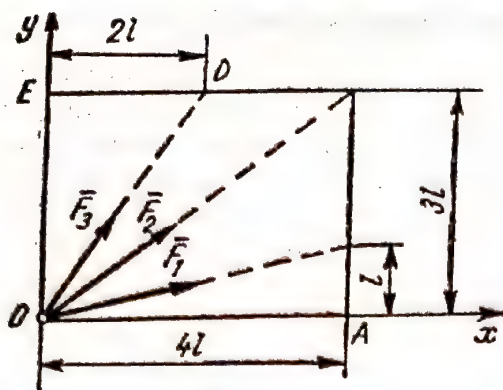


Fig. 2.B.2

2.B.2. Să se calculeze rezultanta forțelor $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ dirijate ca în figura 2.B.2. Se dau $|\vec{F}_1| = 10\sqrt{17}$ daN; $|\vec{F}_2| = 25$ daN; $|\vec{F}_3| = 8\sqrt{13}$ daN, precum și l .
Rezolvare. Se alege sistemul de axe din figură.

Cosinusurile directoare ale suporturilor forțelor $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ sînt:

$$\cos \alpha = \cos (\vec{F}_1, Ox) = \frac{4}{\sqrt{17}};$$

$$\cos \beta = \cos (\vec{F}_2, Ox) = \frac{4}{5};$$

$$\cos \gamma = \cos (\vec{F}_3, Ox) = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Rezultă: $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}; \sin \beta = \frac{3}{5}; \sin \gamma = \frac{3}{\sqrt{13}}.$

Proiecțiile forței rezultante sînt:

$$X = \Sigma X_i = 10\sqrt{17} \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + 25 \cdot \frac{4}{5} + 8\sqrt{13} \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} = 76 \text{ daN};$$

$$Y = \Sigma Y_i = 10\sqrt{17} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} + 25 \cdot \frac{3}{5} + 8\sqrt{13} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = 49 \text{ daN}.$$

Rezultanta este:

$$\vec{R} = 76\vec{i} + 49\vec{j}.$$

Modulul rezultantei este:

$$|\vec{R}| = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{76^2 + 49^2} = 90,427 \text{ daN}.$$

Unghiul dintre suportul forței rezultante și axa Ox este dat de $\text{tg } \alpha = \frac{Y}{X} = \frac{49}{76} = 0,645$, de unde $\alpha = 32^\circ 48' 40''$.

2.B.3. Să se determine rezultanta forțelor $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ aplicate în vârful O al cubului $OABCDEFG$, ca în figura 2.B.3. Se dau $|\vec{F}_1| = 10$ daN; $|\vec{F}_2| = 15\sqrt{2}$ daN; $|\vec{F}_3| = 20$ daN; $|\vec{F}_4| = 25\sqrt{3}$ daN.

Rezolvare. Se alege sistemul de axe din figură.

Cosinusurile directoare ale suportului forței \vec{F}_2 sînt: $\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0$, iar

ale forței \vec{F}_4 sînt: $\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Proiecțiile forței rezultante sînt:

$$X = \Sigma X_i = F_1 + F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + F_4 \frac{\sqrt{3}}{3} = 10 + 15 + 25 = 50 \text{ daN};$$

$$Y = \Sigma Y_i = F_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + F_3 + F_4 \frac{\sqrt{3}}{3} = 15 + 20 + 25 = 60 \text{ daN};$$

$$Z = \Sigma Z_i = F_4 \frac{\sqrt{3}}{3} = 25 \text{ daN}.$$

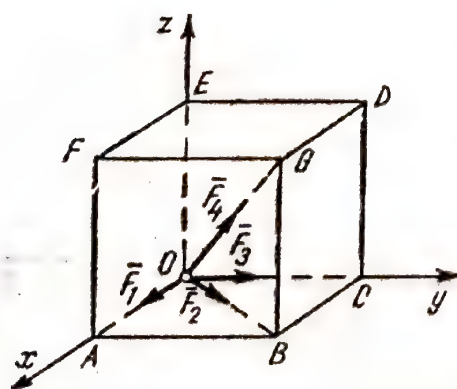


Fig. 2.B.3

Rezultanta este:

$$\vec{R} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} = 50\vec{i} + 60\vec{j} + 25\vec{k}.$$

Modulul rezultantei este:

$$|\vec{R}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{50^2 + 60^2 + 25^2} = 80,01 \text{ daN.}$$

TI 25
COMPUTER

Cosinusurile directoare ale suportului forței rezultante sînt:

$$\cos \alpha = \cos(\vec{R}, Ox) = \frac{X}{|\vec{R}|} = \frac{50}{80,01} = 0,625;$$

$$\cos \beta = \cos(\vec{R}, Oy) = \frac{Y}{|\vec{R}|} = \frac{60}{80,01} = 0,750;$$

$$\cos \gamma = \cos(\vec{R}, Oz) = \frac{Z}{|\vec{R}|} = \frac{25}{80,01} = 0,312.$$

2.B.4. Pentru a fixa o antenă de televiziune, ea se ancorează cu trei cabluri AB , AC , AD . Se dă înălțimea $OA = 2 \text{ m}$, iar punctele B , C și D sînt situate în vîrfurile unui triunghi echilateral a cărui latură este $l = 3 \text{ m}$. Tensiunea din fiecare cablu este de 20 daN (fig. 2.B.4). Să se calculeze rezultanta tensiunilor din cabluri.

Rezolvare. Se observă că $BB' = \frac{\sqrt{3}}{2}l$, iar $BO = \frac{2}{3}BB' = \frac{\sqrt{3}}{3}l = \sqrt{3} \text{ m}$.

În triunghiul AOB se obține $\tan \alpha = \frac{OB}{OA} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, de unde $\alpha = 30^\circ 53' 36''$.

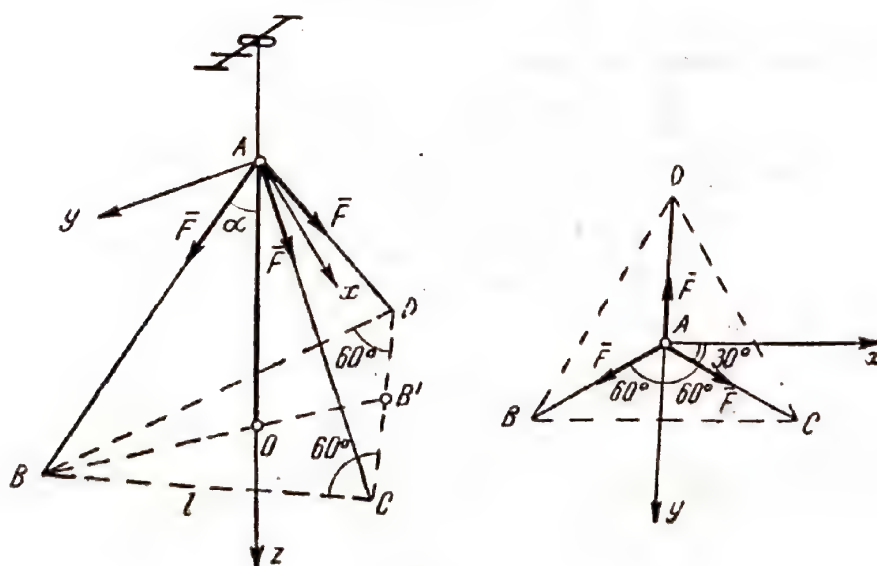


Fig. 2.B.4

Alegînd sistemul de axe din figură, se obțin proiecțiile forței rezultante (fig. 2.B.4, a și b):

$$X = \Sigma X_i = F \cos 30^\circ - F \cos 30^\circ = 0$$

$$Y = \Sigma Y_i = 2F \cos 60^\circ - F = 2F \frac{1}{2} - F = 0$$

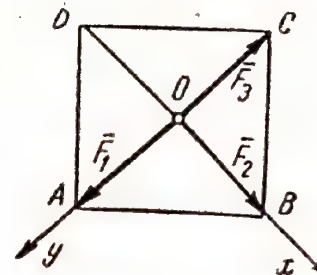
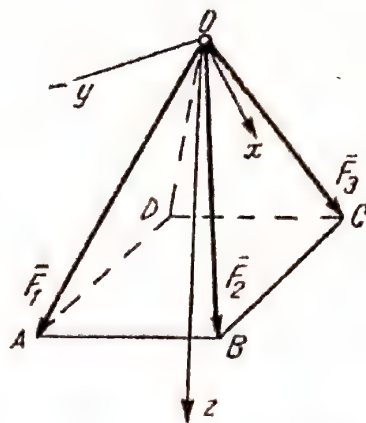


Fig. 2.B.5

$$Z = \Sigma Z_i = 3F \cos \alpha = 3F \cos 40^\circ 53' 36'' = 3 \cdot 20 \cdot 0,756 = 45,36 \text{ daN.}$$

Se observă că din motive de simetrie, cele trei forțe F au o rezultantă dirijată în lungul antenei AO .

2.B.5. Se dă piramida pătrată dreaptă $OABCD$, a cărei bază are latura $2a$ și înălțimea h . Pe muchiile OA , OB și OC acționează câte o forță egală în modul cu muchia respectivă (fig. 2.B.5). Se cere să se calculeze forța rezultantă și punctul unde suportul ei intersectează planul de bază.

Rezolvare. Se alege sistemul de axe din figura 2.B.5.

Proiecțiile pe axe ale forței rezultante sînt:

$$X = \Sigma X_i = 2a \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$Y = \Sigma Y_i = 0;$$

$$Z = \Sigma Z_i = 3h.$$

Rezultanta este:

$$\bar{R} = a\sqrt{2}\bar{i} + 3h\bar{k}.$$

Modulul forței rezultante este:

$$|\bar{R}| = \sqrt{X^2 + Z^2} = \sqrt{2a^2 + 9h^2}.$$

Ecuția suportului rezultantei se calculează cu formula

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

care în cazul de față conduce la

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{Z} \quad \text{sau} \quad \frac{x}{a\sqrt{2}} = \frac{y}{0} = \frac{z}{3h}.$$

Punctul unde rezultanta intersectează planul bazei se obține intersectînd suportul rezultantei cu planul $z = h$ și rezultă

$$x = \frac{\sqrt{2}}{3} a; \quad y = 0; \quad z = h.$$

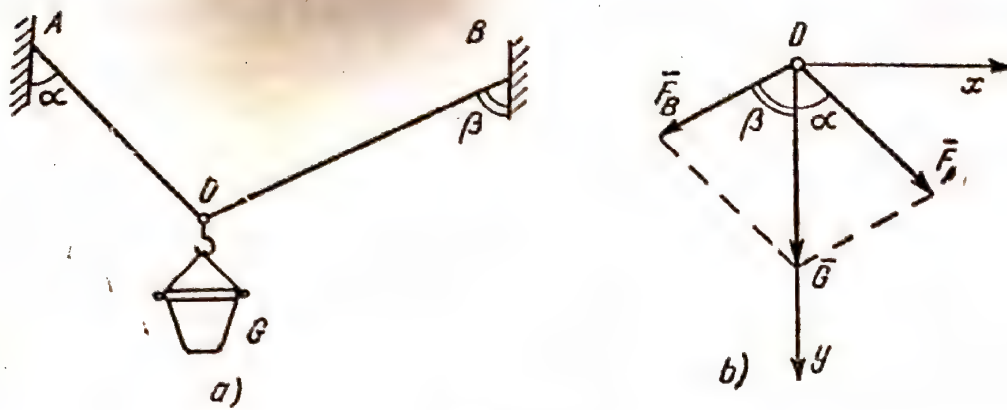


Fig. 2.B.6

2.B.6. O oală de turnare de greutate G este suspendată între doi suporti A și B prin intermediul cablurilor OA și OB . Cunoșcând unghiurile α și β , se cere să se calculeze tensiunile din cele două cabluri (fig. 2.B.6, a).

Rezolvare. În figura 2.B.6, b este prezentată descompunerea forței \vec{G} și se poate scrie:

$$\vec{G} = \vec{F}_A + \vec{F}_B.$$

Proiectând pe sistemul de axe ales relația vectorială precedentă, se obține:

$$(\text{pr. } Ox) \quad 0 = F_A \sin \alpha - F_B \sin \beta$$

$$(\text{pr. } Oy) \quad G = F_A \cos \alpha + F_B \cos \beta.$$

Rezolvând acest sistem se deduce:

$$F_A = \frac{G \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}; \quad F_B = \frac{G \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

2.B.7. Un felinar de greutate G este prins de un perete prin intermediul barei OA și a cablului OB . Cunoșcând valoarea unghiului α , se cere să se calculeze forțele din bară și cablu (fig. 2.B.7, a).

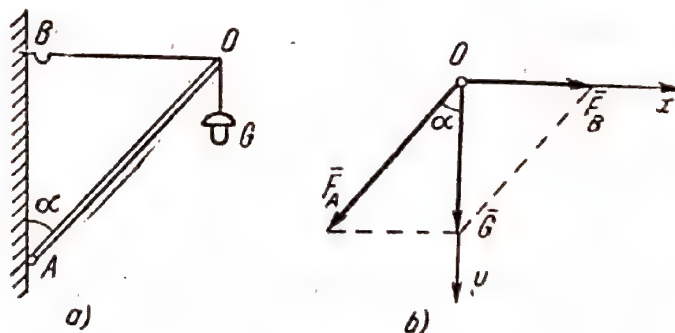


Fig. 2.B.7

Rezolvare. Descompunerea grafică a forței \vec{G} este prezentată în figura 2.B.7, b și se poate scrie:

$$\vec{G} = \vec{F}_A + \vec{F}_B.$$

Proiectînd această relație vectorială pe sistemul de axe ales, se obține :

$$(\text{pr. } Ox); \quad O = F_B - F_A \sin \alpha;$$

$$(\text{pr. } Oy); \quad G = F_A \cos \alpha.$$

Rezolvînd sistemul, rezultă :

$$F_A = \frac{G}{\cos \alpha}; \quad F_B = F_A \sin \alpha = G \operatorname{tg} \alpha.$$

Se observă că aceste relații se pot deduce direct din figura 2.B.7, b.

2.B.8. O greutate G este susținută de un sistem de trei bare în spațiu OA , OB și OC , unde $OB = OC$ (fig. 2.B.8, a). Cunoșcînd unghiurile α și β , se cere să se calculeze forțele din cele trei bare.

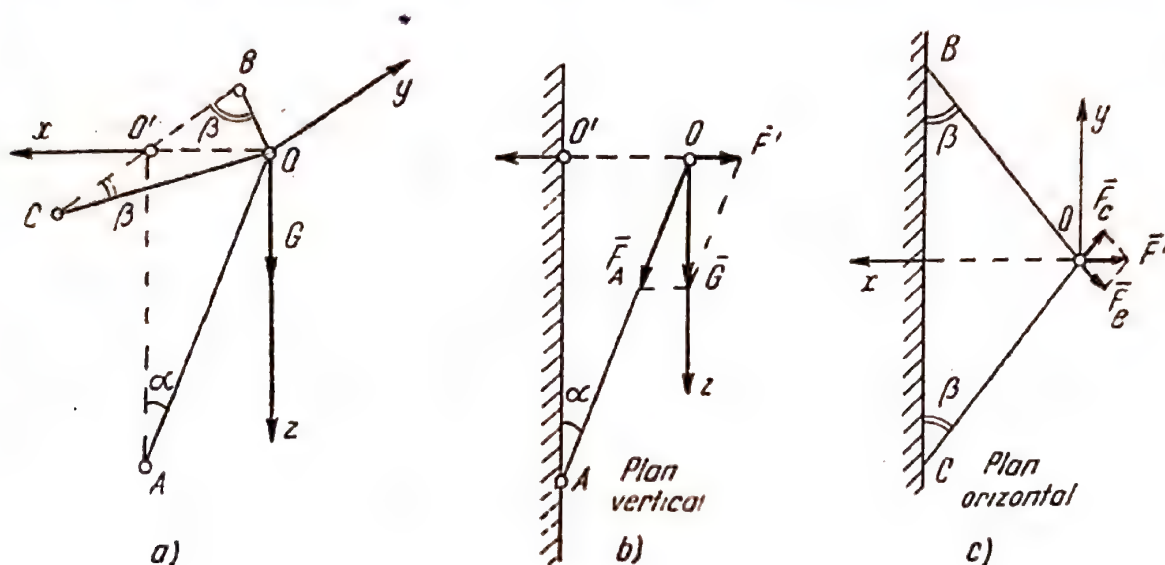


Fig. 2.B.8

Rezolvare. Se alege sistemul de axe din figura 2.B.8, a și în continuare se efectuează descompunerea forței \vec{G} în două faze, în plan vertical și apoi în plan orizontal.

În plan vertical (fig. 2.B.8, b) se scrie :

$$\vec{G} = \vec{F}_A + \vec{F}'.$$

Proiectînd pe axe această relație vectorială, se obține :

$$(\text{pr. } Oz); \quad G = F_A \cos \alpha;$$

$$(\text{pr. } Ox); \quad O = F_A \sin \alpha - F'.$$

În plan orizontal (fig. 2.B.8, c) se scrie :

$$\vec{F}' = \vec{F}_B + \vec{F}_C.$$

Proiectînd pe axe această relație vectorială, rezultă :

$$(\text{pr. } Ox); \quad -F' = -F_B \sin \beta - F_C \sin \beta;$$

$$(\text{pr. } Oy); \quad O = F_C \cos \beta - F_B \cos \beta.$$

Soluționînd sistemul de ecuații, se obțin :

$$F_A = \frac{G}{\cos \alpha}; \quad F' = G \operatorname{tg} \alpha; \quad F_B = F_C = \frac{G \operatorname{tg} \alpha}{2 \sin \beta}.$$

2.B.9. Să se reducă în O sistemul de forțe plane din figura 2.B.9.

Rezolvare. Concentrând rezultatele în tabelul 2.1 apar proiecțiile forțelor și momentele lor față de punctul O .

Torsorul de reducere în O este:

$$\bar{R} = \frac{3F}{2} \bar{i} + \left(3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) F \bar{j}; \quad \bar{M}_0 = RF\bar{k}.$$

Deoarece $\bar{R} \neq 0$ și $\bar{M}_0 \neq 0$, sistemul este echivalent cu o forță unică aplicată pe axa centrală (suportul rezultantei), a cărei ecuație este:

$$xY - yX = M_0,$$

sau:

$$\left(3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) x - \frac{3}{2} y = R.$$

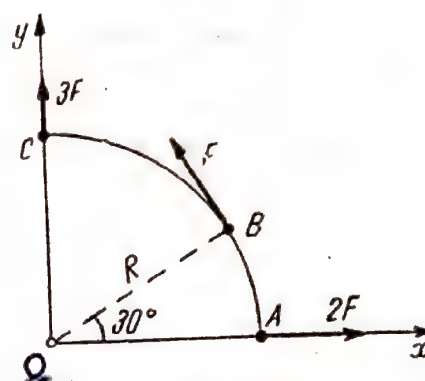


Fig. 2.B.9

Tabelul 2.1

Forța	X_i	Y_i	M_{i0}
F_A	$2F$	0	0
F_B	$-\frac{F}{2}$	$\frac{\sqrt{3}F}{2}$	$R \cdot F$
F_C	0	$3F$	0
Σ	$\frac{3F}{2}$	$\left(3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) F$	$R \cdot F$

2.B.10. O placă rigidă dreptunghiulară $OABC$ este încărcată cu un sistem de forțe coplanare, așa cum se arată în figura 2.B.10. Se cere să se reducă aceste forțe în O .

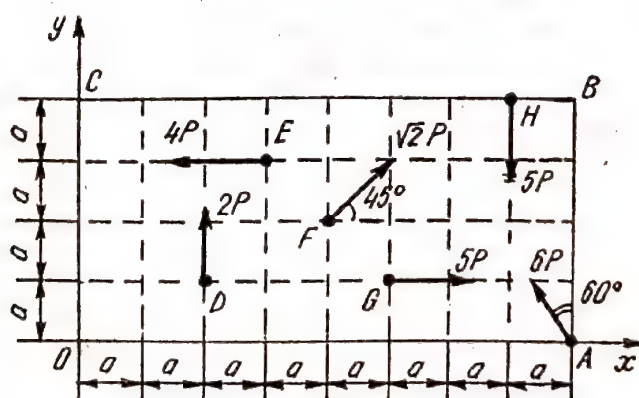


Fig. 2.B.10

Rezolvare. Calculul proiecțiilor forțelor și a momentului acestora față de O sînt prezentate în tabelul 2.2, unde sînt determinate și proiecțiile forței rezultante, precum și momentul rezultant. Se menționează că pentru calculul momentelor forțelor F_A și F_F s-a utilizat teorema momentelor.

Tabelul 2.2

Forța	X_i	Y_i	M_{i0}
F_A	$-3\sqrt{3}P$	$3P$	$8a \cdot 3P = 24aP$
F_D	0	$2P$	$4aP$
F_E	$-4P$	0	$12aP$
F_F	P	P	$4aP - 2aP = 2aP$
F_G	$5P$	0	$-5aP$
F_H	0	$-5P$	$-35aP$
Σ	$(2 - 3\sqrt{3})P$	P	$2aP$

Torsorul de reducere în O , este:

$$\bar{R} = (2 - 3\sqrt{3})P\bar{i} + P\bar{j}; \quad \bar{M}_0 = 2aP\bar{k}.$$

Deoarece $\bar{R} \neq 0$ și $\bar{M}_0 \neq 0$, sistemul este echivalent cu o forță \bar{R} aplicată pe axa centrală (suportul rezultantei) a cărei ecuație este:

$$xY - yX = M_0$$

sau

$$Px + P(3\sqrt{3} - 2)y = 2aP$$

sau

$$x + (3\sqrt{3} - 2)y = 2a.$$

2.B.11. Un stîlp AB utilizat pentru susținerea conductoarelor electrice, care are greutatea Q și înălțimea h este ancorat în fundația $CDC'D'$ de dimensiuni a și $2b$ (fig. 2.B.11). Stîlpul este acționat de forța F înclinată cu unghiul α . Se cere să se calculeze greutatea minimă G a fundației pentru ca aceasta să nu se răstoarne în jurul lui D .

Rezolvare. Se efectuează reducerea față de punctul O a forțelor coplanare, \bar{Q} , \bar{G} și \bar{F} .

$$X = \Sigma X_i = F \sin \alpha;$$

$$Y = \Sigma Y_i = -G - Q - F \cos \alpha;$$

$$M_0 = -(h + a)F \sin \alpha;$$

$$\bar{R} = F \sin \alpha \bar{i} - (G + Q + F \cos \alpha) \bar{j}.$$

Deoarece $\bar{R} \neq 0$ și $\bar{M}_0 \neq 0$ sistemul este echivalent cu o forță \bar{R} aplicată pe axa centrală, a cărei ecuație este:

$$xY - yX = M_0,$$

sau:

$$-(G + Q + F \cos \alpha)x - F \sin \alpha y = -(h + a)F \sin \alpha,$$

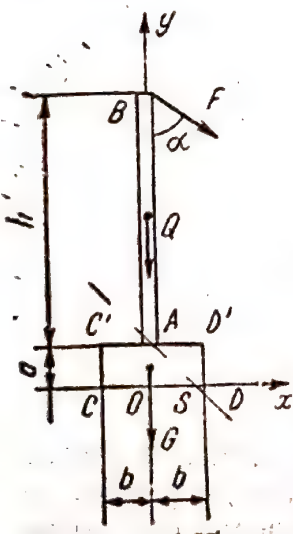


Fig. 2.B.11

sau:

$$(G + Q + P \cos \alpha)x + F \sin \alpha y = (h + a)F \sin \alpha.$$

Axa centrală intersectează baza CD a fundației într-un punct S de coordonate:

$$x_s = \frac{(h + a)F \sin \alpha}{G + Q + F \cos \alpha}; \quad y_s = 0.$$

Pentru ca să nu se răstoarne în jurul punctului D , este necesar ca $x_s \leq b$, de unde se deduce:

$$G \geq \left(\frac{h + a}{b} \sin \alpha - \cos \alpha \right) F - Q,$$

cu condiția $\left(\frac{h + a}{b} \sin \alpha - \cos \alpha \right) F - Q > 0$.

Avind determinată greutatea fundației, în continuare se calculează cea de a treia dimensiune a ei.

2.B.12. Se dă placa rigidă dreptunghiulară $OAO'A'$ asupra căreia acționează sistemul de forțe coplanare paralele $\vec{F}_O, \vec{F}_B, \vec{F}_D$ prezentate în figura 2.B.12. Se cere să se calculeze rezultanta acestor forțe și coordonatele centrului forțelor paralele.

Rezolvare. Calculele necesare determinării forței rezultante și a coordonatelor centrului forțelor paralele sînt prezentate în tabelul 2.3.

Forța rezultantă este $R = \Sigma F_i = 4F$ (are sens ascendent).

Coordonatele centrului C al forțelor paralele sînt:

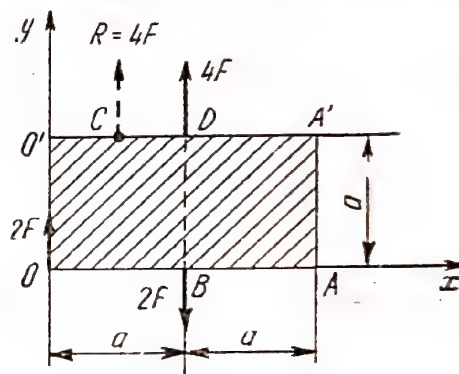


Fig. 2.B.12

$$\xi = \frac{\Sigma F_i x_i}{\Sigma F_i} = \frac{2aF}{4F} = \frac{1}{2}a; \quad \eta = \frac{\Sigma F_i y_i}{\Sigma F_i} = \frac{4aF}{4F} = a.$$

În figură s-au reprezentat atât centrul C al forțelor paralele, cât și forța rezultantă.

Tabelul 2.3

Forța	F_i	x_i	y_i	$F_i \cdot x_i$	$F_i \cdot y_i$
F_O	$2F$	0	0	0	0
F_B	$-2F$	a	0	$-2aF$	0
F_D	$4F$	a	a	$4aF$	$4aF$
Σ	$4F$	$-$	$-$	$2aF$	$4aF$

2.B.13. O piramidă pătrată dreaptă $SABDE$ are latura bazei $l = 2a$ și înălțimea $h = 3a$. Piramida este acționată de forțe verticale conform figurii 2.B.13. Se cere să se calculeze forța rezultantă și centrul forțelor paralele.

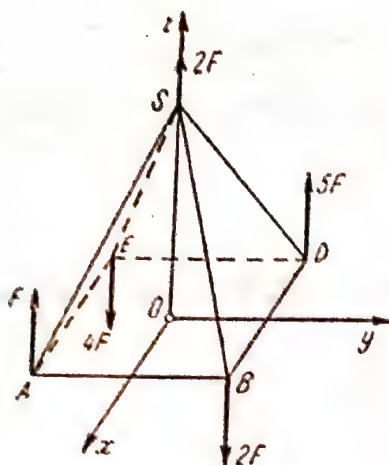


Fig. 2.B.13

Rezolvare. Calculele sînt concentrate în tabelul 2.4 Forța rezultantă este $R = \Sigma F_i = 2F$, deci are sens ascendent. Coordonatele centrului forțelor paralele sînt:

$$\xi = \frac{\Sigma F_i x_i}{\Sigma F_i} = \frac{-2aF}{2F} = -a;$$

$$\eta = \frac{\Sigma F_i y_i}{F_i} = \frac{6aF}{2F} = 3a;$$

$$\zeta = \frac{\Sigma F_i z_i}{\Sigma F_i} = \frac{6aF}{2F} = 3a.$$

Tabelul 2.4

Forța	F_i	x_i	y_i	z_i	$F_i \cdot x_i$	$F_i \cdot y_i$	$F_i \cdot z_i$
F_A	F	a	$-a$	0	aF	$-aF$	0
F_B	$-2F$	a	a	0	$-2aF$	$-2aF$	0
F_D	$5F$	$-a$	a	0	$-5aF$	$5aF$	0
F_E	$-4F$	$-a$	$-a$	0	$4aF$	$4aF$	0
F_S	$2F$	0	0	$3a$	0	0	$6aF$
Σ	$2F$	$-$	$-$	$-$	$-2aF$	$6aF$	$6aF$

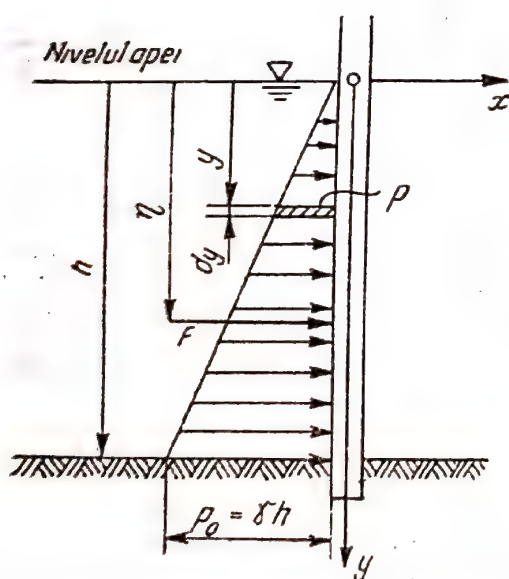


Fig. 2.B.14

2.B.14. O stavilă plană oprește cursul unei ape care are adîncimea h și lățimea egală cu 1 m. Știind că presiunea apei asupra stavilei se exercită sub forma unor forțe paralele, care variază după legea $p = \gamma y$, se cere să se calculeze forța rezultantă \bar{F} și punctul ei de aplicație pe stavilă (fig. 2.B.14).

Rezolvare. Presiunea într-o secțiune oarecare, plasată la adîncimea y , este $p = \gamma y$, iar la adîncimea maximă, presiunea este maximă $p_0 = \gamma h$.

Forța rezultantă este:

$$F = \int_0^h p dy = \int_0^h \gamma y dy = \frac{1}{2} \gamma h^2.$$

Forța rezultantă este plasată la adîncimea η calculată ca centru al forțelor paralele:

$$\eta = \frac{\int_0^h p y dy}{\int_0^h p dy} = \frac{\int_0^h \gamma y^2 dy}{\int_0^h \gamma y dy} = \frac{\frac{\gamma h^3}{3}}{\frac{\gamma h^2}{2}} = \frac{2}{3} h.$$

2.B.15. Asupra cubului $OABCDEFG$, cu latura l , acționează forțele: $|\vec{F}_O| = 2P$; $|\vec{F}_A| = P$; $|\vec{F}_B| = 3P$; $|\vec{F}_C| = P$; $|\vec{F}_D| = 3P$; $|\vec{F}_E| = 4P$; $|\vec{F}_F| = 2P$; $|\vec{F}_G| = 4G$ (fig. 2.B.15, a). Se cere să se reducă acest sistem de forțe în Q .

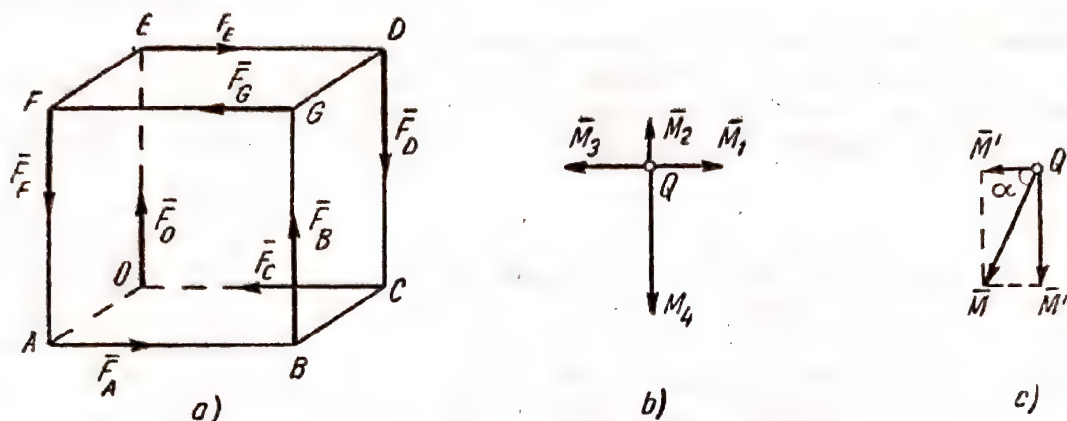


Fig. 2.B.15

Rezolvare. Se observă că forțele date formează cupluri după cum urmează: $\vec{M}_1(\vec{F}_O, \vec{F}_F)$; $\vec{M}_2(\vec{F}_A, \vec{F}_C)$; $\vec{M}_3(\vec{F}_B, \vec{F}_D)$; $\vec{M}_4(\vec{F}_E, \vec{F}_G)$. Modulele acestor cupluri sînt: $|\vec{M}_1| = 2lP$; $|\vec{M}_2| = lP$; $|\vec{M}_3| = 3lP$; $|\vec{M}_4| = 4lP$.

Deoarece momentele cuplurilor sînt vectori liberi, reducerea se poate efectua în orice punct Q , arbitrar ales, obținîndu-se același rezultat. Aceste momente se reprezintă sub forma unor vectori perpendiculari pe planurile definite de suporturile forțelor care formează cuplul (fig. 2.B.15, b).

Cuplurile colineare se însumează algebric, rezultînd:

$$\begin{aligned} M' &= M_3 - M_1 = 3lP - 2lP = lP \\ M'' &= M_4 - M_2 = 4lP - lP = 3lP. \end{aligned}$$

În final se însumează vectorial momentele \vec{M}' și \vec{M}'' (fig. 2.B.15, c)

$$\vec{M} = \vec{M}' + \vec{M}''$$

$$\text{de unde } |\vec{M}| = \sqrt{M'^2 + M''^2} = \sqrt{l^2P^2 + 9l^2P^2} = \sqrt{10}lP;$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{|\vec{M}''|}{|\vec{M}'|} = 3 \text{ și } \alpha = 71^\circ 33' 54''.$$

2.B.16. Se dă cubul $OABCDEFG$ cu latură l , acționat de forțele $|\vec{F}_O| = 3\sqrt{3}P$; $|\vec{F}_C| = 2\sqrt{2}P$; $|\vec{F}_G| = 5P$ (fig. 2.B.16). Se cere să se calculeze: torsorul de reducere în O , torsorul de reducere în A , cu ce este echivalent sistemul de forțe dat și axa centrală.

Rezolvare. Se alege sistemul de axe din figură.

Parametrii directori ai suportului forței \vec{F}_O sînt $1/\sqrt{3}$; $1/\sqrt{3}$; $1/\sqrt{3}$ și sînt utilizați la calculul proiecțiilor forței F_O .

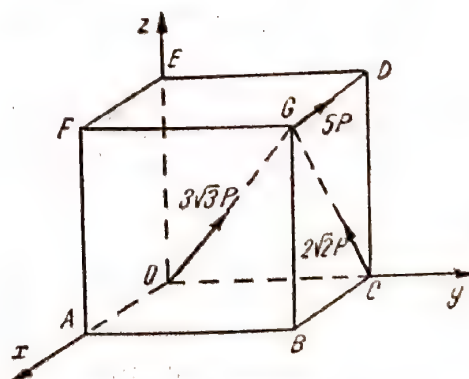


Fig. 2.B.16

Momentele forțelor se calculează conform definiției,

$$\bar{M}_0(\bar{F}_c) = \overline{OC} \times \bar{F}_c = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & l & 0 \\ 2P & 0 & 2P \end{vmatrix} = 2lP\bar{i} - 2lP\bar{k},$$

obținându-se astfel proiecțiile momentelor pe axe.

Pentru determinarea tursorului de reducere în O , forța rezultantă \bar{R} și momentul resultant \bar{M}_0 se calculează cu ajutorul componentelor, rezultatele fiind concentrate în tabelul 2.5.

Tabelul 2.5

Forța	X_i	Y_i	Z_i	M_{ix}	M_{iy}	M_{iz}
F_o	$3P$	$3P$	$3P$	0	0	0
F_c	$2P$	0	$2P$	$2lP$	0	$-2lP$
F_g	$-5P$	0	0	0	$-5lP$	$5lP$
Σ	0	$3P$	$5P$	$2lP$	$-5lP$	$3lP$

Torsorul de reducere în O este format din:

$$\bar{R} = 3P\bar{j} + 5P\bar{k}; \bar{M}_0 = 2lP\bar{i} - 5lP\bar{j} + 3lP\bar{k}.$$

Trinomul invariant este:

$$\bar{R}\bar{M}_0 = XM_x + YM_y + ZM_z = 0.$$

Torsorul de reducere în A este format din

$$\bar{R} = 3P\bar{j} + 5P\bar{k}$$

$$\bar{M}_A = \bar{M}_0 - \overline{OA} \times \bar{R} = 2lP\bar{i} - 5lP\bar{j} + 3lP\bar{k} - \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ l & 0 & 0 \\ 0 & 3P & 5P \end{vmatrix} = 2lP\bar{i}.$$

Trinomul invariant, în acest caz, este: $\bar{R}\bar{M}_A = 0$ și se verifică: $\bar{R}\bar{M}_0 = \bar{R}\bar{M}_A = 0$.

Deoarece $\bar{R} \neq 0$; $\bar{M}_0 \neq 0$ și $\bar{R}\bar{M}_0 = 0$, sistemul de forțe dat este echivalent cu o forță $\bar{R} = 3P\bar{j} + 5P\bar{k}$, aplicată pe axa centrală a cărei ecuație este:

$$\frac{M_{ox} - (yZ - zY)}{X} = \frac{M_{oy} - (zX - xZ)}{Y} = \frac{M_{oz} - (xY - yX)}{Z},$$

care în cazul de față se scrie:

$$\frac{2lP - (5Py - 3Pz)}{0} = \frac{-5lP - (-5Px)}{3P} = \frac{3lP - (3Px)}{5P},$$

de unde rezultă:

$$\left. \begin{aligned} 5y - 3z &= 2l \\ x &= l. \end{aligned} \right\}$$

Se observă că axa centrală trece prin $G(l, l, l)$, ceea ce se putea anticipa deoarece suporturile forțelor date trec prin G .

CENTRE DE GREUTATE (DE MASĂ). VECTORI LEGAȚI DE PUNCT

3.A. PREZENTARE TEORETICĂ

3.A.1. Gravitarea

Gravitarea, una din multiplele însușiri ale materiei, asociată cu procesul de *interacțiune* a corpurilor, se manifestă prin *atracția reciprocă* a acestora. Admițând că corpurile sînt asimilate cu puncte materiale, adică cu centrele lor de masă în care se presupun concentrate masele lor, *forța de atracție gravitațională*, în cazul a două corpuri (fig. 3.A.1), este dată de legea lui Newton :

$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = K \frac{m_1 m_2}{d^2},$$

unde: m_1, m_2 sînt masele celor două corpuri, iar d , distanța dintre centrele lor de masă.

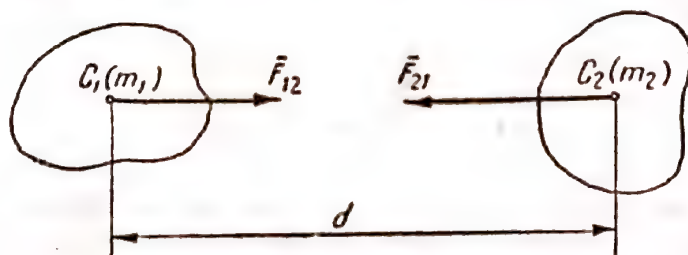


Fig. 3.A.1

Pentru un corp de masă m situat la suprafața Pământului, expresia forței de atracție newtoniană este :

$$|\vec{F}| = K \frac{mM}{R^2},$$

unde M este masa Pământului iar R , raza lui.

3.A.2. Greutatea

Greutatea aceluiași corp de masă m , la suprafața Pământului, este :

$$\vec{G} = \vec{F} + \vec{C},$$

unde \vec{C} este forța denumită centrifugă, efect al mișcării neinerțiale a Pământului. Această forță variază cu latitudinea locului în care se află corpul.

Întrucît m este numeric egal cu masa inertă, pe baza principiului acțiunii (II) se mai poate considera și ecuația :

$$\vec{G} - m\vec{g} = 0,$$

unde \bar{g} este *accelerația greutății*, variabilă în funcție de poziția corpului (maximă la pol și minimă la ecuator).

Se consideră că greutatea este îndreptată spre centrul Pământului. Pentru corpurile relativ mici în comparație cu Pământul (case, avioane, locomotive etc.), greutatea particulelor acestor corpuri sînt, *practic*, paralele. În aceste condiții, problema greutății unui corp la suprafața Pământului se reduce la determinarea rezultantei unui sistem de forțe paralele (mărime și suport).

Toate forțele punctelor de mase m_i și greutatea \bar{G}_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) fiind în același sens, prin însumare se obține:

$$\bar{G} = \sum_{i=1}^n \bar{G}_i = \sum_{i=1}^n m_i \bar{g} = m \bar{g} \neq 0,$$

$m = \sum_{i=1}^n m_i$, fiind masa întregului corp, sistem discret de puncte materiale.

3.A.3. Ecuația suportului

Ecuația suportului se obține aplicînd teorema lui Varignon în raport cu un reper cu originea în O (fig. 3.A.2). Se notează cu \bar{r} (necunoscut) vectorul de poziție al unui punct de pe suportul rezultantei, cu \bar{r}_i vectorii de poziție ai punctelor materiale de mase m_i și de greutatea $m_i \bar{g}$.

Rezultatul este:

$$\bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \bar{r}_i}{m} + \lambda \bar{g},$$

unde λ este un parametru care poate primi orice valoare reală. Această ecuație reprezintă mulțimea punctelor prin care trece rezultanta, deci chiar suportul rezultantei.

3.A.4. Centrul de masă

Dacă se schimbă poziția corpului, rezultanta își menține direcția și sensul spre centrul atractiv (centrul Pământului), dar suportul ei este altfel situat față de corp; oricum ar fi așezat corpul, suportul rezultantei

trece printr-un același punct C al corpului, denumit *centru de greutate* (fig. 3.A.2).

Punctul $C(\bar{r}_c)$:

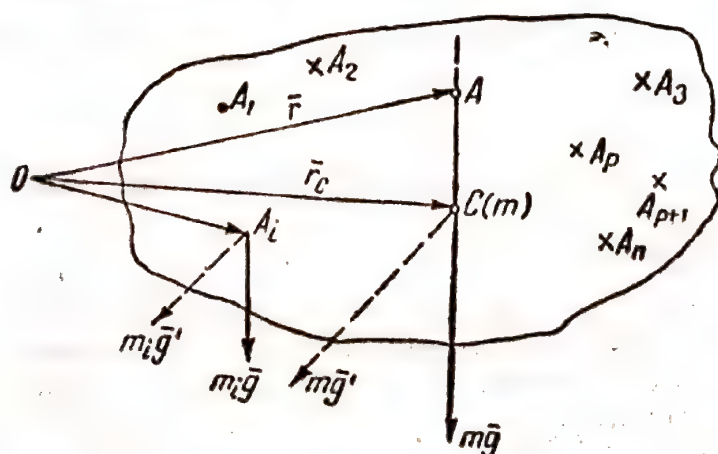


Fig. 3.A.2

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \bar{r}_i}{m} \quad (3.1)$$

nu depinde de direcția comună a forțelor atractive (greutăți), ci numai de configurația geometrică a punc-

telor A , față de reperul O și de distribuția maselor punctelor materiale ale sistemului.

Acesta este *centrul de masă* al sistemului de puncte materiale.

3.A.5. Proprietățile centrului de masă

Poziția centrului de masă nu depinde de sistemul de referință.

Centrul de masă coincide cu centrul de greutate, însă *dacă corpul se află în afara sferei de gravitație a oricărui sistem material, nu se poate vorbi de centru de greutate*; în schimb, *există în orice condiții centrul de masă al corpului*.

Centrul de masă al unui sistem nedeformabil de puncte materiale este un punct neschimbat al sistemului. Centrul de masă al unui sistem deformabil există în orice moment, dar poziția lui depinde de așezarea și de distribuția maselor punctelor materiale la momentul considerat.

Dacă masele tuturor punctelor materiale sînt amplificate (înmulțite sau împărțite) cu aceeași mărime scalară, centrul de masă al sistemului nu se schimbă.

În fine *centrul de masă nu este un punct material, ci un punct geometric*.

3.A.6. Momentele statice

Se știe că masa unui sistem material poate fi oricum distribuită în acest sistem. Mecanica teoretică introduce două mărimi care dau indicații utile cu privire la modul în care este distribuită, în raport cu un reper oarecare, masa unui sistem. Aceste mărimi sînt *momentul static* și *momentul de inerție*.

Ele sînt folosite foarte des în disciplinele de cultură generală tehnică și în cele de specialitate care se bazează pe „Mecanica teoretică”.

Reperele față de care se exprimă momentele statice sînt elementele unui triedru, de obicei triortogonal: *originea, axele, planele*. Astfel, în raport cu originea O , momentul static al punctului material A , de masă m , avînd vectorul de poziție \vec{r} , are expresia $m\vec{r}$, iar centrul de masă C , în care se presupune concentrată masa m a sistemului, avînd vectorul de poziție \vec{r}_c în raport cu originea reperului, are expresia momentului static: $m\vec{r}_c$.

3.A.7. Teorema momentelor statice

De obicei, pentru determinarea centrului de masă al unui sistem material oarecare se folosește formula (3.1) și toate formulele derivate din aceasta. În această lucrare se propune folosirea nu a formulelor, ci a unei singure teoreme care în esență este exprimarea ecuației:

$$m\vec{r}_c = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \quad (3.2)$$

dedusă din (3.1).

Momentul static al centrului de masă, în care se presupune concentrată toată masa sistemului în raport cu un reper, este egal cu momentul static al sistemului în raport cu același reper.

Observații

Enunțul teoremei s-a dat sub o formă mai generală decît permitea traducerea ecuației (3.2), în care reperul considerat este originea O a siste-

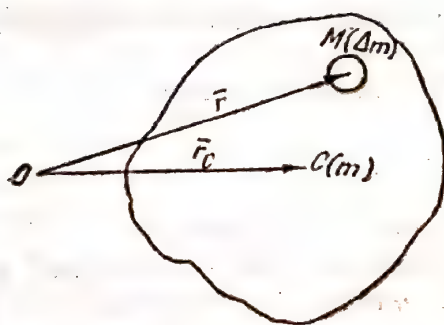


Fig. 3.A.3

mului de referință. Această extindere va fi justificată prin observațiile care urmează.

Prin definiție, suma momentelor statice a părților componente ale sistemului este momentul static al sistemului.

Deși teorema momentelor statice a fost stabilită pentru un sistem de puncte materiale, ea se aplică și unui continuu material, pe o bază *axiomatică* la trecerea de la discret la continuu. Astfel, dacă în locul relației (3.2) se scrie :

$$\bar{r}_s m = \sum \bar{r} \Delta m, \quad (3.3)$$

în care: \bar{r} este vectorul de poziție al punctului curent M al domeniului continuu (fig. 3.A.3), Δm masa elementară din jurul¹ punctului M , \bar{r}_s vectorul de poziție al centrului de masă în care se presupune concentrată întreaga masă m a sistemului și apoi se trece la limită, se ajunge la relația :

$$\bar{r}_s m = \int_{(D)} \bar{r} dm, \quad (3.4)$$

în care integrala este triplă, dublă sau simplă, după cum domeniul (D) are trei, două sau o singură dimensiune. Important este de observat faptul că ecuația (3.4) se poate reține tot cu ajutorul teoremei momentelor statice enunțată mai înainte.

Ecuatiile (3.2) și (3.4) se exprimă analitic prin cîte trei ecuații scalare în raport cu triedrul $Oxyz$:

$$mx_s = \sum_{i=1}^n m_i x_i; \quad my_s = \sum_{i=1}^n m_i y_i; \quad mz_s = \sum_{i=1}^n m_i z_i, \quad (3.5)$$

respectiv :

$$mx_s = \int_{(D)} x dm; \quad my_s = \int_{(D)} y dm; \quad mz_s = \int_{(D)} z dm. \quad (3.6)$$

Stînga ecuațiilor (3.5) și (3.6) exprimă momentele statice ale centrului de masă C în care se presupune concentrată întreaga masă m a sistemului (discret, respectiv continuu), în raport cu planele sistemului de referință : Oyz , Ozx , Oxy .

Dreapta ecuațiilor exprimă momentele statice ale sistemului (discret, respectiv continuu) în raport cu aceleași plane. După cum se vede aici, reperul este *un plan* al triedrului $Oxyz$, iar teorema momentelor statice se aplică în raport cu un asemenea reper pentru toate sistemele materiale din spațiu.

În cazul unui sistem material situat într-un plan, sistemul de referință este format numai de axele Ox și Oy , iar din (3.5) și (3.6) se iau numai primele două ecuații. În acestea, membrul întîi mx_s este momentul static al centrului de masă, în care se presupune concentrată întreaga masă a sistemului în raport cu axa Oy , iar membrul doi este momentul static

¹ Dintr-un volum elementar, o arie elementară sau un arc de curbă elementar, după cum domeniul are 3, 2 sau o dimensiune.

al sistemului (discret, respectiv continuu) în raport cu aceeași axă. La fel, m_y , este momentul static al centrului de masă în raport cu axa Ox , iar membrul doi este momentul static al sistemului în raport cu Ox .

Se precizează, pentru a se evita orice confuzie, că x, y, z sînt coordonate care pot fi pozitive sau negative — și nu distanțe pînă la axe sau planele de referință, distanțele fiind considerate întotdeauna pozitive. De aceea nu se poate vorbi de momente statice ale unor sisteme spațiale în raport cu axe Ox, Oy, Oz .

În cazul unor sisteme continue se poate înlocui în (3.6) dm prin ρdV sau ρdA sau ρds , unde ρ este densitatea volumică sau densitatea superficială sau densitatea liniară, după cum domeniul are trei, două sau o dimensiune. În general, ρ este funcție de poziția punctului curent M , adică de $\vec{r}(x, y, z)$.

În cazul special cînd domeniul continuu este și omogen, adică densitatea nu depinde de poziția punctului, ρ dispăre din ecuații, care devin:

$$V\vec{r}_c = \int_{(V)} \vec{r} dV; \quad A\vec{r}_c = \int_{(A)} \vec{r} dA; \quad l\vec{r}_c = \int_{(l)} \vec{r} ds \quad (3.7)$$

respectiv:

$$Vx_c = \int_{(V)} x dV; \quad Vy_c = \int_{(V)} y dV; \quad Vz_c = \int_{(V)} z dV \quad (3.8,a)$$

$$Ax_c = \int_{(A)} x dA; \quad Ay_c = \int_{(A)} y dA; \quad Az_c = \int_{(A)} z dA \quad (3.8,b)$$

$$lx_c = \int_{(l)} x ds; \quad ly_c = \int_{(l)} y ds; \quad lz_c = \int_{(l)} z ds. \quad (3.8,c)$$

În (3.8, a) integralele sînt triple și extinse la întreg domeniul (D) al continuului tridimensional de volum V .

În ecuațiile (3.8, b) integralele sînt duble, fiind extinse la domeniul (D) al suprafeței de arie A , iar în (3.8, c) integralele sînt simple și extinse la arcul de curbă de lungime totală l .

În toate ecuațiile (3.8, a), (3.8, b), (3.8, c), (3.7), în locul masei apar alte mărimi scalare: volum, arie, lungime.

Tot mecanica introduce și pentru aceste mărimi scalare, ca și pentru mase, momentele statice¹, care se definesc la fel ca momentele statice ale maselor, precizîndu-se că sînt momente statice pentru volume, arii sau lungimi de arc.

În acest fel se extinde atît noțiunea de moment static, cît și teorema momentelor statice la un grup mai larg de mărimi considerate aici scalare.

Aplicarea teoremei momentelor statice la mărimi geometrice permite determinarea centrului de greutate geometric al unui corp sau figuri geometrice.

3.A.8. Extinderea teoremei momentelor statice

Pe baza tuturor observațiilor de la pct. 7 se enunță forma extinsă a teoremei momentelor statice care se poate aplica unui grup de mărimi scalare întîlnite des, atît în Mecanica teoretică și în Rezistența materialelor, cît și în multe discipline de specialitate.

¹ ca și momentele de inerție folosite mai ales la „Rezistența materialelor”.

Momentul static, în raport cu un reper, al centrului în care se presupune concentrată întreaga mărime scalară a sistemului, este egal cu momentul static, în raport cu același reper, al mărimii scalare așa cum este ea efectiv repartizată în sistem.

Se precizează următoarele:

- pentru un sistem în spațiu, reperul poate fi originea axelor $Oxyz$ sau oricare din planele Oxy , Oyz , Ozx , dar nu axele Ox , Oy , Oz ;
- pentru un sistem plan, reperul poate fi originea axelor Oxy sau, axele Ox și Oy , dar, evident, *nu planul Oxy* ;
- momentul static al sistemului, în raport cu orice reper care conține centrul C al sistemului, *este nul*;
- momentul static este o mărime pozitivă, negativă sau nulă.

3.A.9. Indicații generale pentru calculul momentelor statice și al centrelor

În primul rând, dacă sistemul se bucură de o simetrie față de un plan, o axă sau un punct, centrul sistemului se va găsi în acel plan, pe acea axă sau în acel punct; se vor alege axele reperului în consecință.

Se înțelege că aici este vorba nu numai de o simetrie pozițională, ci și de una distribuțională.

În al doilea rând, dacă sistemul continuu are forme care pot fi compuse din două sau mai multe forme simple, la care se cunosc centrele respective, pentru calculul centrului sistemului compus, și *numai pentru acest calcul*, se pot presupune concentrate mărimile scalare (mase, volume, arii, lungimi) în centrele respective cunoscute și apoi, aplicând teorema momentelor statice, se va determina centrul sistemului compus.

Dacă sistemul compus poate fi conceput compus din forme simple, dar *unele pozitive și altele negative*, ex.: aria hașurată poate fi considerată ca sumă, în sens algebric, a ariei cercului cu centrul în C_1 (pozitivă) și a ariei cercului cu centrul în C_2 (negativă), se poate de asemenea aplica teorema momentelor statice, de exemplu, pentru determinarea centrului de greutate C al ariei hașurate (fig. 3.A.4).

3.A.10. Teoremele lui Guldin–Pappus

a) Calculul ariei unei suprafețe de rotație.

Teorema I. Aria suprafeței generate de un arc de curbă plană, prin rotația sa completă în jurul unei axe situate în același plan, dar care nu taie curba, este egală cu produsul dintre lungimea l a arcului și lungimea cercului descris de centrul de greutate al arcului de curbă (fig. 3.A.5), adică:

$$A = l2\pi x_c.$$

b) Calculul volumului unui corp de rotație.

Teorema II. Volumul corpului generat de o figură plană închizând o arie, prin rotația ei completă în jurul unei axe din planul figurii și care nu o taie, este egal cu produsul dintre aria închisă de figură și lungimea cercului descris de centrul de greutate al ariei A a figurii (fig. 3.A.6), adică:

$$V = A2\pi x_c.$$

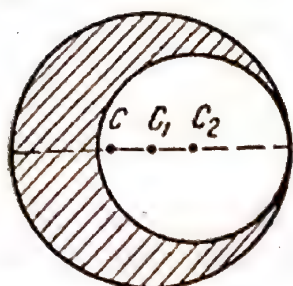


Fig. 3.A.4

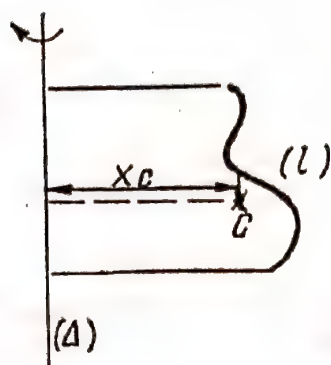


Fig. 3.A.5

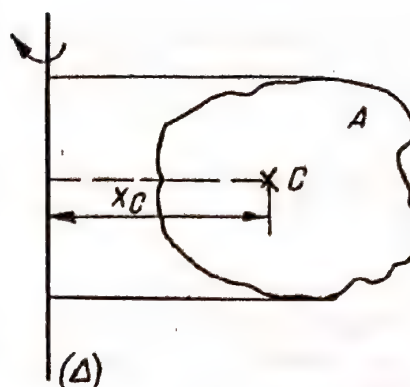


Fig. 3.A.6

Observații

Ambele teoreme se demonstrează foarte ușor cu ajutorul teoremei momentelor statice.

Teoremele servesc în primul rând la calculul unor arii sau volume de rotație atunci când se cunoaște centrul de greutate, iar în al doilea rând mai pot servi și la determinarea centrelor de greutate atunci când se cunosc ariile suprafețelor sau volumelor unor corpuri de rotație.

3.B. APLICAȚII LA DETERMINAREA CENTRELOR DE MASĂ (GREUTĂȚE)

3.B.1. Să se determine poziția centrului de masă al barei rectilinii neomogene, de lungime $OA = l$, cu densitatea barei variind linear de la ρ_0 în O la ρ_1 în A (fig. 3.B.1.).

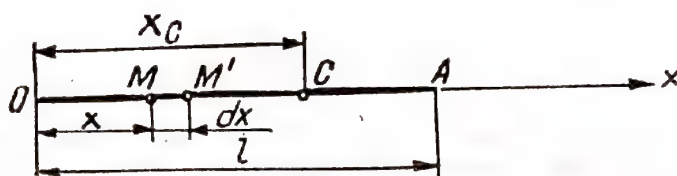


Fig. 3.B.1

Rezolvare. Se alege axa Ox de-a lungul barei OA . Fie M un punct curent de pe bară, de abscisă x , MM' un element al barei de lungime dx și masă $dm = \rho dx$, iar C centrul de masă căutat, avînd abscisa x_c .

Densitatea variază în funcție de x după legea $\rho = \rho_0 + \frac{\rho_1 - \rho_0}{l} x$.

Se aplică teorema momentelor statice în raport cu punctul O :

$$x_c \int_0^l \rho dx = \int_0^l x \rho dx. \text{ Înlocuind pe } \rho, \text{ se obține:}$$

$$x_c \int_0^l \left(\rho_0 + \frac{\rho_1 - \rho_0}{l} x \right) dx = \int_0^l x \left(\rho_0 + \frac{\rho_1 - \rho_0}{l} x \right) dx.$$

După integrare, rezultă:

$$x_c \frac{\rho_0 + \rho_1}{2} l = \frac{\rho_0 + 2\rho_1}{6} l^2, \text{ de unde } x_c = \frac{\rho_0 + 2\rho_1}{3(\rho_0 + \rho_1)} l.$$

În cazul particular al barei omogene:

$$\rho_0 = \rho_1; \quad x_c = \frac{l}{2}.$$

3.B.2. Să se determine poziția centrului de greutate al unei bare omogene, avînd forma unui arc de cerc de rază R și unghi la centru 2α radiani (fig. 3.B.2.).

Rezolvare. Bara fiind omogenă, admite o axă de simetrie. Se alege sistemul de referință cu originea în centrul cercului și cu axa Ox după axa de simetrie; deci $y_c = 0$.

Se detașează un element de arc $\widehat{MM'}$, avînd lungimea $ds = R d\theta$, abscisa centrului de greutate al acestuia fiind $x = R \cos\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) \approx R \cos \theta$.

Se determină abscisa x_c a centrului de greutate al întregului arc, aplicînd teorema momentelor statice în raport cu axa Oy :

$$x_c \int_{-\alpha}^{+\alpha} R d\theta = \int_{-\alpha}^{+\alpha} x R d\theta, \text{ dar } x = R \cos \theta.$$

Înlocuind și integrînd, rezultă:

$$x_c 2\alpha R = 2R^2 \sin \alpha, \text{ de unde } x_c = \frac{R \sin \alpha}{\alpha},$$

$$\text{Pentru } \alpha = \frac{\pi}{2}; \quad x_c = \frac{2R}{\pi},$$

iar pentru

$$\alpha = \frac{\pi}{4}; \quad x_c = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} R.$$

3.B.3. Să se determine poziția centrului de greutate al cîrligului plan, omogen, avînd forma și dimensiunile din figura 3.B.3.

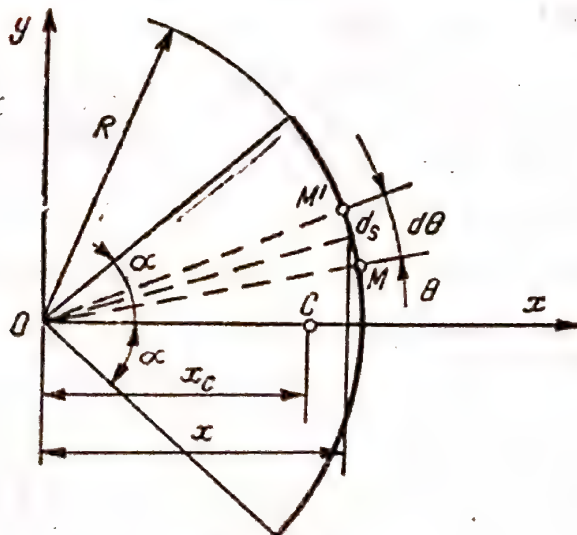


Fig. 3.B.2

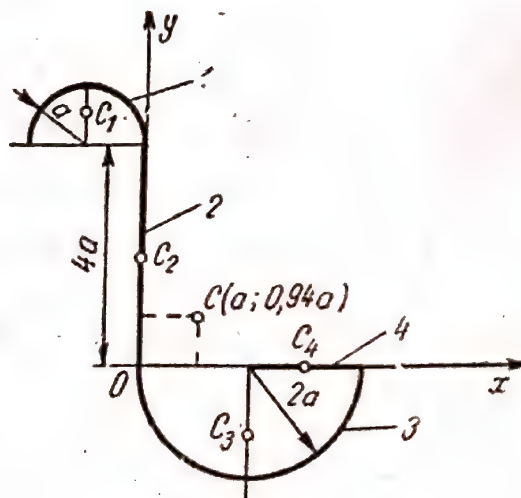


Fig. 3.B.3

Rezolvare. Se descompune sistemul în patru elemente la care se cunosc pozițiile centrelor de greutate, apoi se alege un sistem de referință convenabil. Pentru sistematizarea calculelor, coordonatele centrelor de greutate x_i, y_i , lungimile elementelor l_i , precum și momentele statice ale elementelor în raport cu axele $x_i l_i$ și $y_i l_i$, se trec în tabelul 3.1. În ultima linie a tabelului se face suma lungimilor elementelor Σl_i , precum și sumele momentelor statice ale elementelor în raport cu axele $\Sigma x_i l_i$ și $\Sigma y_i l_i$, sume care intervin în calcule.

Tabelul 3.1

Nr. elem.	x_i	y_i	l_i	$x_i l_i$	$y_i l_i$
1	$-a$	$4a + \frac{2a}{\pi}$	πa	$-\pi a^2$	$4\pi a^2 + 2a^2$
2	0	$2a$	$4a$	0	$8a^2$
3	$2a$	$-\frac{4a}{\pi}$	$2\pi a$	$4\pi a^2$	$-8a^2$
4	$3a$	0	$2a$	$6a^2$	0
Σ	—	—	$3a(\pi + 2)$	$3a^2(\pi + 2)$	$2a^2(2\pi + 1)$

Pentru determinarea lui x_c se aplică teorema momentelor statice în raport cu axa Oy :

$$x_c 3a(\pi + 2) = 3a^2(\pi + 2), \text{ de unde } x_c = a.$$

Pentru determinarea lui y_c se aplică teorema momentelor statice în raport cu axa Ox :

$$y_c 3a(\pi + 2) = 2a^2(2\pi + 1), \text{ de unde } y_c = \frac{2(2\pi + 1)}{3(\pi + 2)} a \approx 0,94a.$$

3.B.4. Să se determine poziția centrului de greutate al cadrului omogen avînd forma și dimensiunile indicate în figura 3.B.4.

Rezolvare. Se descompune cadrul în patru elemente, se alege sistemul de referință și se determină coordonatele centrelor de greutate, lungimile și momentele statice în raport cu planele, ale elementelor componente (tab. 3.2).

Aplicînd succesiv teorema momentelor statice în raport cu cele trei plane, rezultă:

$$x_c = \frac{5}{2(\pi + 2)} a \approx 0,49a;$$

$$y_c = \frac{\pi + 1}{2(\pi + 2)} a \approx 0,4a;$$

$$z_c = \frac{\pi}{2(\pi + 2)} a \approx 0,31a.$$

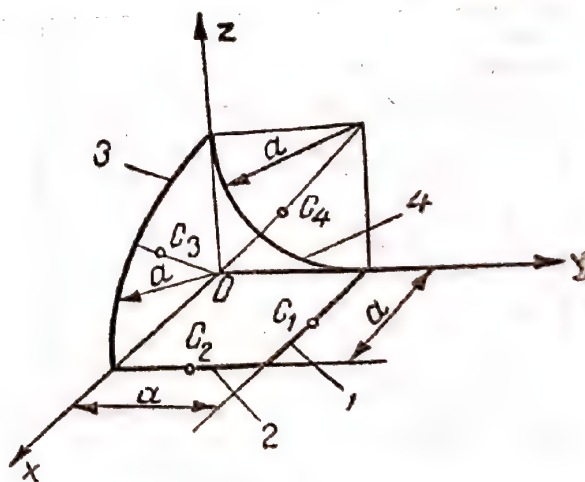


Fig. 3.B.4

Tabelul 3.2

Nr. elem.	x_i	y_i	z_i	l_i	$x_i l_i$	$y_i l_i$	$z_i l_i$
1	$\frac{a}{2}$	a	0	a	$\frac{a^2}{2}$	a^2	0
2	a	$\frac{a}{2}$	0	a	a^2	$\frac{a^2}{2}$	0
3	$\frac{2}{\pi} a$	0	$\frac{2}{\pi} a$	$\frac{\pi}{2} a$	a^2	0	a^2
4	0	$a - \frac{2}{\pi} a$	$a - \frac{2}{\pi} a$	$\frac{\pi}{2} a$	0	$a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$	$a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$
Σ	—	—	—	$a(\pi + 2)$	$\frac{5}{2} a^2$	$\frac{a^2}{2} (\pi + 1)$	$\frac{\pi}{2} a^2$

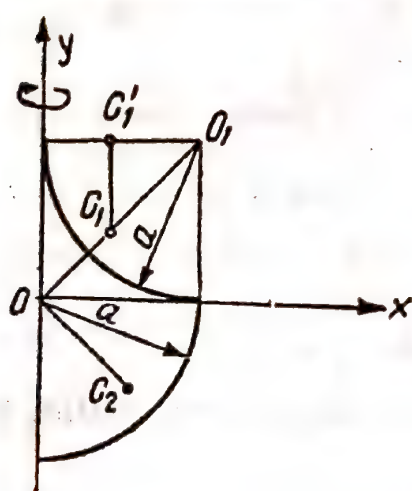


Fig. 3.B.5

3.B.5. Să se determine coordonatele centrului de greutate al sistemului omogen de bare în plan, precum și aria suprafeței generate prin rotirea conturului în jurul axei Oy (fig. 3.B.5).

Rezolvare. Se descompune conturul în cele două arce, determinându-se coordonatele centrelor de greutate C_1 și C_2 .

$$\text{Se calculează întâi } O_1 C_1 = \frac{a \sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} a,$$

$$\text{apoi } O_1 C'_1 = O_1 C_1 \cos \frac{\pi}{4} = \frac{2a}{\pi}.$$

Abscisa centrului de greutate C_1 este $x_{c1} = a - \frac{2a}{\pi}$. Se calculează în mod asemănător restul coordonatelor centrelor de greutate, de asemenea lungimile și momentele statice în raport cu axele, ale arcelor (tab. 3.3).

Tabelul 3.3

Nr. elem.	x_i	y_i	l_i	$x_i l_i$	$y_i l_i$
1	$a - \frac{2}{\pi} a$	$a - \frac{2}{\pi} a$	$\frac{\pi a}{2}$	$\frac{\pi}{2} a^2 - a^2$	$\frac{\pi}{2} a^2 - a^2$
2	$\frac{2}{\pi} a$	$-\frac{2}{\pi} a$	$\frac{\pi a}{2}$	a^2	$-a^2$
Σ	—	—	πa	$\frac{\pi}{2} a^2$	$\frac{a^2}{2} (\pi - 4)$

Aplicînd teorema momentelor statice în raport cu axele Oy , respectiv Ox , se obține:

$$x_c = 0,5a; \quad y_c = \frac{\pi - 4}{2\pi} a \approx 0,14a.$$

Pentru determinarea ariei suprafeței generate prin rotirea conturului în jurul axei Oy se utilizează prima teoremă a lui Guldin-Pappus:

$$A = \pi a 2\pi \frac{a}{2}. \text{ Rezultă } A = \pi^2 a^2.$$

3.B.6. Să se determine poziția centrului de greutate al plăcii plane, avînd forma unui sector circular de rază R și unghi la centru 2α radiani (fig. 3.B.6).

Rezolvare. Se alege sistemul de referință astfel încît Ox să coincidă cu axa de simetrie a sectorului, deci $y_c = 0$. Se detașează un element de suprafață $MNPQ$ avînd aria $dA = \rho d\rho d\theta$, abscisa centrului de greutate al elementului fiind $x = \left(\rho + \frac{d\rho}{2}\right) \cos\left(\theta + \frac{d\theta}{2}\right) \approx \rho \cos \theta$.

Se determină x_c aplicînd teorema momentelor statice în raport cu axa Oy :

$$x_c \iint \rho d\rho d\theta = \iint \rho \cos \theta \rho d\rho d\theta, \text{ respectiv:}$$

$$x_c \int_0^R \rho d\rho \int_{-\alpha}^{+\alpha} d\theta = \int_0^R \rho^2 d\rho \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos \theta d\theta.$$

După integrare rezultă $x_c = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha}$.

În cazul unui semicerc, $\alpha = \frac{\pi}{2}$; $x_c = \frac{4R}{3\pi}$,

iar pentru un sfert de cerc, $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $x_c = \frac{4R\sqrt{2}}{3\pi}$,

3.B.7. Să se determine poziția centrului de greutate al plăcii plane omogene avînd forma și dimensiunile indicate în figura 3.B.7.

Rezolvare. Se descompune placa în patru elemente: sectorul de cerc 1, triunghiul 2 la care se adaugă pătratul 3, urmînd să se scadă sectorul de cerc 4.

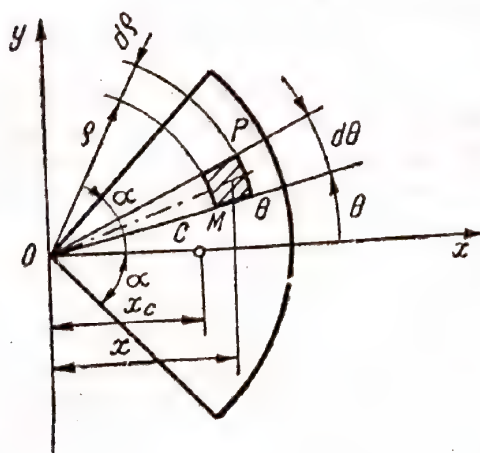


Fig. 3.B.6

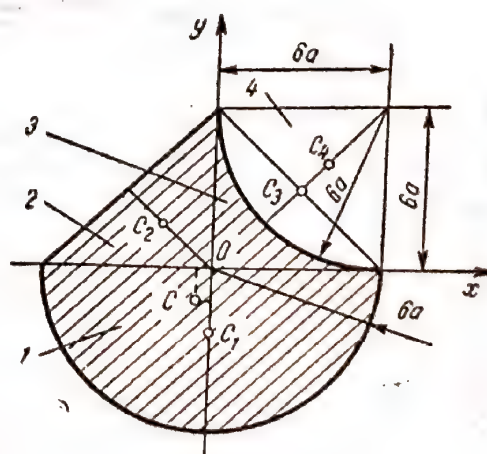


Fig. 3.B.7

Se calculează coordonatele centrelor de greutate, ariile, precum și momentele statice în raport cu axele pentru cele patru elemente (tab. 3.4).

Tabelul 3.4

Nr. elem.	x_i	y_i	A_i	$x_i A_i$	$y_i A_i$
1	0	$-\frac{8}{\pi}a$	$18\pi a^3$	0	$-144a^3$
2	$-2a$	$2a$	$18a^3$	$-36a^3$	$36a^3$
3	$3a$	$3a$	$36a^3$	$108a^3$	$108a^3$
4	$6a - \frac{8a}{\pi}$	$6a - \frac{8a}{\pi}$	$-9\pi a^3$	$-54\pi a^3 + 72a^3$	$-54\pi a^3 + 72a^3$
Σ	—	—	$9(\pi + 6)a^3$	$18(8 - 3\pi)a^3$	$9(8 - 6\pi)a^3$

Aplicînd teorema momentelor statice în raport cu axele Oy , respectiv Ox , rezultă:

$$x_c = \frac{2(8 - 3\pi)}{\pi + 6}a \approx -0,31a;$$

$$y_c = \frac{8 - 6\pi}{\pi + 6}a \approx -1,19a.$$

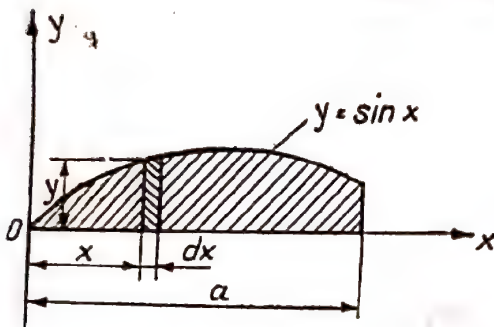


Fig. 3.B.8

3.B.8. Să se determine coordonatele centrului de greutate al plăcii plane omogene avînd aria cuprinsă între axa Ox , sinusoida $y = \sin x$ și dreapta $x = a$ (fig. 3.B.8).

Rezolvare. Se detașează un element de arie $dA = dx \sin x$. Se aplică apoi teorema momentelor statice în raport cu axa Oy :

$$x_c \int_0^a \sin x \, dx = \int_0^a x \sin x \, dx. \text{ Rezultă } x_c = \frac{\sin a - a \cos a}{1 - \cos a},$$

iar în raport cu axa Ox :

$$y_c \int_0^a \sin x \, dx = \int_0^a \frac{\sin^2 x \, dx}{2}. \text{ Rezultă } y_c = \frac{1}{8} \frac{2a - \sin 2a}{1 - \cos a}$$

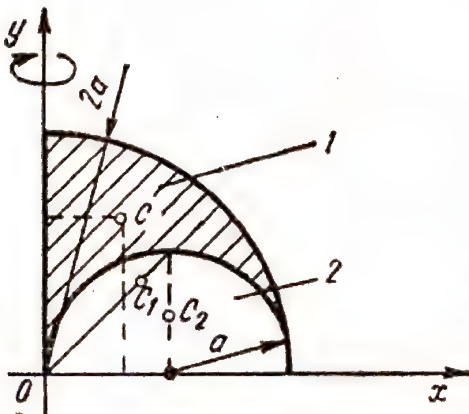


Fig. 3.B.9

3.B.9. Să se determine coordonatele centrului de greutate geometric al plăcii plane, omogene, din figura 3.B.9, precum și volumul generat prin rotirea suprafeței în jurul axei Oy .

Rezolvare. Se descompune placa în două elemente la care se cunosc pozițiile centrelor de greutate (v. aplicația 3.B.6).

Se calculează coordonatele centrelor de greutate, ariile și momentele statice în raport cu axele ale celor două elemente (tab. 3.5).

Tabelul 3.5

Nr. elem.	x_i	y_i	A_i	$x_i A_i$	$y_i A_i$
1	$\frac{8}{3\pi} a$	$\frac{8}{3\pi} a$	πa^3	$\frac{8}{3} a^3$	$\frac{8}{3} a^3$
2	a	$\frac{4}{3\pi} a$	$-\frac{\pi}{2} a^3$	$-\frac{\pi}{2} a^3$	$-\frac{2}{3} a^3$
Σ	—	—	$\frac{\pi}{2} a^3$	$\frac{16 - 3\pi}{6} a^3$	$2a^3$

Se aplică succesiv teorema momentelor statice în raport cu cele două axe. Rezultă :

$$x_c = \frac{16 - 3\pi}{3\pi} a \approx 0,7a, \quad y_c = \frac{4a}{\pi} \approx 1,27a.$$

Volumul căutat se determină aplicînd a doua teoremă a lui Guldin-Pappus :

$$V = \frac{\pi a^3}{2} 2\pi \frac{16 - 3\pi}{3\pi} a. \text{ Rezultă : } V = \frac{\pi(16 - 3\pi)}{3} a^3.$$

3.B.10. Placa plană omogenă din figura 3.B.10. este obținută prin decuparea cercului de rază r , necunoscută (dar $r < a$) din cercul de rază a dată. Să se determine raza r a cercului mic, astfel încît centrul de greutate al plăcii să se afle în punctul C .

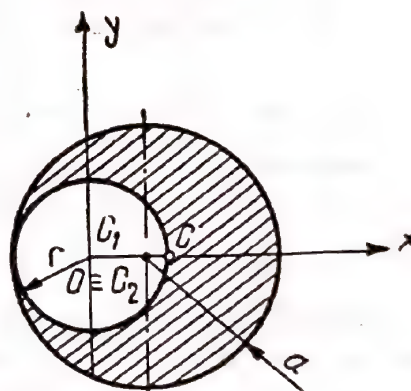


Fig. 3.B.10

Rezolvare. Se alege un sistem de referință xOy cu originea în centrul cercului de rază r , avînd ca axă Ox axa de simetrie a plăcii; deci $y_c = 0$. Se descompune figura în două elemente și se determină coordonatele centrelor de greutate;

$$C_1[(a - r); 0], \quad C_2[0; 0],$$

apoi ariile elementelor : $A_1 = \pi a^2$, $A_2 = -\pi r^2$.

Aria totală este : $A = \pi(a^2 - r^2)$.

Se aplică teorema momentelor statice în raport cu axa Oy :

$x_c \pi(a^2 - r^2) = \pi a^2(a - r)$. Punînd condiția ca centrul de greutate al plăcii să se afle în punctul $C(r; 0)$, deci $x_c = r$, se obține ecuația : $r^2 + ar - a^2 = 0$, de unde :

$$r = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2}. \text{ Cum } r > 0, \text{ soluția va fi } r = \frac{a(\sqrt{5} - 1)}{2} \approx 0,62 a.$$

3.B.11. O camă este compusă din două plăci semicirculare, prima avînd raza $2a$ și densitatea ρ , a doua avînd raza a și densitatea 2ρ (fig. 3.B.11). Să se determine poziția centrului de masă al camei, precum și poziția centrului de greutate geometric al suprafeței plăcii.

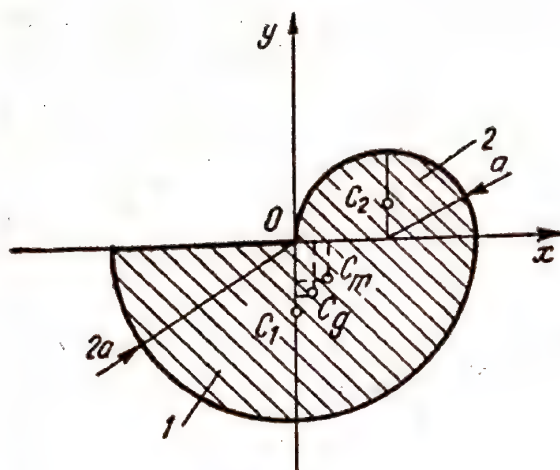


Fig. 3.B.11

Rezolvare. Se descompune figura în două elemente și se determină coordonatele centrelor de greutate, ariile, masele, precum și momentele statice în raport cu axele ale elementelor (tab. 3.6).

Aplicînd teorema momentelor statice în raport cu axele, rezultă pentru centrul de masă :

$$x_{cm} = \frac{a}{3} \approx 0,33a;$$

$$y_{cm} = -\frac{4}{3\pi} a \approx -0,43a;$$

iar pentru centrul de greutate geometric :

$$x_{cg} = \frac{a}{5} = 0,2a; \quad y_{cg} = -\frac{28}{15\pi} a \approx -0,6a.$$

Tabelul 3.6

Nr. elem.	x_i	y_i	A_i	ρ_i	m_i	$x_i A_i$	$y_i A_i$	$x_i m_i$	$y_i m_i$
1	0	$-\frac{8}{3\pi}a$	$2\pi a^2$	ρ	$2\pi\rho a^2$	0	$-\frac{16}{3}a^3$	0	$-\frac{16\rho}{3}a^3$
2	a	$\frac{4}{3\pi}a$	$\frac{\pi}{2}a^2$	2ρ	$\pi\rho a^2$	$\frac{\pi}{2}a^3$	$\frac{2}{3}a^3$	$\pi\rho a^3$	$\frac{4\rho}{3}a^3$
Σ	—	—	$\frac{5}{2}\pi a^2$	—	$3\pi\rho a^2$	$\frac{\pi}{2}a^3$	$-\frac{14}{3}a^3$	$\pi\rho a^3$	$-4\rho a^3$

3.B.12. O piesă stanțată din tablă omogenă are forma și dimensiunile date în figura 3.B.12. Să se determine poziția centrului de greutate al piesei.

Rezolvare. Se descompune piesa în trei elemente și se calculează coordonatele centrelor de greutate, ariile și momentele statice în raport cu planele, pentru acestea (tab. 3.7).

Aplicînd succesiv teorema momentelor statice în raport cu cele trei plane, rezultă pentru centrul de greutate coordonatele :

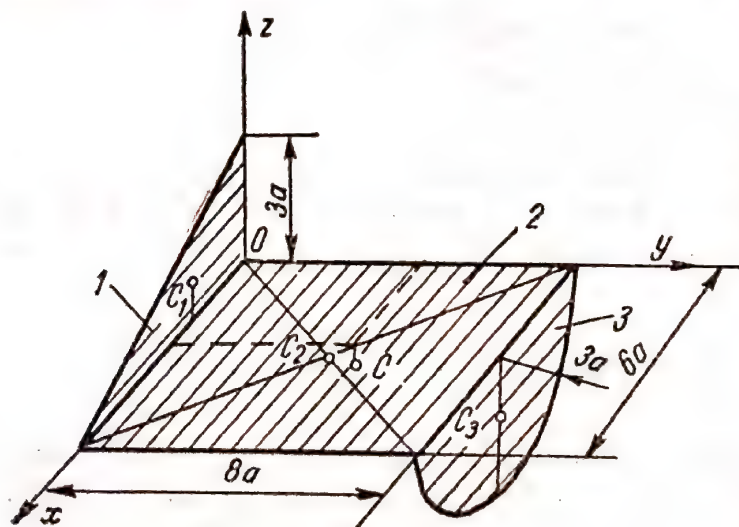


Fig. 3.B.12

$$x_c = \frac{9(\pi + 12)}{3\pi + 38} a \approx 2,87a;$$

$$y_c = \frac{8(3\pi + 16)}{3\pi + 38} a \approx 4,29a;$$

$$z_c = -\frac{6}{3\pi + 38} a \approx -0,13a.$$

Tabelul 3.7

Nr. elem.	x_i	y_i	z_i	A_i	$x_i A_i$	$y_i A_i$	$z_i A_i$
1	$2a$	0	a	$9a^2$	$18a^3$	0	$9a^3$
2	$3a$	$4a$	0	$48a^2$	$144a^3$	$192a^3$	0
3	$3a$	$8a$	$-\frac{4}{\pi}a$	$\frac{9\pi}{2}a^2$	$\frac{27\pi}{2}a^3$	$36\pi a^3$	$-18a^3$
Σ	—	—	—	$\frac{3}{2}(3\pi + 38)a^2$	$\frac{27}{2}(\pi + 12)a^3$	$12(3\pi + 16)a^3$	$-9a^3$

3.B.13. Să se determine poziția centrului de greutate al corpului semi-sferic omogen de rază R (fig. 3.B.13.).

Rezolvare. Se alege sistemul de referință cu Oz ca axă de simetrie a corpului, deci $x_c = 0$; $y_c = 0$.

Se detașează un element de volum. Folosind coordonatele sferice se obține cota centrului de greutate a elementului $z = \rho \sin \varphi$, și volumul elementar $dV = \rho^2 \cos \varphi d\rho d\theta d\varphi$.

Se aplică teorema momentelor statice în raport cu planul xOy :

$$z_c \iiint \rho^2 \cos \varphi d\rho d\theta d\varphi = \iiint \rho^3 \sin \varphi \cos \varphi d\rho d\theta d\varphi,$$

de unde:

$$z_c = \frac{\int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi}{\int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi}.$$

Integrând, rezultă $z_c = \frac{3R}{8}$.

3.B.14. Să se determine poziția centrului de greutate al conului omogen, avînd raza bazei R și înălțimea h (fig. 3.B.14).

Rezolvare. Se alege sistemul de referință cu Oz ca axă de simetrie a conului, deci $x_c = 0$; $y_c = 0$.

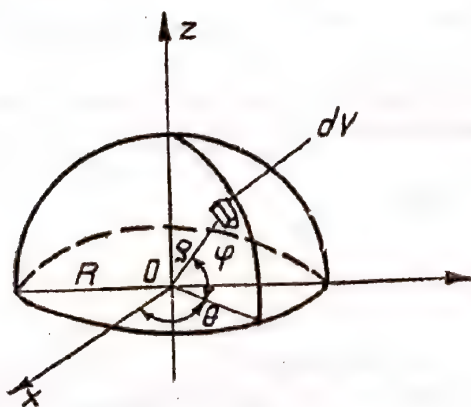


Fig. 3.B.13

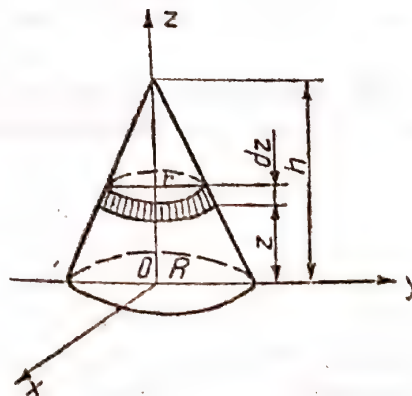


Fig. 3.B.14

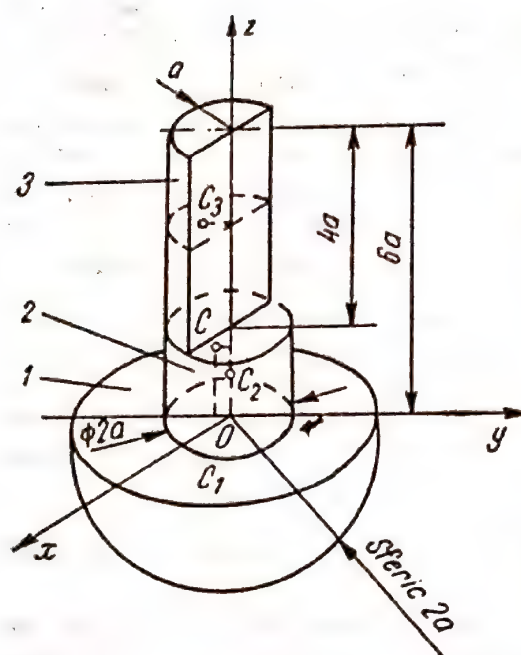


Fig. 3.B.15

Se detașează un element de volum $dV = \pi r^2 dz$.

Dar $\frac{r}{R} = \frac{h-z}{h}$, de unde: $r = R\left(1 - \frac{z}{h}\right)$.

Pentru determinarea lui z_c se aplică teorema momentelor statice în raport cu planul xOy :

$$z_c \pi R^2 \int_0^h \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 dz = \pi R^2 \int_0^h \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 z dz.$$

Integrînd rezultă: $z_c = \frac{h}{4}$.

3.B.15. Să se determine poziția centrului de greutate al corpului omogen avînd forma și dimensiunile din figura 3.B.15.

Rezolvare. Se descompune corpul în trei elemente: semisfera 1, cilindrul 2 și jumătatea de cilindru 3.

Se alege sistemul de axe astfel încît planul yOz să coincidă cu planul de simetrie al corpului; deci $x_c = 0$. Se calculează coordonatele centrelor de greutate, volumele și momentele statice ale acestora în raport cu planele zOx și xOy (tab. 3.8).

Tabelul 3.8

Nr. elem.	y_i	z_i	V_i	$y_i V_i$	$z_i V_i$
1	0	$\frac{3}{4} a$	$\frac{16\pi}{3} a^3$	0	$4\pi a^4$
2	0	a	$2\pi a^3$	0	$2\pi a^4$
3	$-\frac{4}{3\pi} a$	$4a$	$2\pi a^3$	$-\frac{8}{3} a^4$	$8\pi a^4$
Σ	—	—	$\frac{28}{3} \pi a^3$	$-\frac{8}{3} a^4$	$14\pi a^4$

Aplicînd teorema momentelor statice în raport cu planele zOx și xOy , rezultă pentru centrul de greutate al corpului coordonatele:

$$y_c = -\frac{2}{7\pi} a \approx -0,09a;$$

$$z_c = 1,5a.$$

3.B.16. Un corp este compus dintr-un con de densitate ρ_1 , înălțime h necunoscută, raza bazei R dată și o semisferă de densitate ρ_2 avînd baza comună cu cea a conului.

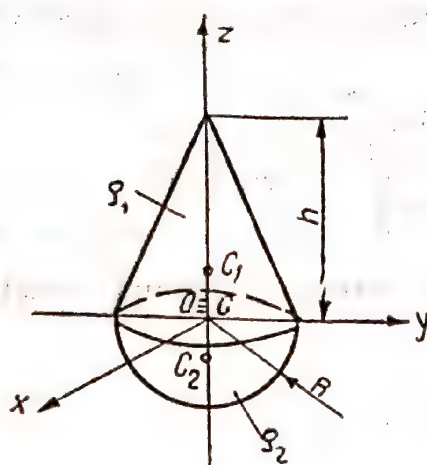


Fig. 3.B.16

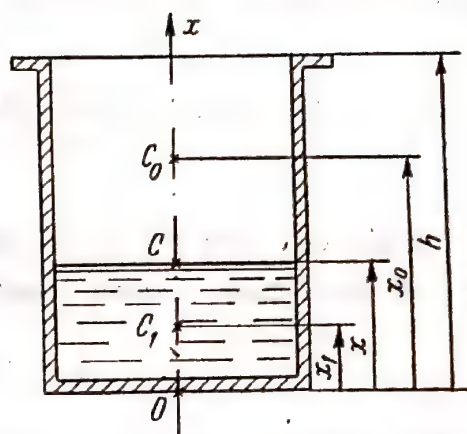


Fig. 3.B.17

Să se determine înălțimea h a conului astfel încât centrul de masă al corpului să se afle în punctul C (fig. 3.B.16).

Rezolvare. Se alege sistemul de referință cu originea în punctul C și, cu axa Oz ca axă de simetrie a corpului. Deci, $x_c = 0$, $y_c = 0$. Pentru ca centrul de masă să se afle în punctul C , trebuie ca și $z_c = 0$.

Se determină z_c aplicând teorema momentelor statice în raport cu planul xOy :

$$z_c \left(\rho_1 \frac{\pi R^2 h}{3} + \rho_2 \frac{2\pi R^3}{3} \right) = \frac{h}{4} \rho_1 \frac{\pi R^2 h}{3} - \frac{3R}{8} \rho_2 \frac{2\pi R^3}{3}$$

$$\text{Dar } z_c = 0, \text{ de unde: } h = R \sqrt{3 \frac{\rho_2}{\rho_1}}.$$

Se observă că dacă $\rho_2 = \rho_1$, $h = \sqrt{3}R$.

3.B.17. Un rezervor de formă cilindrică și înălțime h (fig. 3.B.17) are, când este gol, greutatea G_0 , iar centrul de greutate în punctul C_0 situat la distanța $x_0 = \alpha \frac{h}{2}$ față de planul bazei (α este o constantă dată). Greutatea unui lichid care ar umple complet rezervorul este $G_1 = k \cdot G_0$ (k este o constantă dată).

Se cere să se determine înălțimea x pînă la care trebuie umplut rezervorul cu acel lichid, astfel încât centrul de greutate C al ansamblului rezervor gol plus lichid să fie în cea mai de jos poziție, precum și poziția centrului de greutate în această situație.

Rezolvare. Greutatea lichidului din rezervor va fi $G_{1x} = G_1 \frac{x}{h} = kG_0 \frac{x}{h}$, iar centrul de greutate al lichidului va fi în punctul C_1 (fig. 3.B.17); $OC_1 = x_1 = \frac{x}{2}$.

Pentru centrul de greutate C al ansamblului rezervor cu lichid vom avea :

$$OC = x_c = \frac{G_0 x_0 + G_1 x_1}{G_0 + G_1} = \frac{G_0 \alpha \frac{h}{2} + k G_0 \frac{x^2}{2h}}{G_0 + k G_0 \frac{x}{h}} = \frac{\alpha h^2 + k x^2}{2(h + kx)}.$$

Poziția cea mai de jos a punctului C se determină punînd condiția : $\frac{dx_c}{dx} = 0$, din care rezultă ecuația :

$$kx^2 + 2hx - \alpha h^2 = 0.$$

Prin rezolvarea acestei ecuații se obține :

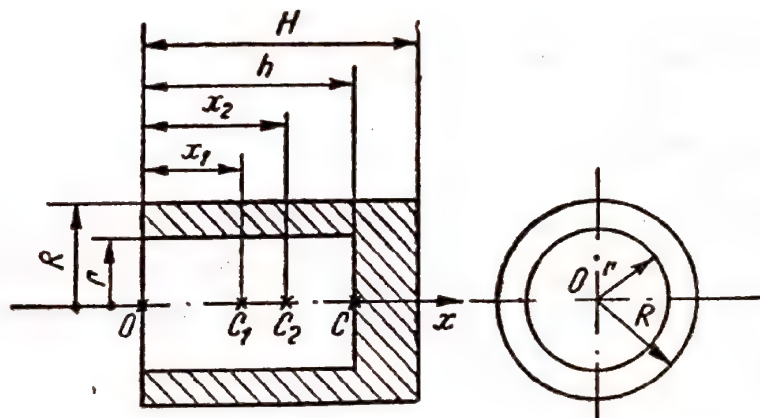
$$x = h \frac{\alpha}{1 + \sqrt{1 + \alpha k}} \text{ și apoi } x_{c \text{ minim}} = h \frac{\alpha}{1 + \sqrt{1 + \alpha k}} = x.$$

În poziția sa cea mai de jos centrul de greutate C al ansamblului rezervor cu lichid se află la suprafața lichidului.

3.B.18. Un piston este obținut dintr-un cilindru plin de rază R și înălțime H prin strunjirea unei cavități interioare de formă cilindrică avînd raza $r < R$ și înălțimea $h < H$, ca în figura 3.B.18.

Se cere să se determine înălțimea h a cavității cilindrice interioare a pistonului astfel încît centrul de greutate C al pistonului prelucrat să fie cît mai aproape de fundul acestuia, precum și poziția centrului de greutate în această situație.

Fig. 3.B.18



Rezolvare. Se notează cu C_1 și C_2 centrele de greutate ale cavității cilindrice interioare, respectiv al cilindrului plin, aflate pe axa de simetrie Ox a pistonului ($OC_1 = x_1$; $OC_2 = x_2$) și cu V_1 și V_2 volumele cavității interioare și al cilindrului plin.

Poziția centrului de greutate C al pistonului este dată de :

$$OC = x_c = \frac{x_2 V_2 - x_1 V_1}{V_2 - V_1} = \frac{\frac{1}{2} H \cdot \pi R^2 H - \frac{1}{2} h \cdot \pi r^2 h}{\pi R^2 H - \pi r^2 h} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2 H^2 - r^2 h^2}{R^2 H - r^2 h}.$$

Pentru a găsi poziția lui C cea mai apropiată de fundul pistonului, adică poziția cea mai îndepărtată de punctul O , se pune condiția de extrem $\frac{dx_o}{dh} = 0$, din care rezultă ecuația:

$$r^2 h^2 - 2R^2 H h + R^2 H^2 = 0.$$

Prin rezolvarea acestei ecuații se obține:

$$h_{1,2} = H \frac{R}{R \pm \sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Se alege soluția $h_1 = H \frac{R}{R + \sqrt{R^2 - r^2}}$ deoarece $h_1 < H$ în timp ce $h_2 > H$.

Înlocuind valoarea obținută pentru h_1 în expresia lui x_o se obține:

$$x_{o \max} = H \frac{R}{R + \sqrt{R^2 - r^2}} = h_1.$$

Se observă că în poziția sa cea mai apropiată de fundul pistonului, centrul de greutate C al acestuia se află chiar pe suprafața interioară a fundului pistonului.

4.A. PREZENTARE TEORETICA

4.A.1. Grade de libertate

Definiție. Un sistem mecanic¹ a cărui poziție în raport cu un reper fix este determinată prin p parametri scalari independenți între ei are p grade de libertate.

Poziția unui punct material liber M în raport cu reperul fix $Oxyz$ este determinată prin cele 3 coordonate x, y, z , independente între ele. Punctul material liber are *trei grade de libertate*.

Dacă punctul material este obligat să rămână pe o suprafață, acest fapt se exprimă printr-o relație între coordonatele lui :

$$F(x, y, z) = 0,$$

care este chiar ecuația suprafeței.

Suprafața se mai poate reprezenta prin ecuațiile ei parametrice :

$$x = f(u, v); \quad y = g(u, v); \quad z = h(u, v)$$

unde u și v sînt doi parametri scalari independenți.

Un punct material obligat să rămână pe o suprafață are *două grade de libertate*.

Dacă punctul material este obligat să rămână pe o curbă oarecare are un singur grad de libertate, deoarece fie că ecuațiile curbei sînt :

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{și} \quad G(x, y, z) = 0.$$

fie că sînt parametrice :

$$x = f(t); \quad y = g(t); \quad z = z(t),$$

poziția punctului pe curbă depinde de un *singur parametru scalar*.

Evident, un punct material fixat într-un punct geometric nu are nici un grad de libertate.

4.A.2. Statica punctului material liber

Pentru ca un punct material liber să rămână în repaus în raport cu un reper fix $Oxyz$, este necesar și suficient ca rezultanta forțelor aplicate punctului material să fie nulă ($\vec{R} = 0$). Această condiție vectorială se exprimă prin trei ecuații scalare, dacă sistemul este în spațiu :

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = 0$$

¹ În general, un sistem de solide care au legături mecanice între ele.

și numai prin două din ele, pentru sisteme situate într-un plan, sau prin una singură dacă forțele care acționează punctul sînt toate situate pe o dreaptă care, evident, trece prin punctul material. Expresiile X , Y , Z sînt, respectiv, sumele scalarilor proiecțiilor forțelor pe axele Ox , Oy și Oz . Aceste expresii conțin atît *caracteristicile* forțelor, cît și *parametrii* poziției în care este așezat punctul și rămîne în repaus sub acțiunea forțelor. Ecuațiile de echilibru sînt condiții pentru aceste caracteristici și parametri. Aceste ecuații permit rezolvarea problemei.

4.A.3. Legături, reacțiuni, forțe de legătură, eliberare de legături

În problemele mecanicii aplicate, toate legăturile unui corp cu alte corpuri sînt legături materiale. Corpurile legate între ele se interacționează, în punctele lor de contact, datorită acțiunii forțelor aplicate corpurilor respective.

Astfel, corpul (C) acționat de forțele $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ (fig. 4.A.1, a), acționează la rîndul lui asupra corpului (C') în punctele A și B cu forțele \vec{F}_A și \vec{F}_B (fig. 4.A.1, b). În conformitate cu principiul egalității acțiunii și reacțiunii, corpul (C') reacționează asupra corpului (C) cu forțe egale și direct opuse \vec{F}'_A și \vec{F}'_B (fig. 4.A.1, a). Reacțiunile \vec{F}'_A și \vec{F}'_B aplicate corpului (C) și acțiunile \vec{F}_A și \vec{F}_B aplicate corpului (C') sînt denumite și forțe de legătură și, evident, ele nu se echilibrează, fiind aplicate unor corpuri diferite (C) , respectiv (C') .

În unele probleme de mecanică teoretică pot apare și *condiții geometrice*, cum ar fi: un punct material obligat să se miște pe o suprafață sau pe o curbă; de pildă, un punct material obligat să rămînă pe un cerc (pendulul simplu).

În aceste cazuri, se poate extinde noțiunea de legătură și asupra condițiilor geometrice, astfel încît să se poată introduce noțiunea de *forță de legătură*, pe baza principiului forțelor de legătură.

Principiul forțelor de legătură. Dacă libertatea de mișcare a unui punct material este îngădită prin condiții geometrice, aceste condiții se pot înlocui prin forțe numite forțe de legătură.

Prin această înlocuire, punctul material se poate considera ca liber, eliberat de legături.

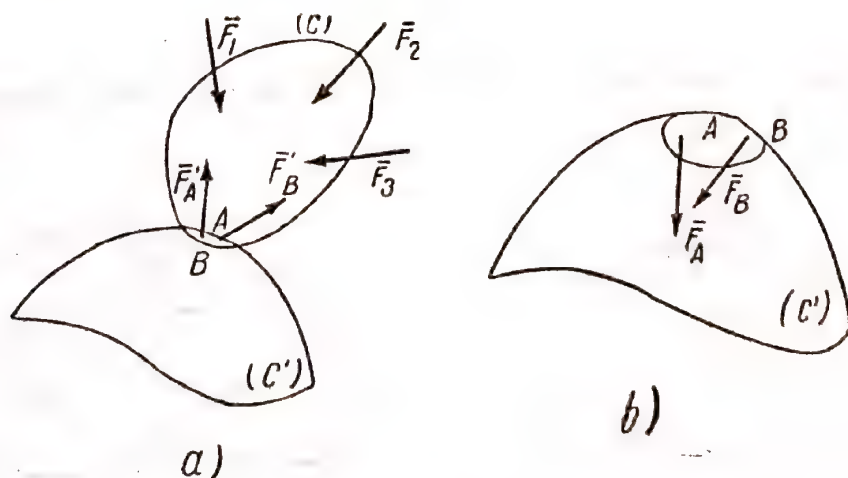


Fig. 4.A.1

Spre deosebire de forțele *active* (date), forțele de legătură, *forțe pasive*, au *caracteristici necunoscute*.

Aceste necunoscute se pot determina, în statică, scriind condițiile necesare și suficiente pentru ca punctul material să rămână în repaus, iar în dinamică, studiind mișcarea punctului material cu ajutorul ecuațiilor de mișcare.

4.A.4. Legăturile punctului material

Legătura ideală cu o suprafață. Punctul material M are o legătură ideală dacă forța de legătură este normală la suprafață (fig. 4.A.2.).

Observație.

Legătura se numește *bilaterală* dacă punctul material nu se poate desprinde de suprafață în nici una din cele două părți ale ei. În acest caz, pe lângă mărime, nu este cunoscut nici sensul forței de legătură.

Legătura se numește *unilaterală* dacă punctul material se poate desprinde de suprafață într-una din cele două părți. În acest caz se cunoaște sensul forței de legătură. Acesta este dirijat înspre partea în care punctul se poate desprinde (fig. 4.A.2.).

Concluzie. Legătura ideală a unui punct M cu o suprafață (S) se poate înlocui printr-o forță cu următoarele caracteristici:

- punctul de aplicație în M , — direcția normală în M la (S) ,
- *sensul și mărimea necunoscute*, cu observația că sensul este cunoscut numai în cazul legăturii unilaterale.

Legătura reală cu suprafața unui corp. În acest caz, în afară de forța de legătură \bar{N} (componenta normală a reacțiunii \bar{R}') suprafața (S) a corpului se opune, în punctul de contact și la alunecarea punctului material M pe suprafață, printr-o forță \bar{T} , care, în general, este datorită frecării. Caracteristicile acestei componente \bar{T} sînt: punctul de aplicație în M , suportul situat în planul tangent în M la suprafață, direcția, sensul și mărimea necunoscute (fig. 4.A.3).

La forțele de frecare se mai știe că sensul este opus sensului alunecării sau tendinței (datorită forței active) de alunecare a punctului și că mărimea este limitată.

În concluzie, reacțiunea (forța de legătură) \bar{R}' :

$$\bar{R}' = \bar{N} + \bar{T}$$

are două componente: *reacțiunea normală* \bar{N} și *reacțiunea tangențială* \bar{T} .

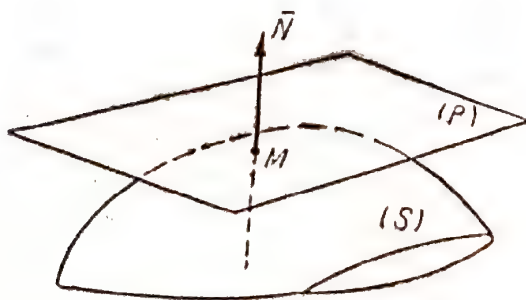


Fig. 4.A.2

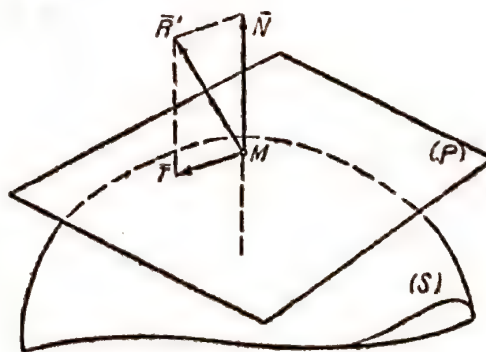


Fig. 4.A.3

4.A.5. Legile frecării uscate (Coulomb)

I. Modulul forței de frecare de alunecare este dat de inegalitatea :

$$|\vec{T}| \leq \mu |\vec{N}|,$$

în cazul repausului la limită (în statică), $|\vec{T}_{\max}| = \mu_0 |\vec{N}|$.

II. Coeficientul de frecare (μ sau μ_0) nu depinde de N și nici de mărimea ariei suprafeței comune de contact.

III. Coeficientul de frecare (μ sau μ_0) depinde de natura suprafețelor solidelor în punctele de contact, de felul prelucrării lor și de natura substanțelor interpușe.

IV. Coeficientul de frecare de alunecare în mișcare (μ) nu depinde de viteza relativă dintre cele două solide.

Observații

Legile și coeficienții de frecare sînt determinați experimental.

Legile lui Coulomb sînt legi aproximative cu valabilitate restrînsă strict la frecarea uscată. Mai mult, legile II și IV sînt supuse unor critici justificate.

În dinamică : $|\vec{T}| = \mu |\vec{N}|$.

Se numește *unghi de frecare de alunecare* (φ_0) unghiul pe care-l formează reacțiunea statică maximă :

$$\vec{R}'_{\max} = \vec{N} + \vec{T}_{\max},$$

cu normala la suprafața (S) în punctul de contact M (fig. 4.A.4)

$$\varphi_0 = \arctg \frac{|\vec{T}_{\max}|}{|\vec{N}|} = \arctg \mu_0.$$

Cu ajutorul unghiului de frecare se poate construi, în orice punct M al suprafeței (S), o suprafață conică (fig. 4.A.4) avînd ca axă normala în M la (S) iar ca generatoare dreptele duse prin M înclinate cu unghiul φ_0 față de axă. Suprafața generată se numește *conul de frecare în M* al suprafeței (S) cu punctul material (sau cu solidul dacă contactul poate fi conceput punctual).

În general, acest con depinde de valoarea φ_0 care este o funcție de direcția considerată pe planul tangent (P).

Dacă frecarea este *izotropă*, aceeași în orice direcție, conul de frecare este un con circular drept.

Conul de frecare, ca și unghiul de frecare, este utilizat deseori în calculele grafice. Astfel dacă se construiește unghiul și conul de frecare (Geometrie descriptivă) cu vîrfurile în punctul material, precum și rezultanta forțelor date aplicate punctului, se poate deduce ușor dacă punctul material rămîne sau nu în repaus.

Dacă rezultanta \vec{R} are suportul plasat în interiorul conului, punctul M rămîne în repaus, dacă e în afara conului, punctul M nu rămîne în repaus, iar dacă suportul coincide cu o generatoare a conului, repausul este la limită.

Legătura unui punct material cu o curbă (C). Caracteristicile forței de legătură \vec{R}' .

Componenta normală \vec{N} (fig. 4.A.5) are punctul de aplicație în M, suportul în planul normal (P) la curbă în M, dacă curba este strîmbă, deci necunoscută.

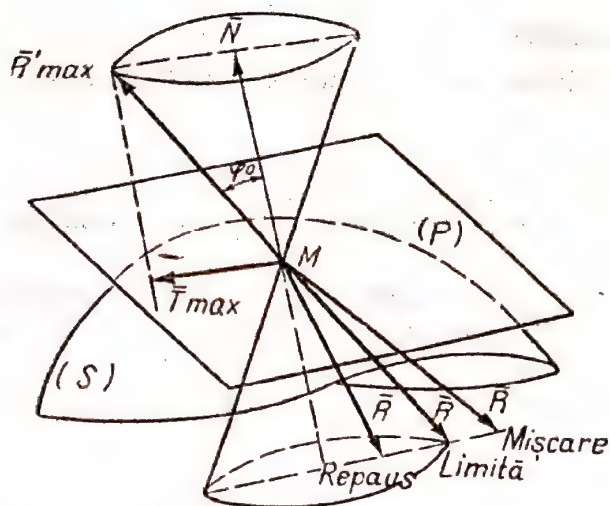


Fig. 4.A.4

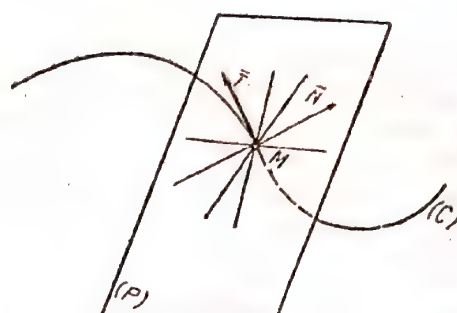


Fig. 4.A.5

Dacă curba este plană, suportul coincide cu unica¹ normală la curbă iar sensul *necunoscut*, în afara cazului unei legături unilaterale când se cunoaște și sensul.

Mărimea este întotdeauna necunoscută, determinarea ei, ca și a celorlalte caracteristici, depinzând de ecuațiile de echilibru.

Componenta tangențială \bar{T} (fig. 4.A.5) are M ca punct de aplicație, suportul, tangenta în M la C , sensul și mărimea necunoscute. Ceea ce se știe este că \bar{T} se opune mișcării sau tendinței de mișcare, iar în cazul forțelor de frecare are mărimea limitată de:

$$|\bar{T}| \leq \mu |\bar{N}|.$$

Legătura unui punct material printr-o bară sau printr-un fir. Legătura prin bară rigidă se încadrează în legătura bilaterală cu o suprafață sferică sau dacă sistemul e plan, cu un cerc. Dacă legătura este realizată prin fir, ea este unilaterală.

Dacă se neglijează rezistența mediului care ar constitui *reacțiunea tangențială*, reacțiunea este dirijată după bară sau după fir (fig. 4.A.6), adică se reduce numai la *reacțiunea normală*. Numai la legătura prin fir se cunoaște dinainte sensul forței de legătură.

4.A.6. Statica punctului material cu legături

În general, problemele staticii punctului material cu legături se rezolvă folosind următoarele indicații:

- se scoate în evidență aspectul fizic și dacă este cazul, cel tehnic;
- se scot în evidență datele problemei: forțe cunoscute, parametri ai poziției de repaus date, coeficienți de frecare etc.;

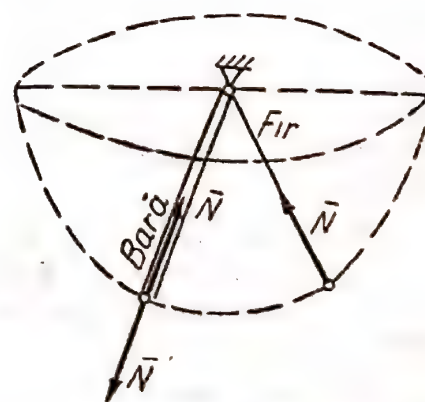


Fig. 4.A.6

¹ dacă punctul este nesingular.

- se notează caracteristicile cunoscute și necunoscute ale forțelor de legătură, precum și parametrii necunoscuți ai poziției de repaus;
- se eliberează punctul material de legături și se alege sistemul de referință cel mai convenabil care să permită scrierea unor ecuații de proiecție cât mai simple, fără însă a modifica datele problemei.

Condiția vectorială necesară și suficientă pentru echilibrul forțelor, $\vec{R} + \vec{R}' = 0$, se proiectează pe axele sistemului de referință ales, de exemplu pe $Oxyz$:

$$X + X' = 0; \quad Y + Y' = 0; \quad Z + Z' = 0,$$

unde $R(X, Y, Z)$ este rezultanta forțelor date aplicate punctului material iar $R'(X', Y', Z')$ este rezultanta forțelor de legătură conținând în expresiile scalare și necunoscutele problemei. În afară de cele 3 ecuații (în spațiu, în cazul sistemelor plane, numai două ș.a.m.d.) se mai pot scrie și inecuații de forma: $|\vec{T}| \leq \mu |\vec{N}|$ pentru forțele de frecare, dacă sînt.

Se rezolvă sistemul de ecuații și inecuații scalare. Problemele cu inecuații datorită frecărilor sînt *nedeterminate*. În anumite cazuri de *legături multiple*, numărul necunoscutelor forțelor de legătură pot depăși numărul ecuațiilor scalare de echilibru în care intervin aceste necunoscute. Asemenea sisteme de legături se numesc *static nedeterminate*.

Mai sînt sisteme în care numărul necunoscutelor forțelor de legătură este mai mic decît cel al ecuațiilor scalare de echilibru. Un asemenea sistem se numește *mecanism*, deoarece legăturile nu au suprimat toate gradele de libertate ale sistemului. Ecuațiile de echilibru nefolosite servesc la calculul parametrilor de poziție, adică la *determinarea poziției* în care sistemul trebuie așezat astfel încît sub acțiunea forțelor date și a legăturilor el să rămînă în *repaus*.

La sfîrșit, se va trece la interpretarea fizică și la explicarea rezultatelor obținute.

4.B. APLICAȚII LA STATICA PUNCTULUI MATERIAL

4.B.1. Un punct material M este atras de 3 puncte fixe, A , B și C , aflate la distanța l unul de altul (fig. 4.B.1), cu forțe proporționale cu distanța de la punctul M la fiecare din ele, coeficienții de proporționalitate fiind K_1 , K_2 , K_3 . Se cere poziția de echilibru a punctului M .

Rezolvare. Expresiile vectoriale ale forțelor sînt date de:

$$\vec{F}_1 = K_1 \overline{MA}; \quad \vec{F}_2 = K_2 \overline{MB}; \quad \vec{F}_3 = K_3 \overline{MC}.$$

În raport cu sistemul de axe xAy , poziția punctului M este dată de parametrii x , y necunoscuți. Deci se pot scrie vectorii:

$$\vec{F}_1 = -K_1 x \vec{i} - K_1 y \vec{j}$$

$$\vec{F}_2 = K_2 (l - x) \vec{i} - K_2 y \vec{j}$$

$$\vec{F}_3 = K_3 \left(\frac{l}{2} - x \right) \vec{i} + K_3 \left(\frac{l\sqrt{3}}{2} - y \right) \vec{j}.$$

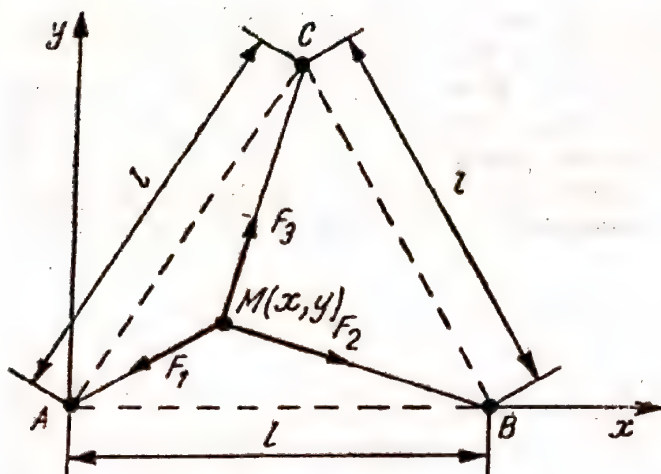


Fig. 4.B.1

Proiectând forțele pe axele Ax , Ay , rezultă sistemul de ecuații:

$$(\sum X_i = 0);$$

$$-K_1x + K_2(l - x) + K_3\left(\frac{l}{2} - x\right) = 0;$$

$$(\sum Y_i = 0);$$

$$-K_1y - K_2y + K_3\left(\frac{l\sqrt{3}}{2} - y\right) = 0,$$

de unde

$$x = \frac{\left(K_2 + \frac{K_3}{2}\right)l}{K_1 + K_2 + K_3}; \quad y = \frac{K_3 \frac{l\sqrt{3}}{2}}{K_1 + K_2 + K_3}.$$

Caz particular:

$$K_1 = K_2 = K_3 = K$$

$$x = \frac{\frac{3}{2}l}{3} = \frac{l}{2}; \quad y = \frac{\sqrt{3}l}{6}.$$

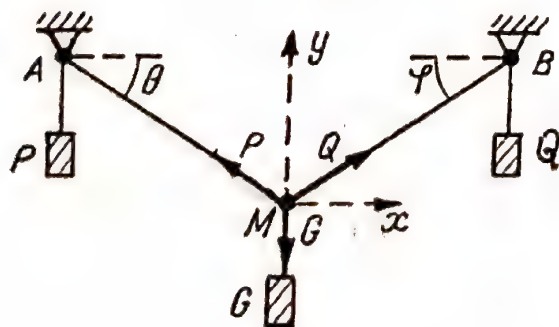
Poziția de echilibru a punctului M coincide cu centrul de simetrie al triunghiului.

4.B.2. De un inel M de greutate neglijabilă sînt prinse trei fire la capetele cărora acționează greutatea P , G și Q . Două dintre fire trec fără frecare prin două inele fixe situate în A și B . Se cere poziția de echilibru a inelului M dată de unghiurile θ și φ (fig. 4.B.2, a).

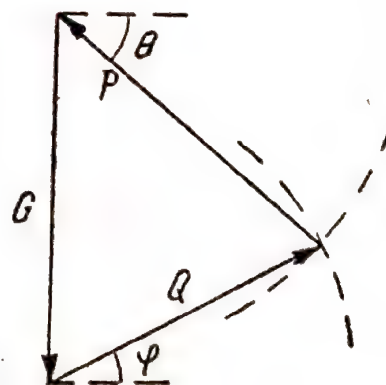
Rezolvare. Se izolează inelul M introducînd forțele care acționează firele respective. Proiectînd după sistemul xMy se obțin ecuațiile de echilibru:

$$(\sum X_i = 0); \quad Q \cos \varphi - P \cos \theta = 0;$$

$$(\sum Y_i = 0); \quad Q \sin \varphi + P \sin \theta - G = 0.$$



a)



b)

Fig. 4.B.2

Rezolvînd sistemul rezultă :

$$\sin \varphi = \frac{Q^2 + G^2 - P^2}{2GQ}; \quad \sin \theta = \frac{P^2 + G^2 - Q^2}{2GP}.$$

Deoarece $\sin \varphi \in [-1; +1]$ și $\sin \theta \in [-1; +1]$, pentru poziția de echilibru trebuie îndeplinite condițiile :

$$-1 \leq \frac{Q^2 + G^2 - P^2}{2GQ} \leq 1; \quad -1 \leq \frac{P^2 + G^2 - Q^2}{2GP} \leq 1.$$

Din aceste condiții rezultă :

$$P \leq Q + G; \quad G \leq Q + P; \quad Q \leq P + G.$$

Soluția grafică.

Pentru ca forțele G , P și Q să fie în echilibru, trebuie ca poligonul forțelor să fie închis. Problema revine la construirea unui triunghi cînd se cunosc mărimile a trei laturi și direcția uneia dintre ele (fig. 4.B.2, b). Din construcția grafică rezultă mărimile unghiurilor θ și φ , relațiile între laturile triunghiului format de forțe regăsind valorile din rezolvarea analitică.

4.B.3. Să se determine tensiunile din cele trei cabluri de prindere ale greutății P , poziția de echilibru M fiind dată de distanțele a , b , c , d și h (fig. 4.B.3).

Rezolvare. Se izolează corpul P , punînd în evidență tensiunile S_1 , S_2 , S_3 ; ecuațiile de echilibru sînt :

$$(\Sigma X_i = 0); \quad S_1 \cos \alpha - S_2 \sin \beta - S_3 \sin \gamma \cdot \cos \delta = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad -S_1 \sin \alpha + S_2 \cos \beta - S_3 \sin \gamma \cdot \sin \delta = 0;$$

$$(\Sigma Z_i = 0); \quad S_3 \cos \gamma - P = 0.$$

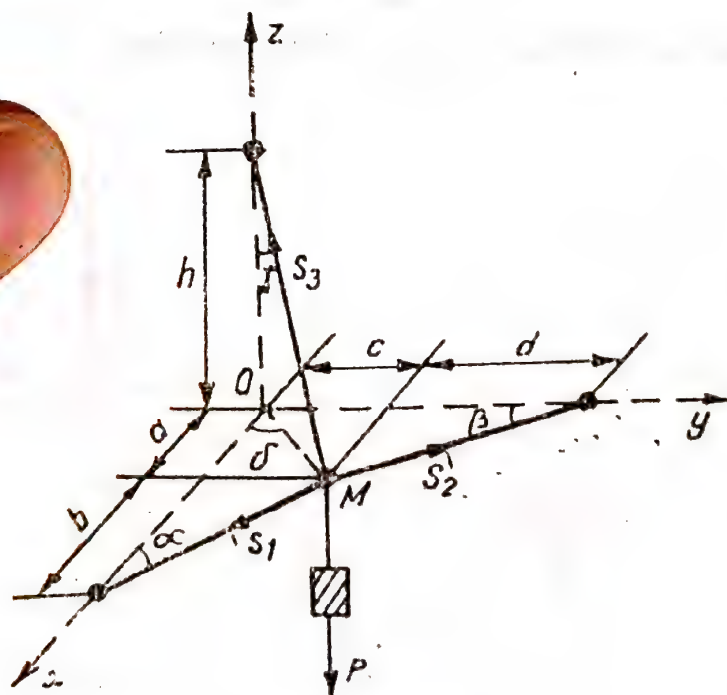


Fig. 4.B.3

Rezolvînd sistemul se obține:

$$S_1 = P \operatorname{tg} \gamma \frac{\cos(\beta - \delta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{P}{h} \cdot \frac{a(d + c)}{bd - ac} \sqrt{b^2 + c^2};$$

$$S_2 = P \operatorname{tg} \gamma \frac{\sin(\alpha + \delta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{P}{h} \cdot \frac{c(a + b)}{bd - ac} \sqrt{a^2 + d^2};$$

$$S_3 = \frac{P}{\cos \gamma} = \frac{P}{h} \sqrt{a^2 + c^2 + h^2}.$$

4.B.4. Un punct material M de greutate G este legat cu un fir de punctul fix A și se sprijină pe un plan înclinat cu unghiul α . Cunoscind unghiul β dintre fir și perete, să se determine forțele de legătură (fig. 4.B.4, a).

Rezolvare. Se eliberează punctul material M de legături punînd în evidență tensiunea S în fir și reacțiunea normală N . Față de sistemul de axe xMy , ecuațiile scalare de echilibru se scriu:

$$(\Sigma X_i = 0); \quad G \sin \alpha - S \sin(\alpha + \beta) = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad N + S \cos(\alpha + \beta) - G \cos \alpha = 0.$$

$$\text{Rezultă: } S = G \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}; \quad N = G \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Soluția grafică.

Se construiește poligonul forțelor începînd cu forța complet cunoscută G , prin extremitățile căreia se duc paralele la direcțiile lui N și S astfel încît poligonul să fie închis (fig. 4.B.4, b). Relațiile ce se deduc din tri-

$$\frac{N}{\sin \beta} = \frac{S}{\sin \alpha} = \frac{G}{\sin(\alpha + \beta)}$$

regăsesc rezultatele obținute din soluțiile analitice.

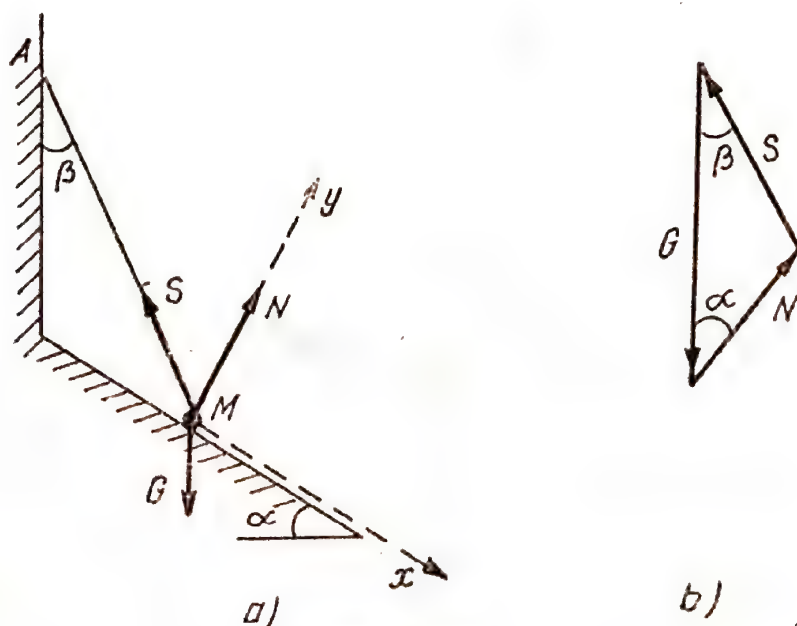


Fig. 4.B.4

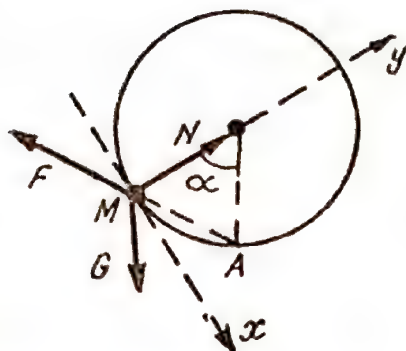


Fig. 4.B.5

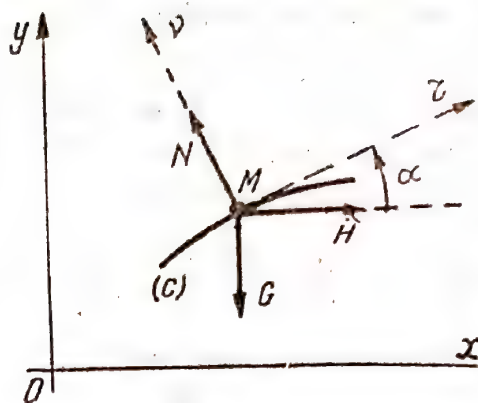


Fig. 4.B.6

4.B.5. Un punct M de greutate G poate aluneca fără frecare pe un cerc, fiind respins de extremitatea inferioară a diametrului vertical al cercului cu o forță F invers proporțională cu pătratul distanței dintre cele două puncte. Să se determine poziția α de echilibru a punctului pe cerc și reacțiunea cercului (fig. 4.B.5).

Rezolvare. Se eliberează inelul M de legătura cu cercul punând în evidență reacțiunea normală N . În sistemul de axe xMy , ecuațiile scalare de proiecție pentru echilibru sînt:

$$(\Sigma X_i = 0); \quad G \sin \alpha - F \cos \frac{\alpha}{2} = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad N - G \cos \alpha - F \sin \frac{\alpha}{2} = 0,$$

unde $F = \frac{k}{AM^2} = \frac{k}{4R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$.

Rezultă soluțiile:

a) $\cos \frac{\alpha}{2} = 0; \quad \alpha = \pi; \quad N = \frac{k}{4R^2} - G;$

b) $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{GR^2}}; \quad N = G.$

4.B.6. Un punct material M de greutate G poate aluneca fără frecare pe curba plană $y = f(x)$, fiind respins (respectiv atras) de o forță orizontală $H = \pm kx$ proporțională cu abscisa punctului (fig. 4.B.6). Să se afle poziția de echilibru a punctului și reacțiunea normală la curbă. Caz particular: a) parabola $y = ax^2$; b) parabola $y^2 = 2px$.

Rezolvare. Se eliberează punctul M de legătură, înlocuind legătura cu reacțiunea N normală la curbă. Se notează cu α unghiul pe care tangenta la curbă îl face cu axa Ox . Proiectînd forțele pe direcția tangentei și normalei la curbă, se obțin:

$$H \cos \alpha - G \sin \alpha = 0;$$

$$N - G \cos \alpha - H \sin \alpha = 0;$$

rezultă: $H = Gy' = \pm kx$ ecuația ce definește poziția de echilibru;

$N = G\sqrt{1 + y'^2}$ reacțiunea normală.

În cazurile particulare date:

a) parabola $y = ax^2$,

se obține soluția $x = 0$ și condiția $k = 2Ga$ ce corespunde unei poziții de echilibru independente de x ; reacțiunea este $N = G\sqrt{1 + 4a^2x^2}$;

b) parabola $y^2 = 2px$,

$$\text{rezultă: } x = \sqrt[3]{\frac{G}{k} \sqrt{\frac{p}{2}}}; \quad N = G\sqrt{1 + \frac{p}{2x}}.$$

4.B.7. Pe un plan înclinat cu unghiul α se află un punct material M de greutate G , asupra căruia acționează o forță P al cărui suport face cu planul un unghi constant β . Dându-se coeficientul de frecare μ pe plan, se cere valoarea lui P pentru care punctul M stă în repaus (fig. 4.B.7).

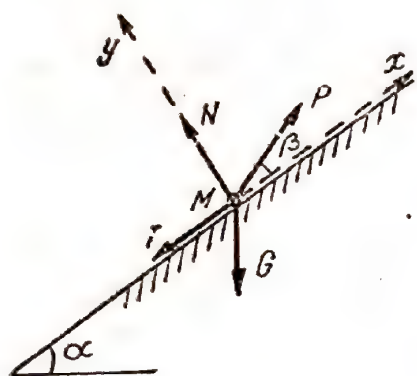


Fig. 4.B.7

Rezolvare. Problema implică două posibilități de mișcare. Presupunând că sub acțiunea forțelor efectiv aplicate G și P , punctul M are tendința de a aluneca în sus, se eliberează punctul de legături introducând forțele de legătură, reacțiunea normală N și forța de frecare T orientată în sens opus, adică în jos.

Ecuațiile scalare de echilibru față de sistemul xMy sînt:

$$(\Sigma X_i = 0); \quad P \cos \beta - G \sin \alpha - T = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad N + P \sin \beta - G \cos \alpha = 0.$$

Se adaugă inecuația $T \leq \mu N$.

Rezolvînd sistemul se obține:

$$P \leq G \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \beta + \mu \sin \beta}$$

sau, punînd $\mu = \operatorname{tg} \varphi$, rezultă:

$$P \leq G \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\beta - \varphi)}$$

dacă $\beta - \varphi < \frac{\pi}{2}$, iar pentru $\beta - \varphi > \frac{\pi}{2}$ lunecarea în sus nu poate apărea.

Dacă tendința de alunecare este în jos, sensul forței T se schimbă, adică este în sus, rezultînd:

$$P \geq G \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \beta - \mu \sin \beta},$$

sau:

$$P \geq G \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\beta + \varphi)},$$

dacă $\beta + \varphi < \frac{\pi}{2}$, iar pentru $\alpha < \varphi$ lunecarea în jos nu poate apărea.

Pentru a avea echilibru trebuie ca :

$$\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\beta + \varphi)} G \leq P \leq G \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\beta - \varphi)}.$$

Pentru ca punctul M să-și păstreze legătura trebuie ca $N > 0$.
Se obține :

$$G \cos \alpha - P \sin \beta \geq 0$$

$$P \leq \frac{G \cos \alpha}{\sin \beta}.$$

— În cazul când $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, cazul general, se observă că valoarea limită $P_* = G \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}$ se află în afara intervalului de valori de sus și echilibrul punctului se poate strica numai prin lunecare.

Deci :

$$G \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\beta + \varphi)} \leq P \leq G \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\alpha - \varphi)} < G < G \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} = P_*.$$

— În cazul când $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$

$$G < G \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\beta + \varphi)} \leq P \leq G \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}.$$

4.B.8. Un inel M de greutate G reazemă pe un cerc vertical cu coeficient de frecare μ , fiind acționat și de forța orizontală $F = G$. Să se determine poziția de echilibru dată de unghiul θ (fig. 4.B.8).

Rezolvare. Se eliberează inelul M de legături introducând forțele de legătură: reacțiunea normală N și forța de frecare T orientată în sus, presupunând tendința de alunecare în jos. Ecuațiile scalare de echilibru, în raport cu sistemul de referință xMy sînt :

$$(\Sigma X_i = 0); \quad G \sin \theta - F \cos \theta - T = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad N - G \cos \theta - F \sin \theta = 0.$$

Se adaugă inecuația: $T \leq \mu N$.

Rezolvînd sistemul și luînd în considerare și tendința de mișcare în sus, se obține pentru echilibru domeniul de variație pentru θ :

$$\frac{1 - \mu}{1 + \mu} \leq \operatorname{tg} \theta \leq \frac{1 + \mu}{1 - \mu}.$$

4.B.9. Un punct material de greutate G se află pe curba plană de ecuație $y = f(x)$, fiind acționat de o forță P avînd direcția tangentei la curbă. Să se determine între ce limite variază raportul $\frac{P}{G}$, dacă punctul ocupă o poziție de echi-

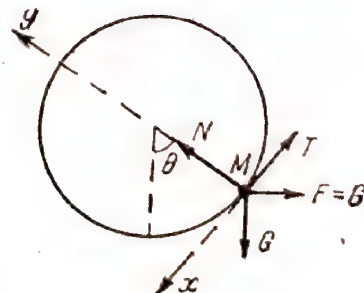


Fig. 4.B.8

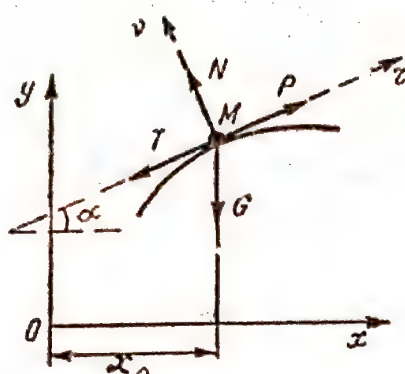


Fig. 4.B.9

libru într-un punct M de abscisă $x = x_0$, coeficientul de frecare fiind μ (fig. 4.B.9). Aplicație numerică: a) $y = \sin x$; $\mu = 0,2$; $x_0 = \frac{\pi}{3}$; b) $y = \frac{x^2}{2} - 1$; $\mu = 0,2$; $x_0 = 1$.

Rezolvare. Se presupune că sub acțiunea forțelor efectiv aplicate G și P , punctul ar avea tendința de alunecare în sus; eliberând punctul de legături, se introduc forțele de legătură: reacțiunea normală N și forța de frecare T orientată în jos. Notînd cu α unghiul pe care tangenta la curbă îl face cu axa Ox , proiecțiile forțelor față de sistemul $\tau M \nu$ conduc la ecuațiile scalare de echilibru:

$$P - G \sin \alpha - T = 0;$$

$$N - G \cos \alpha = 0.$$

Se adaugă inecuația: $T \leq \mu N$.

Rezolvînd sistemul, rezultă:

$$P \leq G(\sin \alpha + \mu \cos \alpha).$$

Deoarece $\tan \alpha = y'$ și ținînd seama și de tendința de mișcare în jos, rezultă pentru echilibru dubla inegalitate:

$$\frac{y'_0 - \mu}{\sqrt{1 + y_0'^2}} \leq \frac{P}{G} \leq \frac{y'_0 + \mu}{\sqrt{1 + y_0'^2}}.$$

Pentru aplicația numerică se obțin valorile:

$$\text{a) } 0,268 \leq \frac{P}{G} \leq 0,627 \quad \text{b) } 0,496 \leq \frac{P}{G} \leq 0,925.$$

4.B.10. Un inel M de greutate G alunecă pe un cerc situat într-un plan vertical. Inelul M este legat cu un fir trecut în punctul B peste un scripete fix avînd la capăt o greutate P (fig. 4.B.10). Cunoscînd coeficientul de frecare μ , să se determine valorile lui P pentru poziția de echilibru.

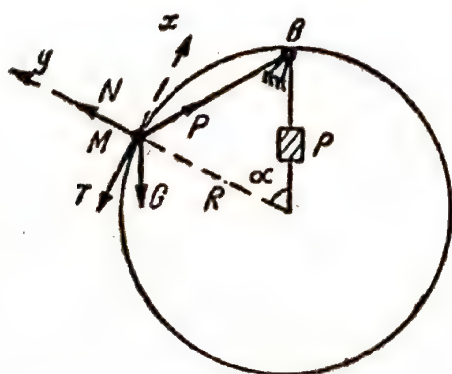


Fig. 4.B.10

Rezolvare. Inelul are două posibilități de mișcare, se consideră tendința de mișcare spre dreapta. Se eliberează punctul M de legături introducînd forțele de legătură: reacțiunea normală N , forța de frecare T opusă mișcării, tensiunea P din fir. Se aleg axele xMy și se proiectează totalitatea forțelor ecuațiilor scalare de echilibru:

$$(\Sigma X_i = 0); \quad P \cos \frac{\alpha}{2} - G \sin \alpha - T = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad N - P \sin \frac{\alpha}{2} - G \cos \alpha = 0.$$

Se adaugă inecuația: $T \leq \mu N$.

Rezolvînd, se obține :

$$P \leq G \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2} - \mu \sin \frac{\alpha}{2}}$$

sau, înlocuind $\operatorname{tg} \varphi = \mu$, rezultă :

$$P \leq G \frac{\sin (\alpha + \varphi)}{\cos \left(\frac{\alpha}{2} + \varphi \right)} \text{ condiția să nu alunece în sus.}$$

Condiția este valabilă pentru $\frac{\alpha}{2} + \varphi < \frac{\pi}{2}$, deci $\frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} - \varphi$.

În cazul tendinței de alunecare în jos, se va schimba sensul forței de frecare T rezultînd :

$$P \geq G \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2} + \mu \sin \frac{\alpha}{2}},$$

sau :

$$P \geq G \frac{\sin (\alpha - \varphi)}{\cos \left(\frac{\alpha}{2} - \varphi \right)}.$$

Condiția este valabilă pentru $\frac{\alpha}{2} - \varphi < \frac{\pi}{2}$, adică $\frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} + \varphi$, deci pentru toate pozițiile inelului pe cerc.

4.B.11. Două inele A și B sînt prinse prin trei fire, poziția de echilibru fiind dată de unghiurile de 60° , 30° și respectiv 45° . Cunoșcînd greutatea P a inelului A , să se determine greutatea Q a inelului B , precum și mărimea tensiunilor în fire (fig. 4.B.11) pentru echilibru.

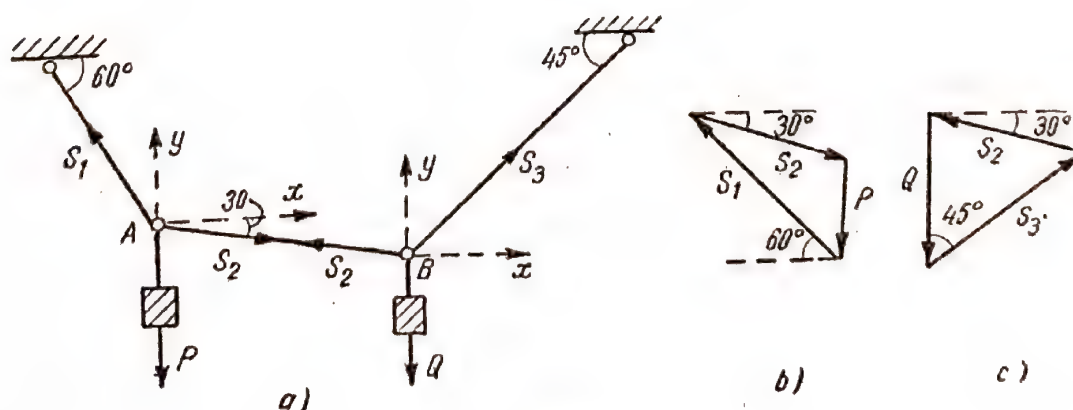


Fig. 4.B.11

Rezolvare. Se eliberează inelele de legături punind în evidență tensiunile S_1 , S_2 și S_3 din fire. Ecuațiile de echilibru sînt:

$$S_2 \cos 30^\circ - S_1 \cos 60^\circ = 0$$

$$S_1 \sin 60^\circ - S_2 \sin 30^\circ - P = 0$$

$$S_2 \cos 30^\circ - S_3 \cos 45^\circ = 0$$

$$S_2 \sin 30^\circ + S_3 \sin 45^\circ - Q = 0.$$

Rezultă:

$$Q = \frac{P}{2} (1 + \sqrt{3}); S_1 = P \sqrt{3}; S_2 = P; S_3 = P \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Soluția grafică. Se construiește poligonul de echilibru al forțelor inelului A (fig. 4.B.11, b), apoi al inelului B (fig. 4.B.11, c).

4.B.12. Se consideră sistemul format din două corpuri A și B legate printr-un fir, rezemînd pe planurile aspre de înclinare α (fig. 4.B.12). Cînuoscînd greutatea G a corpului din stînga și coeficientul μ de frecare de alunecare, să se determine greutatea P a corpului din dreapta pentru echilibru.

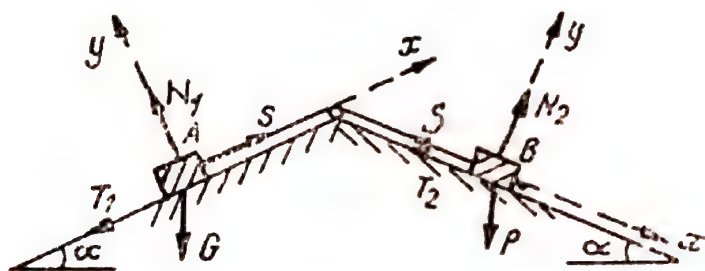


Fig. 4.B.12

Rezolvare. Se eliberează corpurile de legături introducînd tensiunea S din fir, reacțiunile normale N_1 și N_2 , forțele de frecare T_1 și T_2 , considerînd tendința de mișcare spre dreapta. Ecuațiile scalare de echilibru vor fi:

$$S - G \sin \alpha - T_1 = 0;$$

$$N_1 - G \cos \alpha = 0;$$

$$P \sin \alpha - S - T_2 = 0;$$

$$N_2 - P \cos \alpha = 0.$$

Se adaugă inecuațiile $T_1 \leq \mu N_1$ și $T_2 \leq \mu N_2$.

Rezolvînd sistemul de ecuații, luînd în considerare și tendința de mișcare spre stînga, se obțin limitele între care variază P pentru echilibru:

$$G \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha} \leq P \leq G \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}.$$

STATICA SOLIDULUI RIGID LIBER ȘI CU LEGĂTURI

5.A. PREZENTARE TEORETICĂ

5.A.1. Grade de libertate

Un solid rigid liber în spațiu are 6 grade de libertate, adică poziția lui în spațiu depinde de 6 parametri scalari independenți între ei.

Se știe că pentru a fixa, în raport cu un reper $Oxyz$, un solid rigid este suficient să fie fixate trei puncte ale solidului:

$$A(x_1, y_1, z_1), \quad B(x_2, y_2, z_2), \quad C(x_3, y_3, z_3),$$

cu condiția ca cele trei puncte să nu se afle pe o aceeași dreaptă (fig. 5.A.1).

5.A.2. Statica solidului rigid liber

Pentru ca un solid rigid liber, în repaus în raport cu un reper fix $Oxyz$ și acționat de un sistem de forțe, să rămână mai departe în repaus, este necesar și suficient ca torsorul sistemului de forțe compus din:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i; \quad \bar{M} = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{F}_i$$

să fie nul:

$$\bar{R} = 0, \quad \bar{M} = 0, \quad (5.1)$$

adică sistemul de forțe aplicat solidului rigid să se echilibreze.

Cele două condiții vectoriale se traduc prin șase condiții scalare:

$$\begin{aligned} X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \\ M_x = 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

unde X este suma scalarilor proiecțiilor forțelor pe axa Ox și M_x este scalarul momentului rezultat în raport cu axa Ox ; în mod corespunzător se consideră și Y, M_y și Z, M_z .

Cei 6 scalari ai ecuațiilor (5.2) conțin atât caracteristici ale forțelor care acționează, cât și parametri de poziție ai solidului rigid în raport cu reperul fix.

Ecuațiile de echilibru permit rezolvarea problemelor în care necunoscute pot fi atât unele caracteristici ale forțelor, cât și parametri de poziție.

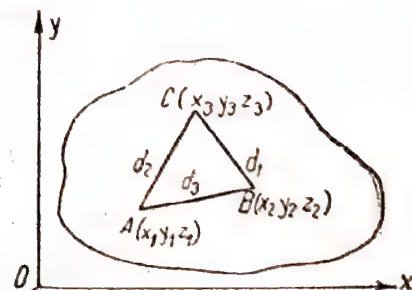


Fig. 5.A.1



Numărul total al acestor necunoscute, care pot fi determinate, nu poate fi mai mare ca 6.

Cazuri particulare. Dacă sistemul de forțe acționează astfel încât suporturile lor să fie situate într-un plan solidar cu solidul, condițiile de echilibru, exprimate scalar în raport cu un reper având axele Ox și Oy în acest plan, se reduc la :

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad M_z = M_0 = 0. \quad (5.3)$$

În cazul în care sistemul de forțe care acționează solidul este cu suporturile paralele, condițiile de echilibru exprimate în raport cu un reper ales cu axa Oz paralelă cu direcția comună a suporturilor, sînt :

$$Z = 0, \quad M_x = 0 \quad \text{și} \quad M_y = 0. \quad (5.4)$$

Dacă solidul este acționat numai de trei forțe, sînt *necesare* următoarele condiții pentru suporturile acestor forțe :

- ori toate trei concurente și distincte,
- ori toate trei paralele și distincte,
- ori toate trei confundate.

Condițiile *nefiind* și *suficiente*, mai trebuie satisfăcute și alte condiții care se deduc ușor pentru diferite cazuri particulare.

5.A.3. Legăturile unui solid, deplasări

În practică, solidele reale au diferite tipuri de legături între ele. Legăturile se realizează în punctele lor comune de contact. Mulțimea acestor puncte poate fi considerată, cu o bună aproximație, ca fiind continuă, constituind o suprafață de contact limitată de o anumită curbă închisă. Această suprafață de contact poate fi datorită unor prelucrări sau consecința deformărilor superficiale cînd solidele reale în contact sînt acționate de forțe.

Legătura pe această suprafață a celor două solide (C) și (C') , (C') fiind considerat fix (fig. 5.A.2), reduce din cele 6 grade de libertate ale lui C permițîndu-i numai anumite deplasări și un anumit număr de grade de libertate $p < 6$, în funcție de tipul legăturii.

Astfel, legătura prin reazem reduce un grad de libertate a solidului (C) , lăsîndu-i $p = 5$. Legătura prin *articulație sferică* suprimă 3 grade de libertate, lăsîndu-i $p = 3$. Legătura prin *articulație cilindrică* suprimă 5 grade de libertate, lăsîndu-i $p = 1$. În sfîrșit, legătura prin *încastrare* nu-i lasă solidului (C) nici o posibilitate de deplasare față de (C') , adică $p = 0$.

Se mai precizează următoarele: aceste legături sînt în spațiul cu trei dimensiuni, fiecare din ele reprezintă un anumit tip *unic* de legătură, se

pot lua în considerare și legături *multiple simultane* prin care se pot suprima un număr anumit de grade de libertate ale solidului (C) . De pildă, suprimarea celor 6 grade de libertate se mai poate realiza și printr-o articulație cilindrică combinată cu un reazem, adică $p = 6 - 5 - 1 = 0$.

Dacă deplasarea unui solid (C) este limitată de condiția ca un plan (P) solidar cu (C) să fie obligat să se deplaseze într-un plan fix (P') , solidul (C) nu mai are decît 3 grade de libertate. Aceasta este deplasarea *plan-paralelă* a unui

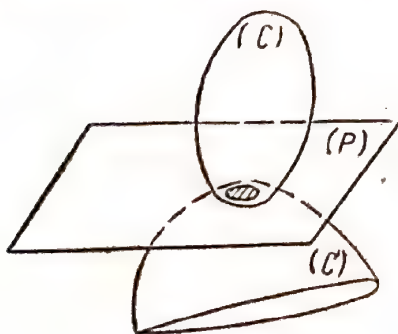


Fig. 5.A.2

solid. Studiul ei se poate face cu ajutorul deplasărilor și a legăturilor unei plăci plane (P) care este obligată să rămână în același plan fix cu o altă placă plană (P') fixă. Placa (P), dacă este liberă în planul fix (P') are 3 grade de libertate. În cazul în care (P) este legată de placa fixă (P') în punctele de contact situate pe un arc de curbă comun AB (fig. 5.A.3), se pot distinge următoarele tipuri de legături:



Fig. 5.A.3

- *reazemul* care reduce numărul gradelor de libertate la 2 și permite plăcii (P) deplasări de alunecare și de rostogolire față de (P');
- *articulația* care reduce la 1 numărul de grade de libertate, permițând plăcii (P) numai rotația față de un punct fix comun (P'). Acestei legături îi corespunde, în spațiul cu trei dimensiuni, articulația cilindrică;
- *incastrarea* care reduce toate gradele de libertate ale plăcii (P) față de (P'). Lucrurile se petrec ca și cum (P) ar avea două puncte fixe comune cu (P'), adică două articulații sau o articulație și un reazem;
- *un solid liber în spațiu poate fi deplasat oricum*. De îndată ce el este legat de un solid fix, tipurile de deplasări sunt limitate la următoarele: *alunecare, rotație, rostogolire* cu diferite variante sau compuneri între aceste tipuri. Cele care prezintă un interes mai mare în aplicații vor fi prezentate mai departe.

Oricare ar fi deplasările permise de legăturile solidului (C) cu solidul (C') fix, toate aceste deplasări ale lui (C) întâmpină opuneri din partea solidului (C') datorită frecărilor care apar în punctele de contact de pe suprafața comună. Aceste opuneri se pot exprima prin sisteme de forțe pasive.

Despre frecări și despre forțele de frecare se știu următoarele:

- ele *nu reduc mai mult numărul gradelor de libertate* rămas solidului (C) după considerarea legăturii respective cu (C');
- forțele de frecare au valori limitate.

5.A.4. Forțe de legătură sau reacțiuni

Dacă legăturile sunt concepute ca ideale, model corespunzător frecărilor foarte mici, neglijabile, forțele de legătură sau reacțiunile sunt distribuite după normalele comune în punctele suprafeței de contact. Ele se numesc *reacțiuni normale*, iar dacă se folosește și modelul rigidității, ele pot primi orice valori în funcție de forțele active.

Dacă se ține seamă și de frecări, acestea sunt legături *tangențiale* și se înlocuiesc prin forțe de legătură sau *reacțiuni tangențiale*. Aceste forțe depind de reacțiunile normale, de caracteristicile fizice ale materialelor suprafețelor celor două solide în contact și de forțele care tind să deplaseze solidul (C) față de (C'). Întotdeauna reacțiunile tangențiale, datorită frecărilor, se opun tendinței de deplasare, au valori *nedeterminate* și *limitate*, valorile lor maxime pot apare numai în momentul în care dispare repausul solidului (C) față de (C').

5.A.5. Ipoteze cu privire la distribuția forțelor de legătură

În general, forțele de legătură sunt distribuite pe o suprafață sau pe o curbă comună de contact. Legile după care ele sunt distribuite se stabilesc experimental. La fel se determină și legile privind frecările. Toate aceste

legi empirice sînt folosite în problemele de mecanică aplicată. În mecanica teoretică, într-un prim studiu aproximativ se admit uneori următoarele ipoteze simplificatoare :

- forțele de legătură normale sînt *uniform* distribuite pe suprafața comună sau pe arcul de curbă comun de contact ;
- frecarea este *izotropă*, adică coeficienții de frecare sînt aceiași în toate direcțiile pe suprafața sau curba de contact.

Dacă la baza studiului teoretic stau aceste ipoteze simplificatoare, se demonstrează că în multe situații lucrurile se petrec, din punct de vedere al așezării forțelor de legătură, ca și cum contactul dintre (C) și (C') , respectiv dintre (P) și (P') , ar fi punctual. Sînt însă unele probleme de frecare, de pildă : frecarea de rostogolire, frecarea de pivotare, frecarea în articulații, în care una din ipoteze sau ambele nu pot fi admise. În aceste cazuri, sistemul forțelor de frecare se reduce și la cupluri de forțe care nu pot acționa într-un singur punct, punctul de contact. Totuși, cum în ecuațiile de echilibru cuplurile sînt reprezentate prin momentele lor, vectori simpli, acești vectori pot fi așezați ca și forțele, în punctul presupus de contact al legăturii schematizate.

5.A.6. Necunoscutele reacțiunilor pentru legăturile curente

Reazemul în spațiu

Reacțiunea normală \bar{N} are suportul dirijat după normala comună \bar{n} (fig. 5.A.4) dusă în punctul O de contact la suprafața solidelor (C) și (C') sensul și modulul necunoscute. Sensul este cunoscut numai dacă legătura este unilaterală.

Forța de frecare de alunecare \bar{T} are suportul care trece prin O , situat în planul tangent (P_t) comun la suprafețele solidelor, direcția și sensul necunoscute, iar modulul limitat de inecuația : $|\bar{T}| \leq \mu |\bar{N}|$, unde μ este coeficientul de frecare de alunecare.

Cuplul de frecare de pivotare este reprezentat prin momentul \bar{M}_p situat pe suportul \bar{N} , sensul opus sensului de pivotare, iar modulul limitat de inecuația $|\bar{M}_p| \leq \mu r' |\bar{N}|$, în care μ este coeficientul de frecare la alunecare, iar r' o lungime depinzînd de caracteristicile geometrice ale suprafeței comune de contact (de obicei o coroană circulară), în care caz :

$$r' = \frac{2}{3} \frac{r^2 + r_1 r_2 + r_2^2}{r_1 + r_2}.$$

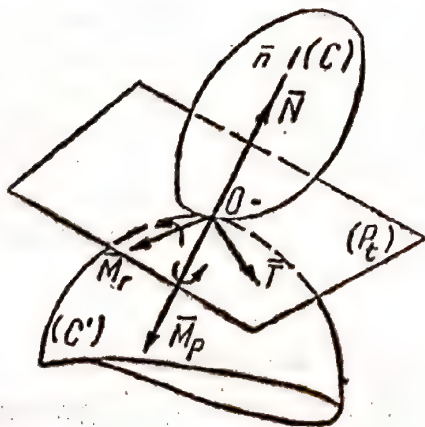


Fig. 5.A.4

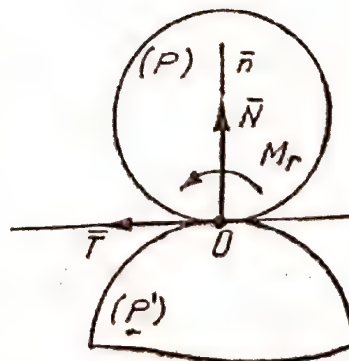


Fig. 5.A.5

Cuplul de frecare de rostogolire este reprezentat prin momentul \bar{M} , situat în planul tangent (P) de direcție și sens necunoscute, iar modulul limitat de inecuația $|\bar{M}_r| \leq s|\bar{N}|$, în care s este coeficientul *liniar* de frecare de rostogolire stabilit experimental în funcție de natura materialelor solidelor în contact.

Reazemul în plan

Reacțiunea normală \bar{N} are suportul dirijat după normala comună¹ \bar{n} (fig. 5.A.5) din punctul O de contact al curbilor care mărginesc plăcile (P) și (P'), sensul și modulul necunoscute. Sensul se cunoaște numai dacă legătura este unilaterală.

Forța de frecare de alunecare \bar{T} are suportul dirijat după tangenta comună din O , sensul opus tendinței de deplasare, modulul limitat de inecuația $|\bar{T}| \leq \mu|\bar{N}|$, unde μ este coeficientul de frecare de alunecare dintre plăcile (P) și (P').

Cuplul de frecare de rostogolire este reprezentat prin momentul \bar{M}_r , perpendicular în O pe planul plăcilor, având sensul necunoscut, iar modulul limitat de inecuația $|\bar{M}_r| \leq s|\bar{N}|$, s fiind coeficientul liniar de frecare de rostogolire.

Articulația sferică

Legătura solidului (C) printr-o articulație sferică (raza sferei r) cu solidul (C') fix, îi permite 3 grade de libertate. Prin reacțiunea \bar{N} normală la suprafețele sferice în punctul de contact al celor două solide (C) și (C'), legătura se opune forțelor active la desprinderea solidelor. Tot în punctul de contact mai apar și frecări, dar care nu se aseamănă cu frecarea de alunecare, deoarece deplasarea solidului (C) față de (C') este complexă, părînd a fi compusă din rostogolire și alunecare. De aceea forța de frecare T din O (fig. 5.A.6) nu poate fi exprimată după legile frecării coulombiene.

Datorită frecărilor în articulație apare și un cuplu de frecare care se opune cuplului activ. Momentul cuplului de frecare în articulație este reprezentat printr-un vector \bar{M}' trecînd prin O , dar cu direcție necunoscută și al cărui modul este limitat de inecuația:

$$|\bar{M}'| \leq \mu' r |\bar{R}'| \quad (5.5)$$

unde: μ' este un coeficient de frecare în articulație determinat experimental, r este raza sferei și \bar{R}' reacțiunea totală din articulație.

În concluzie, într-o articulație sferică, forțele de legătură pot fi reprezentate prin \bar{R}' și \bar{M}' (fig. 5.A.7), $\bar{R}' = X'\bar{i} + Y'\bar{j} + Z'\bar{k}$, unde X' , Y' ,

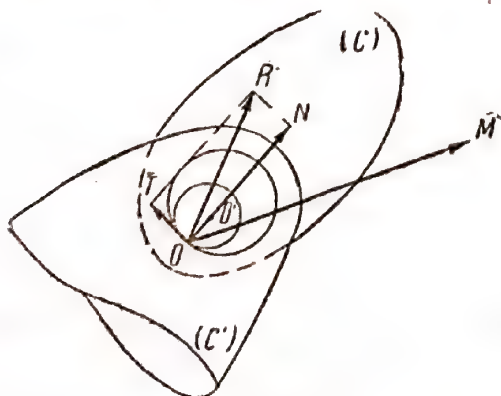


Fig. 5.A.6

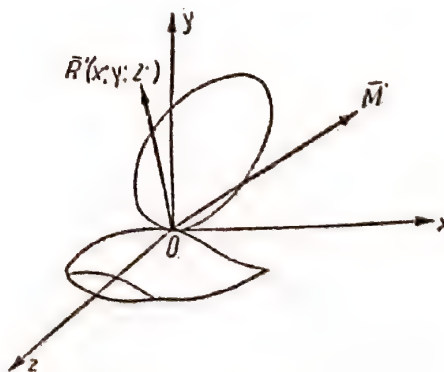


Fig. 5.A.7

¹ numai dacă punctul nu este singular.

Z' sint necunoscutele scalare ale proiecțiilor reacțiunii totale pe cele trei axe ale reperului $Oxyz$, iar \bar{M}' are direcția și sensul necunoscute, modulul limitat de inecuația (5.5).

Articulația cilindrică

Această legătură lasă solidului (C) un singur grad de libertate față de (C') . Dacă se neglijează frecarea, această legătură corespunde cu modelul teoretic a două articulații sferice în două puncte fixe O_1 și O_2 (fig. 5.A.8). Cu această modelare legătura poate fi înlocuită prin reacțiunile $\bar{R}_1(X_1, Y_1, Z_1)$ și $\bar{R}_2(X_2, Y_2, Z_2)$ din cele două articulații sferice. Sînt în total șase necunoscute scalare ale acestor forțe, pentru determinarea cărora se pot scrie cele șase condiții de echilibru al sistemului de forțe date și de legătură. Cu toate acestea sistemul de legături rămîne *simplu static nedeterminat* deoarece în ecuația de momente față de axa Oz , care trece prin cele două articulații, nu pot apare nici una din necunoscutele scalare ale reacțiunilor \bar{R}_1 și \bar{R}_2 . Această ecuație este o condiție pentru parametrul θ al poziției în care trebuie așezat solidul (C) pentru a rămîne în repaus față de (C') .

Observații

Dacă se asimilează articulația cilindrică cu o articulație sferică fără frecare O_1 și un reazem simplu O_2 în care reacțiunea fiind normală pe O_1z , \bar{R}_2 are numai două necunoscute X_2 și Y_2 , în aceste condiții sistemul devine *static determinat*, ultima ecuație de momente în raport cu O_1z servind, la fel, pentru determinarea parametrului θ .

Mai mult, reazemul O_2 poate fi considerat ca un fus, lagăr etc. și se poate adăuga și cuplul de frecare corespunzător al cărui moment este limitat de:

$$|\bar{M}_2| \leq \mu' r |\bar{R}_2|.$$

Articulația în plan

Aceasta este asemănătoare articulației cilindrice în spațiu în forma prezentată la observații. Legătura îi mai lasă plăcii (P) un singur grad de libertate față de (P') . Legătura poate fi înlocuită prin reacțiunea $\bar{R}'(X', Y')$ din O , necunoscute fiind X' , Y' (fig. 5.A.9). Cea de-a treia necunoscută este θ , parametrul scalar al poziției de repaus a plăcii (P) față de (P') . Dacă articulația este cu frecare (frecare în fusul O), momentul \bar{M}' necunoscut.

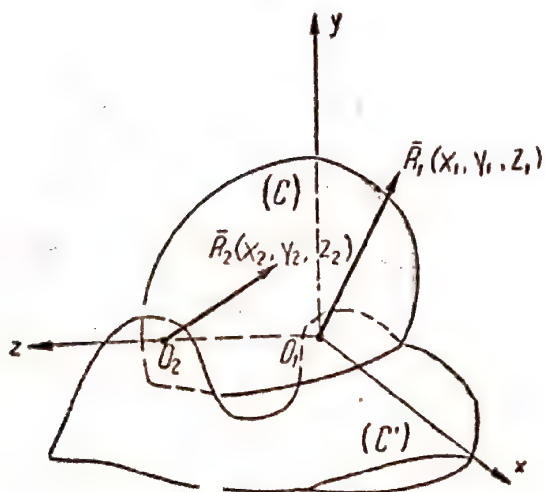


Fig. 5.A.8

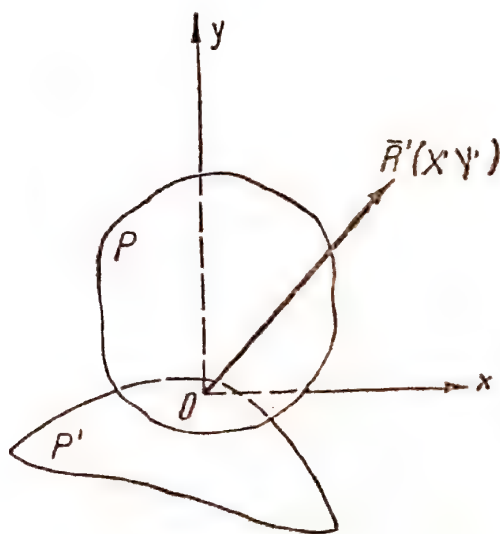


Fig. 5.A.9

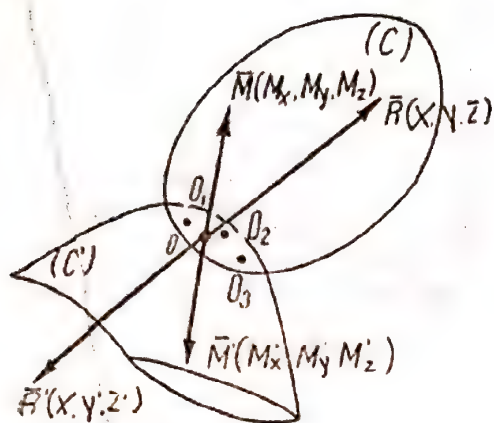


Fig. 5.A.10

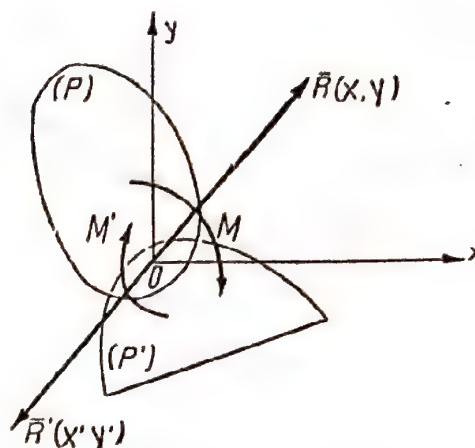


Fig. 5.A.11

al cuplului de frecare are direcția perpendiculară pe planul plăcilor, sensul necunoscut, iar modulul limitat de inecuația:

$$|\bar{M}'| \leq \mu' r |\bar{R}'|,$$

unde μ' este coeficientul de frecare a fusului, r raza fusului și \bar{R}' — reacțiunea totală din fus.

Încăstrarea este legătura care suprimă solidului (C) toate gradele de libertate față de solidul (C'). În acest scop solidele trebuie să aibă cel puțin trei puncte comune O_1 , O_2 și O_3 nesituate pe o linie dreaptă (fig. 5.A.10). În realitate legătura se face pe o mulțime de puncte situate pe o suprafață complexă comună. Din această cauză forțele de legătură nu pot fi determinate static. De aceea, în mecanică, o încăstrare este considerată, în ansamblu, ca legătura care prin forțele ei de legătură echilibrează torsorul forțelor date \bar{R} , \bar{M} , obținut în orice punct O al încăstrării (fig. 5.A.10). Cu alte cuvinte, încăstrarea poate fi înlocuită în O printr-un torsor \bar{R}' , \bar{M}' necunoscut dar care poate fi determinat prin ecuațiile vectoriale:

$$\bar{R}' + \bar{R} = 0; \quad \bar{M}' + \bar{M} = 0,$$

respectiv prin ecuațiile scalare:

$$\begin{aligned} X' + X &= 0; & Y' + Y &= 0; & Z' + Z &= 0; \\ M'_x + M_x &= 0; & M'_y + M_y &= 0; & M'_z + M_z &= 0. \end{aligned}$$

Observație.

În cazul unei plăci plane (P) încăstrată în placa fixă (P') în planul ei (fig. 5.A.11), legătura se înlocuiește printr-o forță $\bar{R}'(X', Y')$ necunoscută dar cu suportul trecând prin punctul O reprezentând încăstrarea și printr-un cuplu de moment \bar{M} perpendicular pe planul fix, având modulul și sensul necunoscute care pot fi determinate prin ecuațiile scalare:

$$X' + X = 0; \quad Y' + Y = 0; \quad M' + M = 0.$$

5.A.7. Indicații cu privire la rezolvarea problemelor de statica solidului

Sînt corespunzătoare celor date la statica punctului material cu legături și constau din: analiza aspectului fizic al problemei, notarea datelor (forțe date, poziții de repaus dacă sînt cunoscute, coeficienți de frecare

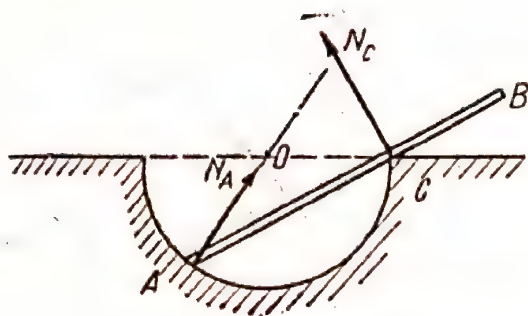


Fig. 5.A.12

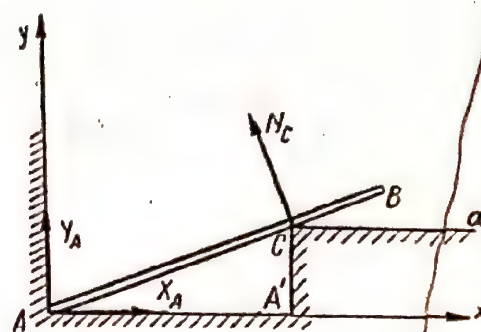


Fig. 5.A.13

etc.), înlocuirea legăturilor prin forțe de legătură scoțându-se în evidență caracteristicile cunoscute și cele necunoscute ale acestor forțe, adică să se ajungă la eliberarea solidului de legături, alegerea celui mai convenabil sistem de referință, scrierea condițiilor scalare de echilibru pentru sistemul de forțe date și de legătură (inclusiv forțele datorită frecărilor), completarea ecuațiilor privind forțele de frecare și momentele cuplurilor de frecare, rezolvarea sistemului de ecuații și inecuații și interpretarea fizică sau chiar tehnică a rezultatului obținut.

O atenție deosebită trebuie dată cazurilor în care contactele fiind considerate punctuale, punctele de legătură sînt singulare pentru unul sau chiar pentru ambele solide.

În asemenea cazuri se poate greși cu ușurință atât la reprezentarea forțelor de legătură cît și la calculul lor.

Astfel, în cazul unei bare drepte AB rezemată în A și C pe un contur format dintr-un semicerc continuat cu o dreaptă (fig. 5.A.12), punctul A este singular pentru bară dar ordinar pentru cerc, iar punctul C este singular pentru conturul cerc-dreaptă și ordinar pentru bară.

În asemenea situații, în baza principiului egalității acțiunii și reacțiunii, direcția reacțiunii normale este normală la curba care în punctul de contact nu prezintă singularitate.

Însă, dacă punctul de contact este singular pentru ambele solide, cum este cazul barei AB care are în A un contact obligat cu colțul unghiului drept al conturului $AA'Cd$ (fig. 5.A.13), în asemenea cazuri nu se cunoaște în prealabil direcția forței de legătură normală. Lucrurile se petrec ca și cum în A ar fi un punct de articulație pentru bară, iar forța de legătură are două componente X_A , Y_A necunoscute dacă sistemul este plan și trei componente necunoscute dacă sistemul este în spațiu.

5.B. APLICAȚII LA STATICA SOLIDULUI RIGID, LIBER ȘI CU LEGĂTURI

5.B.1. Bara AB omogenă, de greutate G și lungime $2l$ este rezemată în A de un perete vertical, iar în C de muchia unui alt perete, situat la distanța a de primul (fig. 5.B.1). Contactul are loc fără frecare.

Să se determine unghiul θ de înclinație al barei față de orizontală în poziția de repaus, precum și reacțiunile din reazemele A și C .

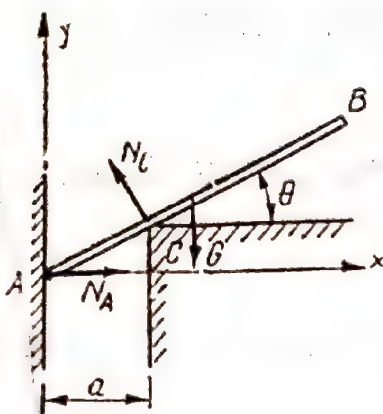


Fig. 5.B.1

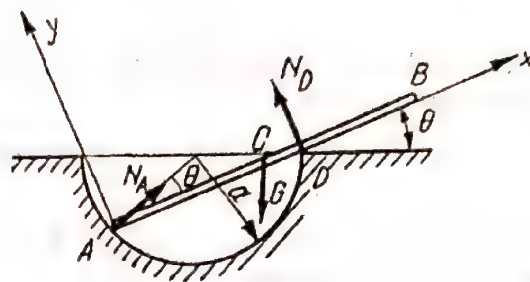


Fig. 5.B.2

Rezolvare. Se eliberează bara de legături prin introducerea reacțiunilor în reazemele A și C, fiecare reacțiune avînd ca direcție normală la suprafața care nu prezintă punct singular în punctul de contact.

Pentru obținerea unor ecuații de proiecții cît mai simple, se alege sistemul de referință xOy astfel încît să se proiecteze cît mai multe forțe în ade-vărata mărime.

Ecuațiile scalare de echilibru sînt:

$$\begin{aligned}\Sigma X_i &= 0; & N_A - N_C \sin \theta &= 0, \\ \Sigma Y_i &= 0; & N_C \cos \theta - G &= 0, \\ \Sigma M_A &= 0; & -Gl \cos \theta + N_C \frac{a}{\cos \theta} &= 0.\end{aligned}$$

Rezolvînd sistemul de ecuații se obține pentru poziția de echilibru:

$$\cos \theta = \sqrt[3]{\frac{a}{l}}.$$

Pentru ca echilibrul să fie posibil:

$$\sqrt[3]{\frac{a}{l}} \leq 1, \text{ deci } a \leq l.$$

Reacțiunile vor fi:

$$N_A = G \sqrt{\left(\frac{l}{a}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}; \quad N_C = G \sqrt[3]{\frac{l}{a}}.$$

5.B.2. O bară AB omogenă de greutate G și lungime $2l$ este așezată în interiorul unei semisfere de rază a (fig. 5.B.2).

Să se determine unghiul θ de înclinație al barei față de orizontală în poziția de repaus, precum și reacțiunile din reazemele A și D.

Rezolvare. Se eliberează bara de legături, prin introducerea reacțiunilor în reazemele A și D. Alegînd sistemul de referință xAy , ecuațiile scalare de echilibru sînt:

$$\begin{aligned}\Sigma X_i &= 0; & N_A \cos \theta - G \sin \theta &= 0; \\ \Sigma Y_i &= 0; & N_A \sin \theta - G \cos \theta + N_D &= 0; \\ \Sigma M_A &= 0; & N_D 2a \cos \theta - Gl \cos \theta &= 0.\end{aligned}$$

Rezolvând acest sistem, se obține pentru poziția de echilibru :

$$\cos \theta = \frac{l \pm \sqrt{l^2 + 32a^2}}{8a}.$$

Este valabilă rădăcina corespunzătoare semnelui „+”. Echilibrul este posibil pentru $\cos \theta \leq 1$:

$$\frac{l + \sqrt{l^2 + 32a^2}}{8a} \leq 1,$$

de unde rezultă condiția $l \leq 2a$, deci centrul de greutate C al barei trebuie să se găsească în stînga punctului D .

Reacțiunile vor fi :

$$N_A = G \operatorname{tg} \theta; \quad N_D = \frac{Gl}{2a}.$$

5.B.3. O bară AB omogenă de greutate G și lungime l se reazemă cu capetele pe două plane înclinate cu unghiurile α , respectiv β față de orizontală (fig. 5.B.3.). Contactul are loc fără frecare.

Să se determine unghiul φ de înclinație al barei față de planul AC , în poziția de repaus, de asemenea reacțiunile.

Rezolvare. Se eliberează bara de legături introducînd reacțiunile corespunzătoare în reazemele A și B , apoi se scriu ecuațiile scalare de echilibru în raport cu sistemul de referință ales în figură.

$$\Sigma X_i = 0; \quad N_A \sin \alpha - N_B \sin \beta = 0;$$

$$\Sigma Y_i = 0; \quad N_A \cos \alpha - G + N_B \cos \beta = 0;$$

$$\Sigma M_B = 0; \quad -N_A l \cos \varphi + G \frac{l}{2} \cos (\varphi - \alpha) = 0.$$

Rezolvînd sistemul de ecuații rezultă :

$$N_A = \frac{G \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}; \quad N_B = \frac{G \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)};$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2 \sin \beta}{\sin \alpha \sin (\alpha + \beta)} - \operatorname{ctg} \alpha.$$

5.B.4. Bara AB omogenă, de greutate G și lungime $2l$ este rezemată într-un locaș de secțiune dreptunghiulară (fig. 5.B.4).

Cunoscînd distanța a și unghiul α , să se determine reacțiunile din reazemele A și C .

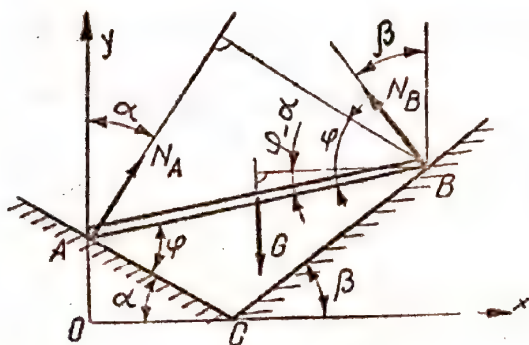


Fig. 5.B.3

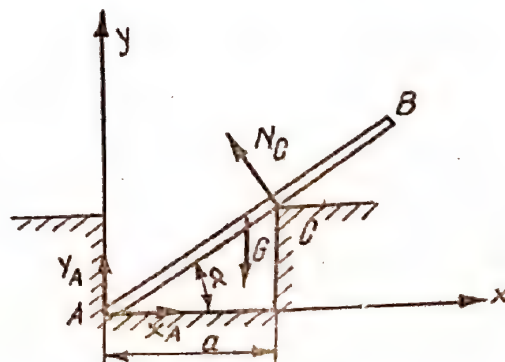


Fig. 5.B.4

Rezolvare. Se eliberează bara de legături, prin introducerea reacțiunilor X_A , Y_A și N_c .

Alegînd sistemul de referință ca în figură, ecuațiile scalare de echilibru sînt:

$$\Sigma X_i = 0; \quad X_A - N_c \sin \alpha = 0;$$

$$\Sigma Y_i = 0; \quad Y_A - G + N_c \cos \alpha = 0;$$

$$\Sigma M_A = 0; \quad N_c \frac{a}{\cos \alpha} - Gl \cos \alpha = 0,$$

de unde se obțin valorile reacțiunilor:

$$X_A = G \frac{l}{a} \sin \alpha \cos^2 \alpha; \quad Y_A = G \left(1 - \frac{l}{a} \cos^3 \alpha \right).$$

Deci:

$$R_A = G \sqrt{1 + \frac{l}{a} \cos^3 \alpha \left(\frac{l}{a} \cos \alpha - 2 \right)}.$$

Iar:

$$N_c = G \frac{l}{a} \cos^2 \alpha.$$

5.B.5. O bară OA omogenă, de greutate G și lungime $2l$ este articulată în punctul fix O , iar extremitatea A a barei este prinsă cu un fir, petrecut peste scripetele B , aflat pe orizontala punctului O la distanța $OB = l$. De capătul firului este suspendată greutatea P cunoscută (fig. 5.B.5, *a*). Să se determine unghiul θ pe care îl face bara cu orizontala în poziția de repaus, de asemenea forțele de legătură.

Rezolvare. Se eliberează bara de legături, introducînd cele două componente necunoscute X_0 și Y_0 ale forței de legătură \vec{R}_0 din articulația O și forța de tensiune din fir $|\vec{S}| = |\vec{P}|$. În sistemul de referință ales, ecuațiile scalare de echilibru sînt:

$$\Sigma X_i = 0; \quad -X_0 + S \sin \frac{\theta}{2} = 0;$$

$$\Sigma Y_i = 0; \quad Y_0 - G + S \cos \frac{\theta}{2} = 0;$$

$$\Sigma M_0 = 0; \quad -Gl \cos \theta + S 2l \cos \frac{\theta}{2} = 0.$$

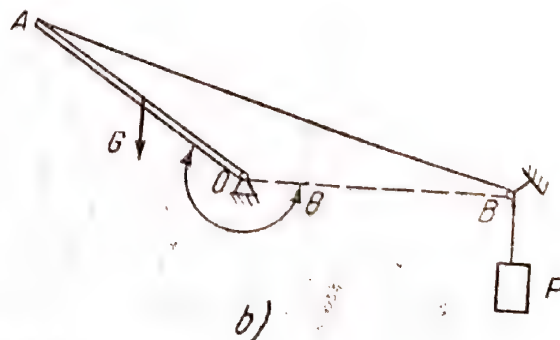
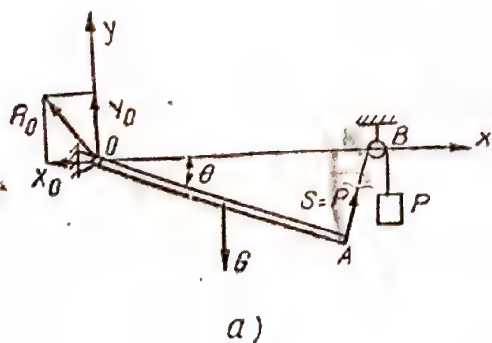


Fig. 5.B.5

Înlocuind $S = P$ în ecuația de momente, se obține pentru poziția de echilibru:

$$\cos \frac{\theta}{2} = \frac{P \pm \sqrt{P^2 + 2G^2}}{2G}.$$

Analizînd rezultatul se constată că ambele soluții corespund. Soluția cu semnul (+) corespunde numai dacă $P < \frac{G}{2}$. Soluția cu semnul (−) corespunde cazului reprezentat în figura 5.B.5.b.

Înlocuind unghiul θ în celelalte ecuații de echilibru se obțin X_0 , Y_0 , respectiv R_0 .

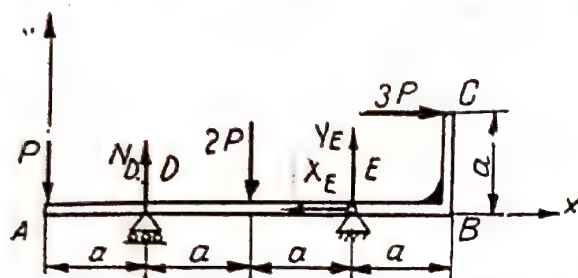


Fig. 5.B.6

5.B.6. Grinda ABC, de greutate neglijabilă, avînd forma și dimensiunile indicate în figura 5.B.6, este rezemată în punctul D și articulată în punctul E. Asupra grinzii acționează forțele verticale P respectiv $2P$ și o forță orizontală $3P$, reprezentate în figură. Să se determine reacțiunile din reazemul D și articulația E.

Rezolvare. Se înlocuiesc legăturile cu reacțiunile corespunzătoare și se scriu ecuațiile scalare de echilibru:

$$\Sigma X_i = 0; \quad -X_E + 3P = 0;$$

$$\Sigma Y_i = 0; \quad -P + N_D - 2P + Y_E = 0;$$

$$\Sigma M_E = 0; \quad P \cdot 3a - N_D \cdot 2a + 2P \cdot a - 3P \cdot a = 0.$$

Rezolvînd sistemul de ecuații, se obține:

$$N_D = P; \quad X_E = 3P; \quad Y_E = 2P,$$

respectiv

$$R_E = P \sqrt{13}.$$

5.B.7. O grindă cotită OABC, de greutate neglijabilă, este încastrată la extremitatea O. Forma, dimensiunile și încărcarea grinzii sînt date în figura 5.B.7. Să se determine torsorul forțelor de legătură din încastrarea O.

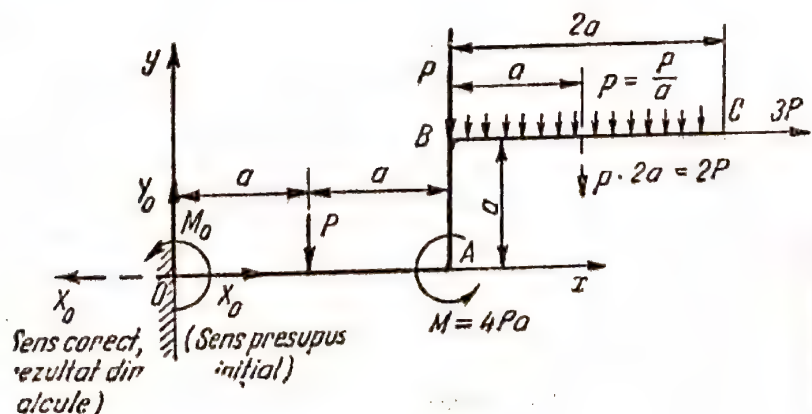


Fig. 5.B.7

Rezolvare. Se alege sistemul de referință xOy (fig. 5.B.7). Se eliberează grinda de legături, înlocuind încastrarea O cu tursorul forțelor de legătură format din reacțiunea \vec{R}_O de componente X_O , Y_O și cuplul de moment M_O . Sarcina $p = \frac{P}{a}$ uniform distribuită pe porțiunea $BC = 2a$, se înlocuiește cu rezultanta $p \cdot 2a = 2P$ aplicată în centrul de greutate, deci la jumătatea intervalului BC . Se scriu ecuațiile scalare de echilibru:

$$\Sigma X_i = 0; \quad X_O + 3P = 0;$$

$$\Sigma Y_i = 0; \quad Y_O - P - P - 2P = 0;$$

$$\Sigma M_O = 0; \quad M_O - Pa + 4Pa - P2a - 2P3a - 3Pa = 0.$$

Rezolvând sistemul de ecuații, rezultă:

$X_O = -3P$ (semnul minus arată că sensul componentei X_O este invers celui inițial ales în figură, sensul corect fiind reprezentat cu linie întreruptă);

$$Y_O = 4P, \text{ respectiv } |\vec{R}_O| = 5P; \quad M_O = 8Pa.$$

5.B.8. O emisferă omogenă de greutate G și rază R este așezată cu partea convexă pe un plan orizontal. În punctul B al emisferei este agățată greutatea Q . Să se determine unghiul φ format în poziția de repaus de axa de simetrie a emisferei cu verticala (fig. 5.B.8).

Rezolvare. Se înlocuiește reazemul A cu forța de legătură normală N . Dintre ecuațiile scalare de echilibru se utilizează numai suma de momente, în care apare ca necunoscută doar unghiul φ cerut.

$$\Sigma M_A = 0; \quad GOC \sin \varphi - QR \cos \varphi = 0;$$

unde $OC = \frac{3}{8} R$ (v. cap. „Centre de greutate”).

$$\text{Rezultă: } \operatorname{tg} \varphi = \frac{8Q}{3G}.$$

5.B.9. Bara cotită ABC , omogenă, de greutate P , cu laturile $AB = l$ și $BC = 2l$ formînd un unghi $\varphi = 60^\circ$, este suspendată de capătul A printr-un fir fixat în punctul D (fig. 5.B.9). Să se determine unghiul α al laturii BC cu orizontala, pentru poziția de repaus.

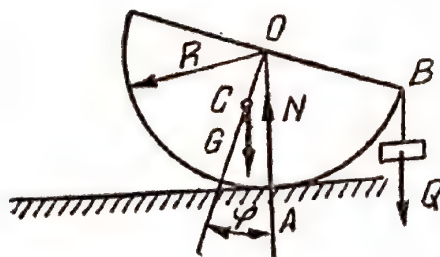


Fig. 5.B.8

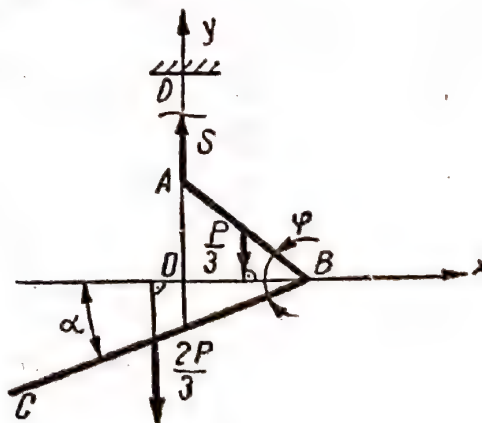


Fig. 5.B.9

Rezolvare. Se izolează bara, introducând tensiunea S în fir și se scriu ecuațiile scalare de echilibru :

$$\Sigma Y_i = 0; \quad S - \frac{P}{3} - \frac{2P}{3} = 0;$$

$$\Sigma M_A = 0; \quad \frac{2P}{3} [l \cos \alpha - l \cos (\varphi - \alpha)] - \frac{P}{3} \frac{l}{2} \cos (\varphi - \alpha) = 0,$$

Rezultă : $S = P$ și $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4 - 5 \cos \varphi}{5 \sin \varphi}$.

Pentru

$$\varphi = 60^\circ; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5},$$

respectiv

$$\alpha \approx 19^\circ 7'.$$

5.B.10. Un cub omogen de greutate G și latură a , cu fața $ABCD$ conținută într-un plan orizontal, este articulat în A și simplu rezemat în B și D , iar în punctul I este prins cu un fir orizontal în prelungirea muchiei EI , fixat în J (fig. 3.B.10). Asupra cubului acționează forțele P și Q , de-a lungul muchiilor HI , respectiv IE . Să se determine reacțiunile din A , B și D , precum și tensiunea în firul IJ .

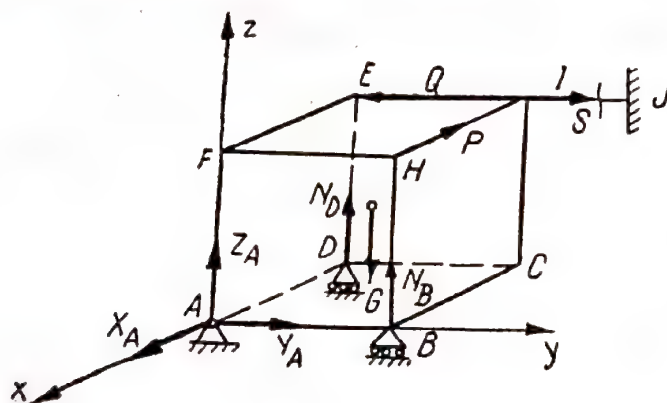


Fig. 5.B.10

Rezolvare. Se înlocuiesc legăturile cu forțele de legătură corespunzătoare și se scriu ecuațiile scalare de echilibru, în raport cu sistemul de referință ales în figură.

$$\Sigma X_i = 0; \quad X_A - P = 0;$$

$$\Sigma Y_i = 0; \quad Y_A - Q + S = 0;$$

$$\Sigma Z_i = 0; \quad Z_A + N_D + N_B - G = 0;$$

$$\Sigma M_x = 0; \quad Qa + N_B a - Sa - G \frac{a}{2} = 0;$$

$$\Sigma M_y = 0; \quad N_D a - Pa - G \frac{a}{2} = 0;$$

$$\Sigma M_z = 0; \quad Qa + Pa - Sa = 0.$$

Rezolvînd sistemul de ecuații se obține :

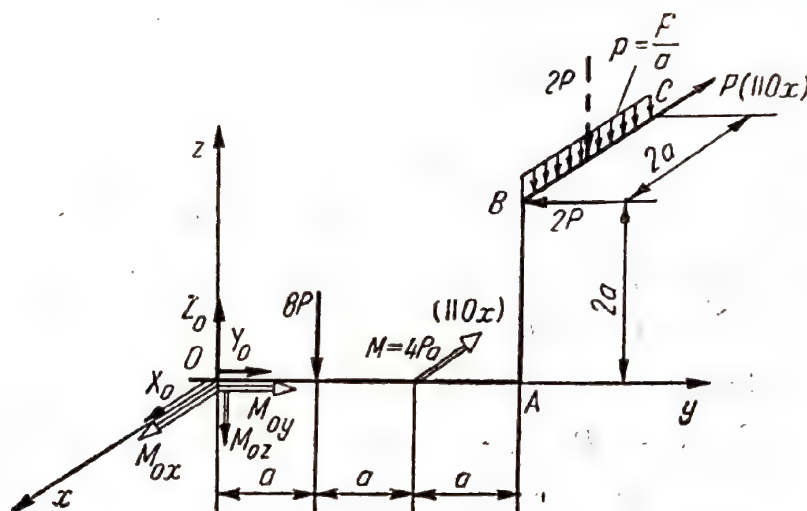
$$X_A = P; \quad Y_A = -P; \quad Z_A = -2P.$$

Semnul minus arată că sensul componentelor Y_A și Z_A este invers celui inițial ales în figură.

$$R_A = P\sqrt{6}; \quad N_D = N_B = \frac{2P+G}{2}; \quad S = P+Q.$$

5.B.11. O grindă cotită $OABC$, de greutate neglijabilă, este încastrată la extremitatea O . Forma, dimensiunile și încărcarea grinzii sînt date în figura 5.B.11. Să se determine torsorul forțelor de legătură din încadrarea O .

Fig. 5.B.11



Rezolvare. Se alege sistemul de referință $Oxyz$ (fig. 5.B.11). Se înlocuiește încadrarea O cu torsorul forțelor de legătură format din reacțiunea \bar{R}_O de componente X_O, Y_O, Z_O și cuplul de moment \bar{M}_O , de componente M_{Ox}, M_{Oy} și M_{Oz} . Se scriu ecuațiile scalare de echilibru :

$$\Sigma X_i = 0; \quad X_O - P = 0;$$

$$\Sigma Y_i = 0; \quad Y_O - 2P = 0;$$

$$\Sigma Z_i = 0; \quad Z_O - 8P - 2P = 0;$$

$$\Sigma M_{xi} = 0; \quad M_{Ox} - 8Pa - 4Pa + 4Pa - 6Pa = 0;$$

$$\Sigma M_{yi} = 0; \quad M_{Oy} - 2Pa - 2Pa = 0;$$

$$\Sigma M_{zi} = 0; \quad 3Pa - M_{Oz} = 0.$$

Rezolvînd sistemul de ecuații, rezultă :

$$X_O = P; \quad Y_O = 2P; \quad Z_O = 10P,$$

$$\text{respectiv, } |\bar{R}_O| = \sqrt{105}P = 10,25P;$$

$$M_{Ox} = 14Pa; \quad M_{Oy} = 4Pa; \quad M_{Oz} = 3Pa,$$

$$\text{respectiv, } |\bar{M}_O| = \sqrt{221}Pa = 14,87Pa.$$

5.B.12. Cadrul $ABDC_3EF$ este compus din tronsoanele (1), (2) și (4) de lungime l și greutate G fiecare, respectiv tronsonul (3) de lungime l și greutate $2G$, tronsoanele fiind dispuse ca în figura 5.B.12. Cadrul are o articulație sferică în A , două reazeme în B și F și o legătură prin firul C_3H . Asupra cadrului acționează forțele concentrate P și Q , precum și sarcina p uniform distribuită pe porțiunea $DE = 2l$. Să se determine reacțiunile din articulația sferică A , reazemele B și F și tensiunea din firul C_3H .

Rezolvare. Se alege sistemul de referință $Axyz$ (fig. 5.B.12). Se eliberează cadrul de legături, înlocuind articulația A cu reacțiunea \vec{R}_A de componente X_A, Y_A și Z_A , reazemele B și F cu reacțiunile N_B , respectiv N_F , iar firul C_3H cu tensiunea S din fir. Sarcina p uniform distribuită pe intervalul $DE = 2l$ se înlocuiește cu rezultanta $2pl$ aplicată în centrul de greutate C_3 , deci la jumătatea intervalului DE . Se scriu ecuațiile scalare de echilibru :

$$\Sigma X_i = 0; \quad X_A - P = 0;$$

$$\Sigma Y_i = 0; \quad Y_A + S - Q = 0;$$

$$\Sigma Z_i = 0; \quad Z_A + N_B + N_F - 5G - 2pl = 0;$$

$$\Sigma M_{x_i} = 0; \quad -G \frac{l}{2} + N_B l - Gl - 2Gl - 2pl^2 - Gl + N_F l - Sl + Ql = 0;$$

$$\Sigma M_{y_i} = 0; \quad -Pl - 2pl^2 - 2Gl - Gl + N_F l = 0;$$

$$\Sigma M_{z_i} = 0; \quad Pl - Sl + Q2l = 0.$$

Rezolvînd sistemul de ecuații, rezultă :

$$X_A = P; \quad Y_A = -P - Q; \quad Z_A = \frac{G}{2} - P - Q;$$

$$N_B = \frac{3G}{2} + Q; \quad N_F = 3G + P + 2pl; \quad S = P + 2Q.$$

5.B.13. O bară AB omogenă, de greutate G și lungime l , este prinsă de capătul A cu un fir de lungime $OA = l$, fixat în O , iar capătul B se reazemă cu frecare pe un perete vertical (fig. 5.B.13). Cunoșcînd valoarea coeficientului de frecare μ , să se determine unghiul θ , pe care îl face bara cu verticala, în poziția de echilibru, de asemenea valorile reacțiunilor.

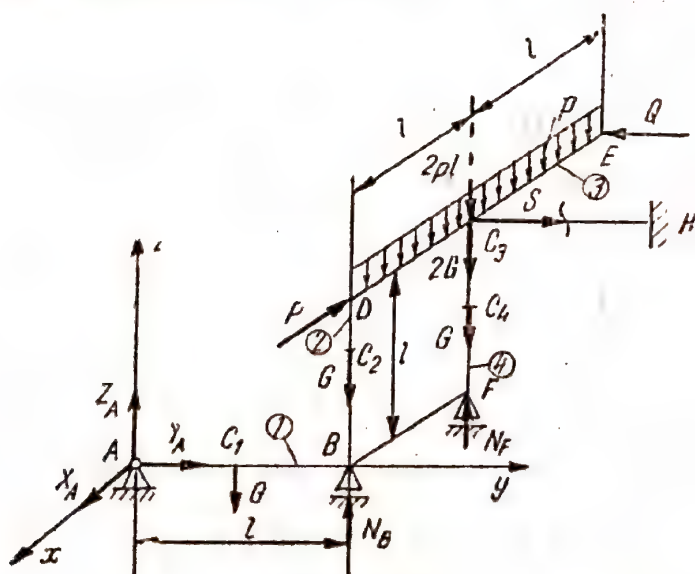


Fig. 5.B.12

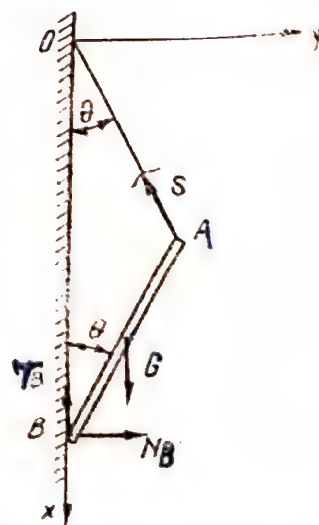


Fig. 5.B.13

Rezolvare. Se eliberează bara de legături, introducând reacțiunea normală la perete N_B , forța de frecare T_B , opusă tendinței de mișcare, și tensiunea în fir S .

Se scriu ecuațiile scalare de echilibru în raport cu sistemul de referință ales în figură:

$$\Sigma X_i = 0; \quad -T_B + G - S \cos \theta = 0;$$

$$\Sigma Y_i = 0; \quad N_B - S \sin \theta = 0;$$

$$\Sigma M_o = 0; \quad N_B 2l \cos \theta - G \frac{l}{2} \sin \theta = 0.$$

Se adaugă inecuația: $T_B \leq \mu N_B$.

Rezolvînd sistemul, se obține:

$$\operatorname{tg} \theta \geq \frac{3}{\mu}; \quad \text{respectiv} \quad \theta \geq \arctg \frac{3}{\mu};$$

$$N_B \geq \frac{3}{4\mu} G; \quad S \geq \frac{G}{4\mu} \sqrt{9 + \mu^2}.$$

5.B.14. O scară AB , de lungime l și greutate neglijabilă, se reazemă cu frecare în A pe un plan orizontal (coeficient de frecare μ_1) și în B pe un perete vertical (coeficient de frecare μ_2), față de care este înclinată cu un unghi θ dat (fig. 5.B.14). Să se determine distanța x pînă la care se poate urca un om de greutate G pe scară, fără ca scara să alunece.

Rezolvare. Se eliberează solidul de legături și se scriu ecuațiile scalare de echilibru:

$$\Sigma X_i = 0; \quad N_A - T_A = 0;$$

$$\Sigma Y_i = 0; \quad N_B - G = 0;$$

$$\Sigma M_o = 0; \quad N_A l \sin \theta - G(l - x) \sin \theta - N_B l \cos \theta = 0.$$

Se adaugă inecuațiile:

$$T_A \leq \mu_1 N_A; \quad T_B \leq \mu_2 N_B.$$

Rezolvînd sistemul, se obține:

$$x \leq \frac{\mu_1(\mu_2 + \operatorname{ctg} \theta) l}{1 + \mu_1 \mu_2}.$$

Problema se pretează la o rezolvare grafică cu ajutorul unghiurilor de frecare φ_1 și φ_2 :

$$\varphi_1 = \arctg \mu_1; \quad \varphi_2 = \arctg \mu_2.$$

Se construiesc dreptele Aab , Aa_1b_1 și Ba_1a , Bb_1b care limitează direcțiile reacțiunilor totale din A și B :

$$\bar{R}_A = \bar{N}_A + \bar{T}_A; \quad \bar{R}_B = \bar{N}_B + \bar{T}_B.$$

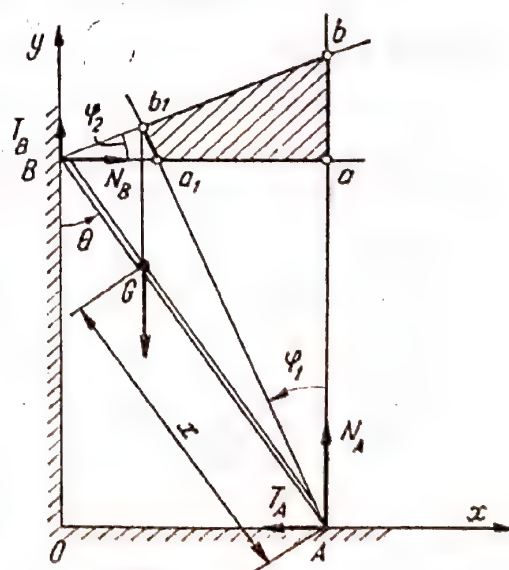


Fig. 5.B.14

Pentru echilibrare trebuie ca: $\vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{G} = 0$, adică forțele coplanare \vec{R}_A , \vec{R}_B și \vec{G} să fie concurente.

Deoarece intersecția suporturilor reacțiunilor totale se găsește în patrulaterul aa_1bb_1 sau pe laturile lui, pentru echilibru trebuie ca și suportul forței G să treacă prin această intersecție. În consecință, conform figurii 5.B.14, poziția limită a omului este determinată de verticala vârfului b_1 . Patrulaterul aa_1bb_1 se numește patrulaterul frecărilor.

5.B.15. Un paralelipiped omogen $ABCD$, de greutate G , avînd laturile a și b , se reazemă cu fața AB pe un plan înclinat cu unghiul α față de orizontală, coeficientul de frecare între fața AB și plan fiind μ (fig. 5.B.15). Știind că unghiul α crește, să se determine valoarea sa pentru poziția limită de echilibru.

Rezolvare. Se eliberează paralelipipedul de legătura cu planul înclinat, introducînd reacțiunile N și T , de asemenea cuplul M_r , care se opune tendinței de rostogolire.

Se scriu ecuațiile scalare de echilibru:

$$\begin{aligned}\Sigma X_i &= 0; & T - G \sin \alpha &= 0; \\ \Sigma Y_i &= 0; & N - G \cos \alpha &= 0; \\ \Sigma M_O &= 0; & G \frac{b}{2} \sin \alpha - M_r &= 0.\end{aligned}$$

Se adaugă inecuațiile:

$$T \leq \mu N, \quad M_r \leq sN.$$

Se observă că în poziția limită de echilibru $s = \frac{a}{2}$, adică paralelipipedul se reazemă doar cu muchia A pe planul înclinat, reacțiunea N avînd punctul de aplicație în A .

Rezolvînd sistemul rezultă condițiile pentru unghiul α :

$\operatorname{tg} \alpha \leq \mu$, deci $\alpha \leq \operatorname{arc} \operatorname{tg} \mu$ pentru ca paralelipipedul să nu alunece în jos.

Pentru poziția limită de echilibru: $\alpha_{\max} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \mu$.

$\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{a}{b}$ deci $\alpha \leq \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a}{b}$ pentru ca paralelipipedul să nu se rostogolească în jos.

Pentru poziția limită de echilibru: $\alpha_{\max} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a}{b}$.

Evident că pentru repaus α trebuie să fie mai mic, cel mult egal (la limită) cu cea mai mică din cele două valori.

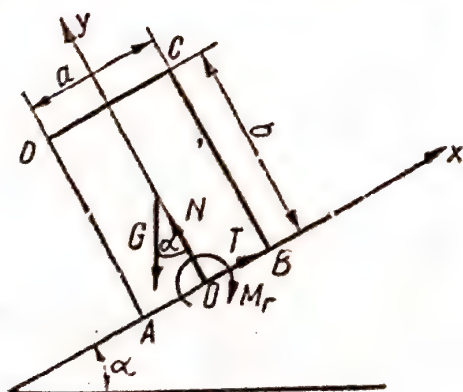


Fig. 5.B.15

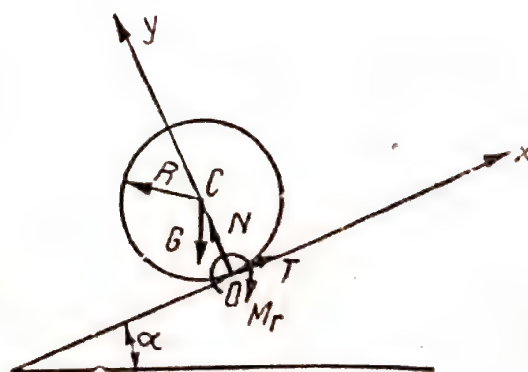


Fig. 5.B.16

Dacă $\frac{a}{b} < \mu$ iar unghiul α crește, pierderea echilibrului se va face prin rostogolire; dacă $\frac{a}{b} > \mu$, pierderea echilibrului se face prin alunecare.

5.B.16. O roată de rază R și greutate G se reazemă pe un plan înclinat cu unghiul α față de orizontală (fig. 5.B.16). Cunoscând coeficienții de frecare la alunecare μ și rostogolire s , dintre roată și plan, să se determine unghiul α pentru care roata rămâne în repaus.

Rezolvare. Se izolează roata, introducând reacțiunea normală N , forța de frecare T opusă tendinței de alunecare și cuplul M_r opus tendinței de rostogolire.

Condițiile de echilibru exprimate scalar în raport cu sistemul de referință xOy , sînt:

$$\begin{aligned}\Sigma X_i &= 0; & T - G \sin \alpha &= 0; \\ \Sigma Y_i &= 0; & N - G \cos \alpha &= 0; \\ \Sigma M_o &= 0; & GR \sin \alpha - M_r &= 0.\end{aligned}$$

Se adaugă inecuațiile:

$$T \leq \mu N; \quad M_r \leq sN.$$

Rezolvînd sistemul se obțin următoarele condiții pentru unghiul α :
 $\operatorname{tg} \alpha \leq \mu$, respectiv $\alpha \leq \operatorname{arc} \operatorname{tg} \mu$ pentru ca roata să nu alunece în jos;
 deci: $\alpha_{\max} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \mu$,

și $\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{s}{R}$ respectiv $\alpha \leq \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{s}{R}$ pentru ca roata să nu se rostogolească în jos; deci: $\alpha_{\max} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{s}{R}$.

Evident că pentru echilibru trebuie ca unghiul α să fie mai mic, cel mult egal cu cea mai mică din cele două valori.

6.A. PREZENTARE TEORETICĂ

6.A.1. Generalități

Prin sistem de solide se înțelege o mulțime finită de solide care se interacționează. În statică se studiază cazul special al solidelor legate între ele având și legături exterioare. Legăturile pot fi astfel încât sistemul de solide să fie deformabil sau să fie *nedeformabil*, adică sistemul întreg, în care nu joacă rol micile deformații ale fiecărui solid în parte, să poată fi considerat un rigid. Cele mai des întâlnite sisteme de solide din viața practică și din tehnică sînt constituite din bare drepte legate între ele. *Mecanisme* sînt sisteme de bare legate între ele prin articulații sau reazeme și care au unul sau mai multe (în număr finit) grade de libertate. Fermele, stîlpii, grinzile se pot realiza și prin sistem de bare legate între ele prin articulații, astfel încît sistemul să nu mai aibă nici un grad de libertate. În general, asemenea sisteme de bare se numesc *grinzi cu zăbrele*. Ele sînt folosite pe o scară largă în tehnica construcțiilor.

Cu toate că teoretic sistemul este considerat nedeformabil, totuși, în practică, sarcinile și variațiile de temperatură produc barelor metalice și sistemului întreg mici deformații și deplasări. Pentru evitarea efectelor dăunătoare ale deformațiilor și deplasărilor, unele din legăturile exterioare ale sistemului sînt reazeme așezate pe role care permit sistemului mici deplasări dar care nu-i aduc sistemului nici un grad de libertate.

Problemele staticii sistemelor de solide. Problema directă: dîndu-se un sistem nedeformabil de solide, cu legături exterioare și interioare, în repaus, acționat de forțe exterioare, să se determine forțele de legătură exterioare și interioare sistemului.

Problema inversă sau mixtă. Dîndu-se un mecanism (sistem deformabil de solide) cu legături exterioare și interioare, acționat de forțe exterioare, să se determine pozițiile în care trebuie așezat mecanismul pentru ca el să rămînă în repaus, precum și forțele de legătură exterioare și interioare pentru aceste poziții.

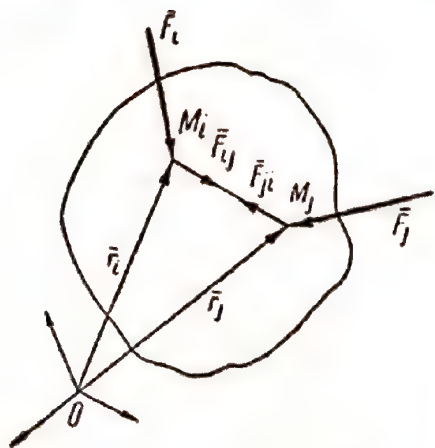


Fig. 6.A.1

6.A.2. Condițiile repausului

Un model satisfăcător pentru un sistem de solide în repaus este un sistem de puncte materiale (fig. 6.A.1) în repaus.

Notatii. O , originea sistemului de referință fix; M_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$), unul din cele n (finit) puncte materiale; \bar{F}_o , rezultanta forțelor exterioare date și de legătură aplicate punctului M_i ; \bar{F}_{ij} , forță interioară, reprezen-

tind acțiunea punctului material M_i asupra lui M_j , iar \bar{F}_{ji} , reacțiunea lui M_j asupra lui M_i ; \bar{r}_i, \bar{r}_j , vectori de poziție. Forțele interioare ascultă de principiul egalității acțiunii și reacțiunii, de pildă pentru forțele interioare dintre M_i și M_j :

$$\bar{F}_{ij} + \bar{F}_{ji} = 0 \text{ și } \bar{r}_i \times \bar{F}_{ij} + \bar{r}_j \times \bar{F}_{ji} = 0 \quad (6.1)$$

Definiție. Un sistem de puncte materiale (sistem material deformabil) în repaus în raport cu un reper fix, rămâne în această stare dacă fiecare din punctele sistemului rămâne în repaus față de același reper și reciproc.

Condițiile necesare de echilibru pentru forțele exterioare sînt:

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i = 0 \text{ și } \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{F}_i = 0 \quad (6.2)$$

Însă, aceste condiții *nu sînt și suficiente* pentru ca *sistemul deformabil* să rămînă în repaus.

Numai dacă sistemul ar fi nedeformabil aceste condiții sînt și suficiente pentru ca sistemul să rămînă în continuare în repaus.

Condițiile (6.2) se pot scrie, *pe baza definiției*, atît pentru întregul sistem, cît și pentru o parte din sistem ca și cum fie întregul, fie partea considerată ar fi rigide (*teorema solidificării*).

În acest fel se elimină din scriere total sau parțial forțele de legătură interioare.

Cele stabilite pentru un sistem de puncte materiale se extind și asupra unui sistem de solide.

Pentru rezolvarea problemelor de statica solidelor sînt mai multe metode, dintre care vor fi prezentate cele mai des folosite în aplicații.

6.A.3. Metoda izolării solidelor

Această metodă comportă următoarele etape principale:

se izolează fiecare solid în parte de celelalte solide ale sistemului, prin introducerea forțelor de legătură interioare;

se eliberează solidul de legăturile sale exterioare, introducîndu-se forțele de legătură corespunzătoare;

se scriu condițiile ca sistemul de forțe, date și de legătură exterioare și interioare, să se echilibreze.

Cînd se trece de la un solid la următorul se ține seamă de faptul că forțele de legătură dintre ele sînt două cîte două egale și direct opuse.

În cazul a n solide legate între ele se obțin $2n$ ecuații vectoriale, respectiv $6n$ ecuații scalare pentru sisteme de solide în spațiu acționate de forțe în spațiu și $3n$ ecuații scalare pentru sisteme de plăci plane, acționate de forțe în planul lor.

Se mai poate aplica teorema solidificării fie întregului sistem de solide, fie uneia sau alteia din grupele de solide legate între ele. Ecuațiile obținute nu conțin, total sau parțial, forțele de legătură, în consecință scrierea lor prezintă avantaje pentru rezolvarea sistemului de ecuații. Aceste ecuații nu sînt independente de ecuațiile scrise pentru fiecare solid izolat, ci numai consecințe ale lor.

Observații

Cele $6n$ ecuații scalare pentru sisteme în spațiu, respectiv cele $3n$ ecuații scalare pentru sisteme de solide în plan, sînt *necesare* pentru determinarea

necunoscutele problemei : forțe de legătură exterioare și interioare, poziții de repaus. În cazul în care numărul ecuațiilor este mai mic decât cel al necunoscutele, sistemul de legături este *static nedeterminat*.

Aplicarea metodei izolării poate fi greoaie pentru sisteme cu multe solide, cazul grinzilor cu zăbrele. În asemenea cazuri și în anumite condiții se pot adopta ipoteze simplificatoare, care, cu toate că duc la rezultate aproximative, sînt pe deplin satisfăcătoare pentru nevoile tehnicii.

6.B. APLICAȚII LA STATICA SISTEMELOR

6.B.1. Un cilindru de greutate \bar{Q} și raza R este așezat la baza unui perete vertical cu care vine în contact în A , punctul de contact cu pămîntul fiind B . Pe cilindru se reazemă o bară de greutate neglijabilă, articulată în C și care are la capătul liber o greutate \bar{P} , lungimea barei fiind l , iar punctul de contact cu cilindrul D . Se dă unghiul 2α pe care bara îl face cu peretele și se cer forțele de legătură din A , B , C și D (fig. 6.B.1, a).

Rezolvare. Se izolează corpurile sistemului, introducînd asupra fiecăruia forțele corespunzătoare și se scriu condițiile de repaus :

— la cilindru (axe $x_1O_1y_1$) (fig. 6.B.1, c) :

$$(\Sigma X_i = 0); \quad N_A - N_D \cos 2\alpha = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad N_B - Q - N_D \sin 2\alpha = 0;$$

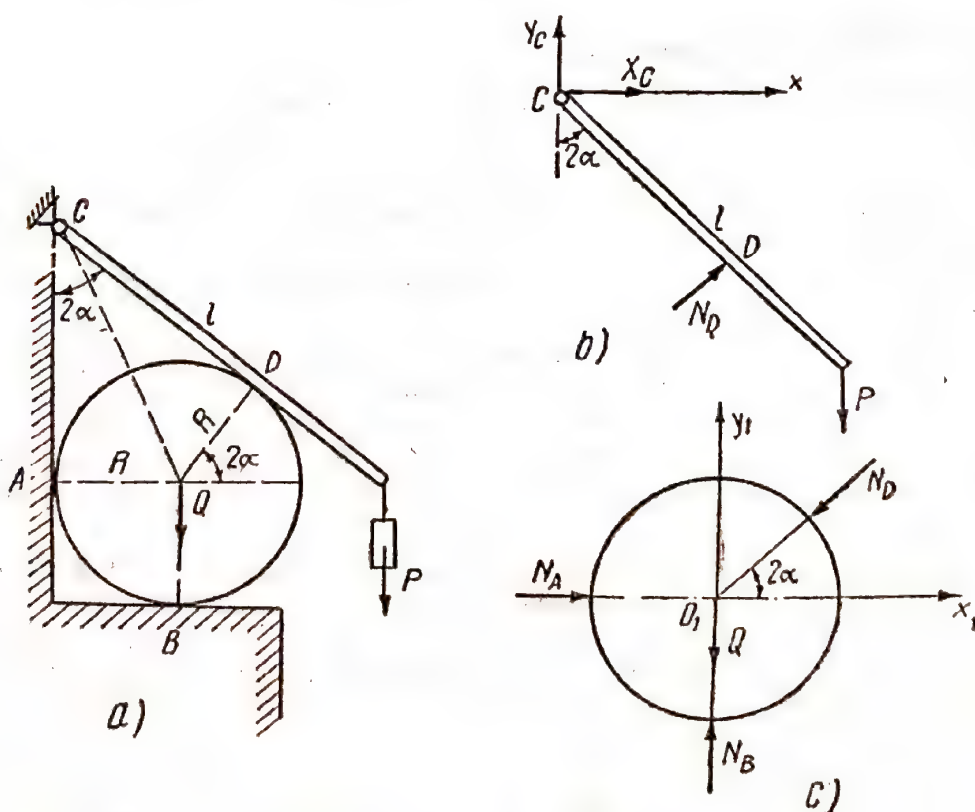


Fig. 6.B.1

— la bara CD (axele xCy) (fig. 6.B.1, b):

$$(\Sigma X_i = 0); \quad X_o + N_D \cos 2\alpha = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad Y_o - P + N_D \sin 2\alpha = 0;$$

$$(\Sigma M_{i_o} = 0); \quad -Pl \sin 2\alpha + N_D R \operatorname{ctg} \alpha = 0.$$

Sînt 5 ecuații cu 5 necunoscute: N_A , N_B , X_o , Y_o , N_D .
Rezolvînd sistemul se obține:

$$N_D = \frac{2Pl}{R} \sin^2 \alpha;$$

$$N_A = -X_o = \frac{2Pl}{R} \sin^2 \alpha \cos 2\alpha;$$

$$N_B = Q + \frac{2Pl}{R} \sin^2 \alpha \sin 2\alpha;$$

$$Y_o = P - \frac{2Pl}{R} \sin^2 \alpha \sin 2\alpha.$$

6.B.2. Se dă sistemul de bare din figura 6.B.2, a acționat de forța P .
Se cer forțele de legătură din A , B , C .

Rezolvare. Se aplică metoda izolării elementelor sistemului și se pune condiția ca fiecare element să rămână în repaus. Se introduc forțele de legătură interioare și exterioare. În raport cu sistemele de axe indicate, ecuațiile de echilibru sînt:

— corpul AB (fig. 6.B.2, b):

$$(\Sigma X_i = 0); \quad -X_A + P + X_B = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad -Y_A + Y_B = 0;$$

$$(\Sigma M_{i_A} = 0); \quad -P \frac{R}{2} - X_B R + Y_B R = 0.$$

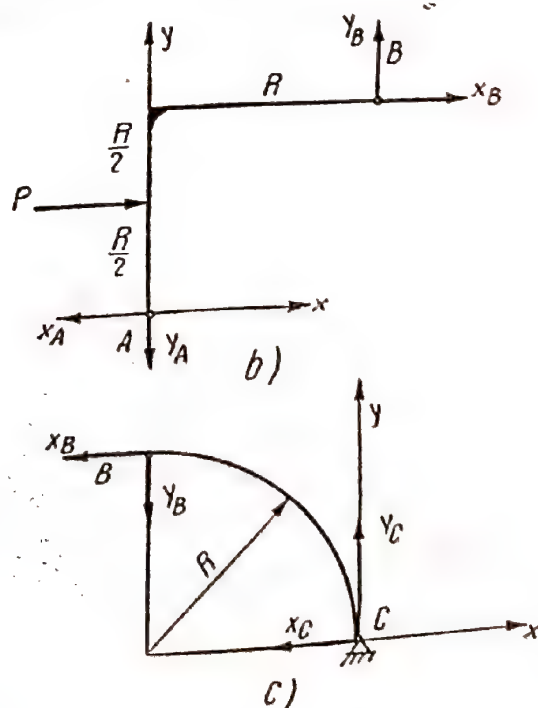
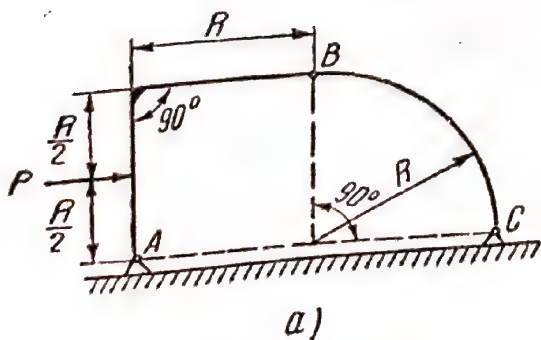


Fig. 6.B.2

- corpul BC (fig. 6.B.2, c); $(\Sigma X_i = 0)$; $-X_b - X_c = 0$;
 $(\Sigma Y_i = 0)$; $-Y_b + Y_c = 0$;
 $(\Sigma M_{i_c} = 0)$; $Y_b R + X_b R = 0$.

Alegînd în mod convenabil ecuațiile, se găsesc următoarele rezultate:

$$Y_b = -X_b = \frac{P}{4}; \quad Y_A = \frac{P}{4}, \quad Y_c = \frac{P}{4}.$$

$$X_A = \frac{3P}{5}; \quad X_c = \frac{P}{4}.$$

Se observă că forța X_b este desenată în sens invers sensului real de acțiune.

6.B.3. Bara AB de greutate \bar{P} și lungime l , articulată în A și făcînd unghiul α cu orizontala, se sprijină în D pe o bară verticală CD , încastrată în C . Cunoscînd distanța a de la A la C , să se determine forțele de legătură din punctele A , C și D (fig. 6.B.3, a).

Rezolvare. Se obțin următoarele ecuații de echilibru, folosind sistemele de axe xAy , respectiv x_Cy :

- corpul AB (fig. 6.B.3, b) $(\Sigma X_i = 0)$; $X_A - N \sin \alpha = 0$;
 $(\Sigma Y_i = 0)$; $Y_A + N \cos \alpha - P = 0$;
 $(\Sigma M_{i_A} = 0)$; $-P \frac{l}{2} \cos \alpha - N \frac{a}{\cos \alpha} = 0$;
- corpul CD (fig. 6.B.3, c) $(\Sigma X_i = 0)$; $X_c + N \sin \alpha = 0$;
 $(\Sigma Y_i = 0)$; $Y_c - N \cos \alpha = 0$;
 $(\Sigma M_{i_c} = 0)$; $M_c - N \frac{a \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = 0$.

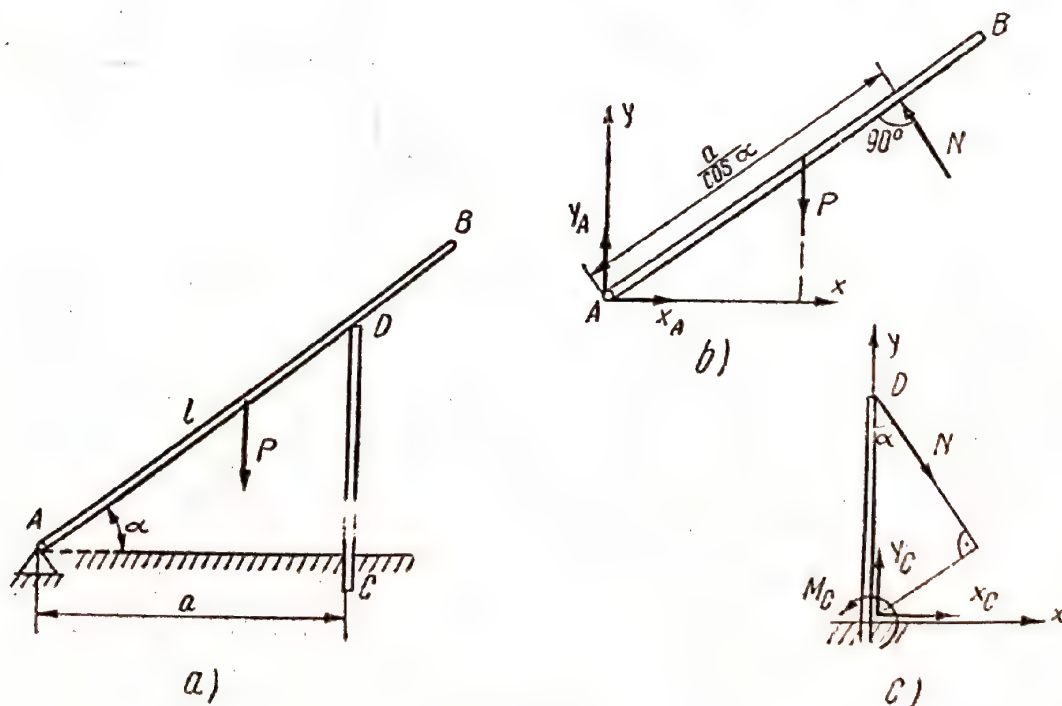


Fig. 6.B.3

Rezolvind ecuațiile, se obține:

$$N = \frac{Pl}{2a} \cos^2 \alpha; \quad Y_c = \frac{Pl}{2a} \cos^3 \alpha;$$

$$X_A = \frac{Pl}{2a} \sin \alpha \cos^2 \alpha; \quad Y_A = P \left(1 - \frac{l \cos^3 \alpha}{2a} \right);$$

$$X_c = -\frac{Pl}{2a} \sin \alpha \cos^2 \alpha; \quad M_c = \frac{Pl}{2} \sin^2 \alpha \cos \alpha.$$

Reacțiunea X_c are sensul real, invers celui de pe desen.

6.B.4. O scară ABC cu brațe egale $AB = AC = l$ și de greutate egale G , stă în poziția de echilibru dată de unghiul 2α în A , capetele B și C fiind legate cu un fir și sprijinindu-se pe pământ. Se cere tensiunea din firul BC la echilibru (fig. 6.B.4, a).

Rezolvare. Se aplică în sistemul nedeformabil, dat, metoda izolării corpurilor din sistem. Scriind, în raport de axele alese în figură, ecuațiile de echilibru ale sistemului de forțe, se obține:

$$- \text{corpul } AB \text{ (fig. 6.B.4, b) } (\Sigma X_i = 0); \quad S - X_A = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad N_B - G - Y_A = 0;$$

$$(\Sigma M_{i_A} = 0); \quad -N_B l \sin \alpha + G \frac{l}{2} \sin \alpha + Sl \cos \alpha = 0;$$

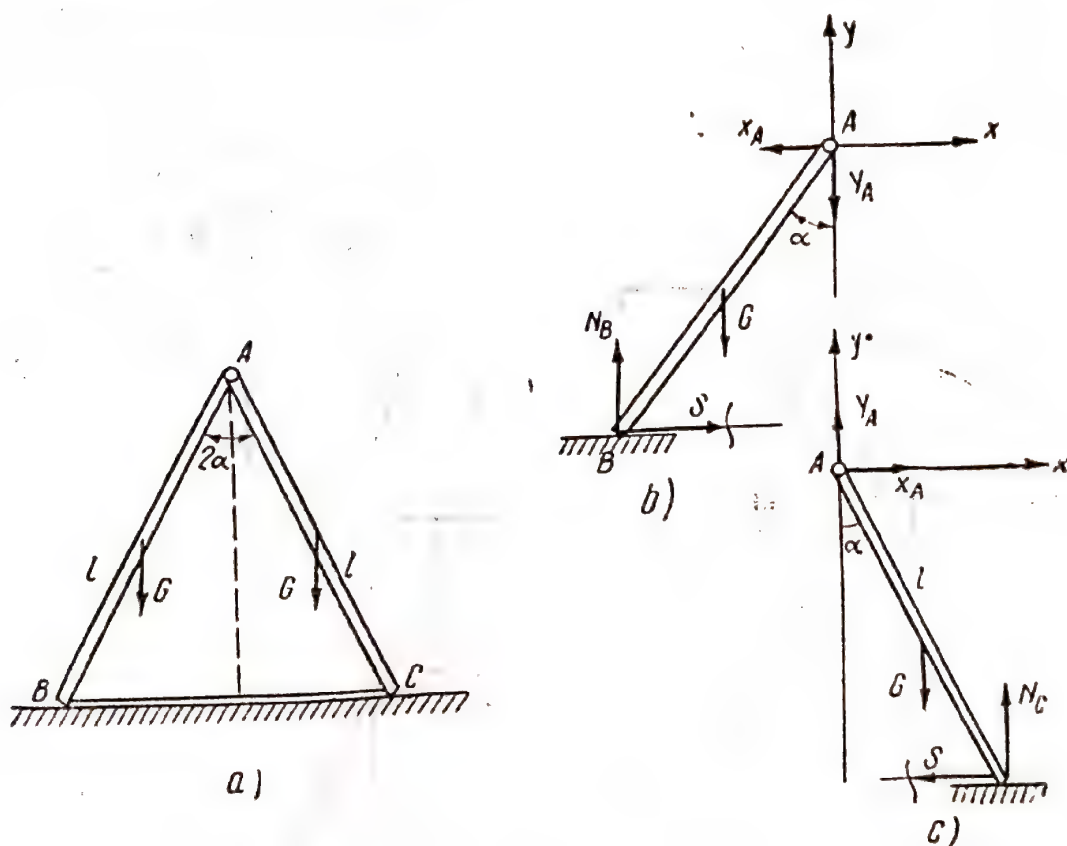


Fig. 6.B.4

— corpul AC (fig. 6.B.4, c) ($\Sigma X_i = 0$); $X_A - S = 0$;
 $(\Sigma Y_i = 0)$; $Y_A + N_c - G = 0$;
 $(\Sigma M_{i_A} = 0)$; $N_c l \sin \alpha - S l \cos \alpha - G \frac{l}{2} \sin \alpha = 0$.

Avem 6 ecuații cu 5 necunoscute: X_A , Y_A , S , N_B , N_C . Se observă că două ecuații sînt identice, deci sistemul este determinat.

Rezolvînd, se obține:

$$Y_A = 0; N_B = N_C = G; X_A = S = \frac{G}{2} \operatorname{tg} \alpha$$

6.B.5. O sferă de greutate necunoscută și rază R este legată cu un fir de lungime a , de punctul fix O , care este locul de articulație al unei bare de greutate \bar{G} și lungime l . Cunoșcînd unghiul α pe care bara îl face cu orizontala și unghiul β pe care firul îl face cu orizontala, se cer reacțiunile din O și B , tensiunea din fir și greutatea \bar{P} a sferei (fig. 6.B.5, a).

R e z o l v a r e. Se aplică metoda izolării solidelor. O ecuație de momente față de punctul A arată că tensiunea S din fir trece prin centrul sferei (fig. 6.B.5, b):

$$(\Sigma M_{i_A} = 0); -Sd = 0; \text{ deci } d = 0.$$

Ecuațiile de proiecție pe xAy dau:

$$(\Sigma X_i = 0); -N \sin \alpha + S \cos \beta = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0); -P - N \cos \alpha + S \sin \beta = 0.$$

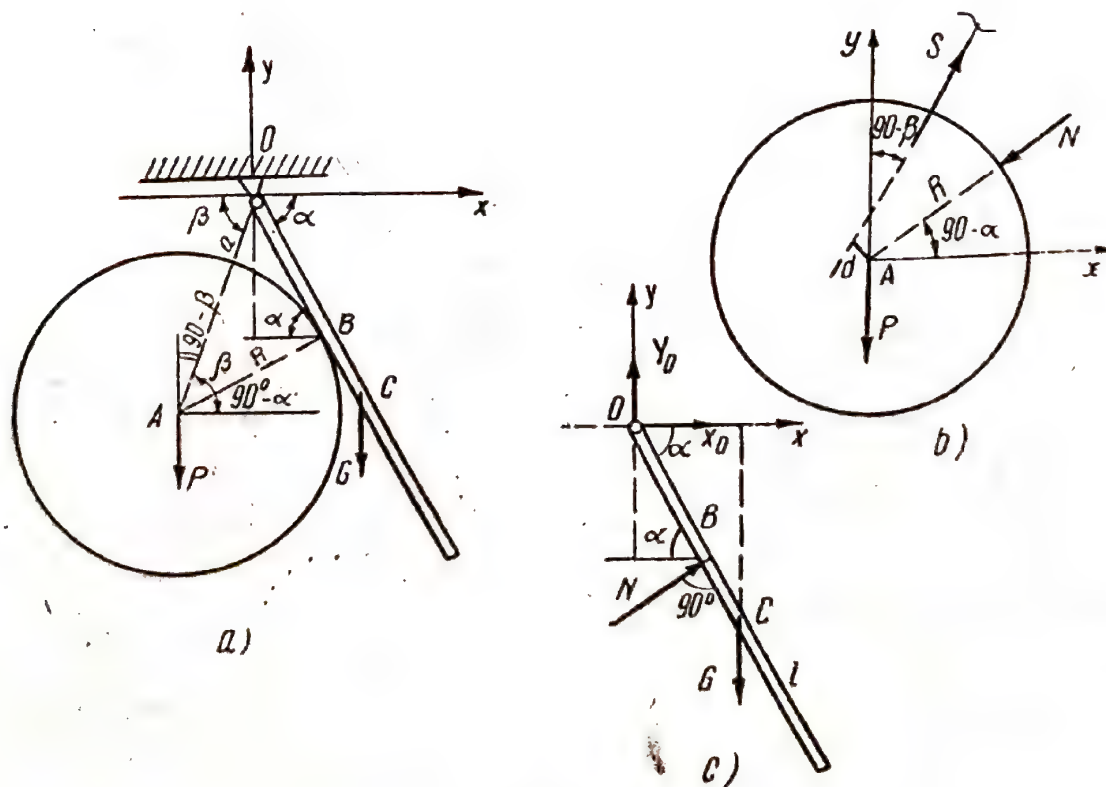


Fig. 6.B.5

Asupra barei (fig. 6.B.5, c) acționează forțele din articulația O , X_o , Y_o , reacțiunea interioară N și greutatea G .
Ecuațiile de echilibru sînt:

$$(\Sigma X_i = 0); \quad N \sin \alpha + X_o = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad Y_o - G + N \cos \alpha = 0;$$

$$(\Sigma M_{i_o} = 0); \quad -G \frac{l}{2} \cos \alpha + N \sqrt{(a+R)^2 - R^2} = 0.$$

Din triunghiul OAB se deduce:

$$(a+R) \cos (\alpha + \beta - 90) = R.$$

Ultima relație arată că α , β , a și R nu sînt independente. Rezolvînd sistemul se obține:

$$N = \frac{Gl \cos \alpha}{2 \sqrt{a^2 + 2aR}},$$

$$Y_o = G \left(1 - \frac{l \cos^2 \alpha}{2 \sqrt{a^2 + 2aR}} \right),$$

$$X_o = \frac{Gl \sin 2\alpha}{4 \sqrt{a^2 + 2aR}},$$

$$S = \frac{Gl \sin 2\alpha}{4 \cos \beta \sqrt{a^2 + 2aR}},$$

$$P = \frac{Gl \cos \alpha}{2 \sqrt{a^2 + 2aR}} (\operatorname{tg} \beta \sin \alpha - \cos \alpha).$$

6.B.6. Două fire sînt prinse de un punct fix O : de unul, cu lungimea l , fiind legată o sferă de rază R și greutate G , iar de-al doilea, o greutate P . Cunoscîndu-se unghiul α dintre cel de-al doilea fir și verticală, să se afle unghiul dintre primul fir și verticală și tensiunea din fir (fig. 6.B.6, a)

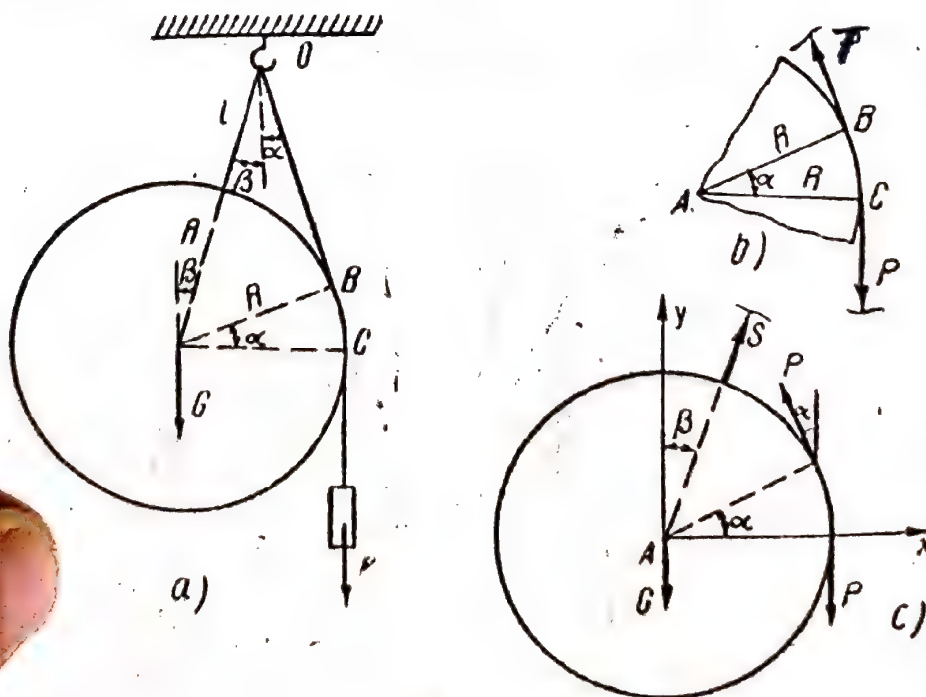


Fig. 6.B.6

Rezolvare. Se aplică metoda izolării solidelor; se izolează întâi firul (fig. 6.B.6, b) de care este legată greutatea P . Fie T tensiunea în fir. O ecuație de momente față de punctul A dă $T = P$.

$$(\Sigma M_A = 0); \quad TR - PR = 0.$$

Se izolează apoi sfera împreună cu firul (fig. 6.B.6, c) tăind legătura sferei cu punctul O și introducând tensiunea S . Față de axele xAy , condițiile de echilibru devin:

$$(\Sigma X_i = 0); \quad -P \sin \alpha + S \sin \beta = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad P \cos \alpha + S \cos \beta - G - P = 0.$$

Se mai adaugă, din OAB , relația:

$$(l + R) \sin (\alpha + \beta) = R.$$

Rezolvând sistemul format din ecuațiile de echilibru și relația geometrică, rezultă:

$$S = (G + P) \frac{l + R}{R} \sin \alpha;$$

$$\sin \beta = \frac{P}{G + P} \frac{R}{l + R}.$$

6.B.7. O bară de greutate neglijabilă și lungime l este articulată la jumătatea peretelui unui cilindru gol, de înălțime h și rază R , așezat vertical pe sol (fig. 6.B.7, a). Cunoscând greutatea G a cilindrului, să se determine valoarea sarcinii care se poate lega de capătul liber al barei astfel ca cilindrul să nu se răstoarne precum și reacțiunea din C .

Rezolvare. Este un sistem nedeformabil de corpuri la care poziția de echilibru este dată de $\tan \alpha = \frac{h}{4R}$. Pentru a găsi sarcina necesară ca sistemul să nu se răstoarne, se aplică sistemului forța necunoscută P și reacțiunea normală N_0 din partea solului, la o distanță x necunoscută

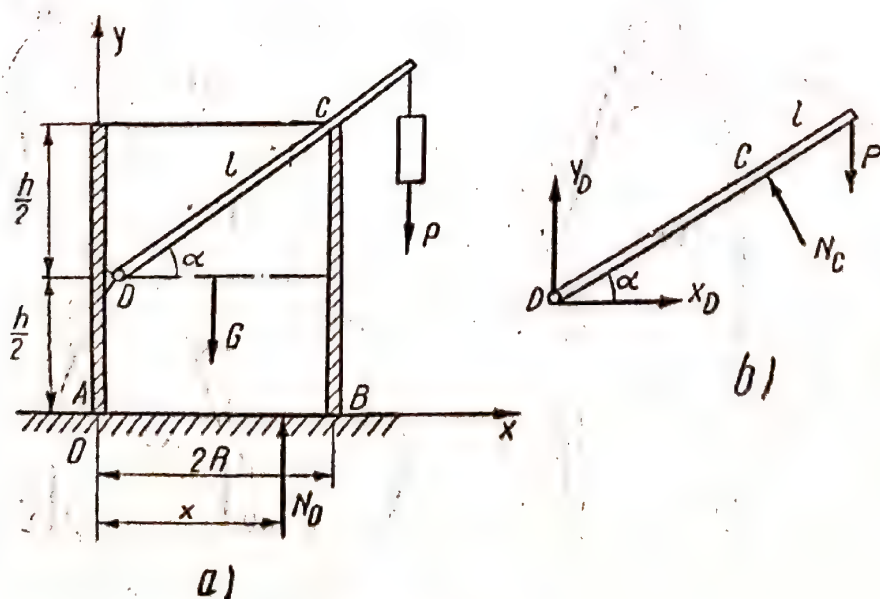


Fig. 6.B.7

de punctul A . Se aplică metoda solidificării și scriind în raport cu axele xAy , ecuațiile de echilibru, se obține:

$$\begin{aligned}(\Sigma Y_i = 0); \quad -G + N_0 - P &= 0; \\(\Sigma M_{i_A} = 0); \quad -GR - Pl \cos \alpha + N_0 x &= 0,\end{aligned}$$

de unde:

$$\begin{aligned}N_0 &= G + P, \\x &= \frac{GR + Pl \cos \alpha}{G + P}.\end{aligned}$$

Condiția de stabilitate este ca $x \leq 2R$,
deci:

$$\frac{GR + Pl \cos \alpha}{G + P} \leq 2R,$$

de unde:

$$P \leq \frac{GR}{l \cos \alpha - 2R}.$$

Pentru reacțiunea din C se izolează bara (fig. 6.B.7, b) și se scrie ecuația de momente în raport cu articulația D :

$$(\Sigma M_{i_D} = 0); \quad N_c \frac{2R}{\cos \alpha} - Pl \cos \alpha = 0.$$

Rezultă:

$$N_c = \frac{Pl \cos^2 \alpha}{2R}.$$

6.B.8. Pe un plan înclinat cu unghiul α se găsește un cilindru de rază R și greutate G care este împiedicat să se deplaseze de un prag paralelipipedic, de greutate neglijabilă (fig. 6.B.8, a). Se cere să se determine unghiul de frecare dintre prag și plan și reacțiunile în ipoteza că înălțimea pragului este $R/2$ și că frecarea dintre cilindru și prag ca și dintre cilindru și plan este neglijabilă. Caz particular $\alpha = 30^\circ$.

Rezolvare. Se izolează cele două elemente ale sistemului. Asupra sferei introducem reacțiunea planului N_x și reacțiunea pragului N , de direcții cunoscute (fig. 6.B.8, b). Față de axele xEy avem ecuațiile de echilibru:

$$\begin{aligned}(\Sigma X_i = 0); \quad N \cos 30^\circ - G \sin \alpha &= 0; \\(\Sigma Y_i = 0); \quad N_x - G \cos \alpha + N \sin 30^\circ &= 0.\end{aligned}$$

Asupra pragului acționează forțele N , forța de frecare T și reacțiunea planului N_2 la distanța x de punctul A necunoscută. Ecuațiile de echilibru sînt (fig. 6.B.8, c):

$$\begin{aligned}(\Sigma X_i = 0); \quad -N \cos 30^\circ + T &= 0; \\(\Sigma Y_i = 0); \quad N_2 - N \sin 30^\circ &= 0 \text{ și } T \leq \mu N_2, \\(\Sigma M_{i_A} = 0); \quad -N_2 x + N \frac{R}{2} \cos 30^\circ &= 0.\end{aligned}$$

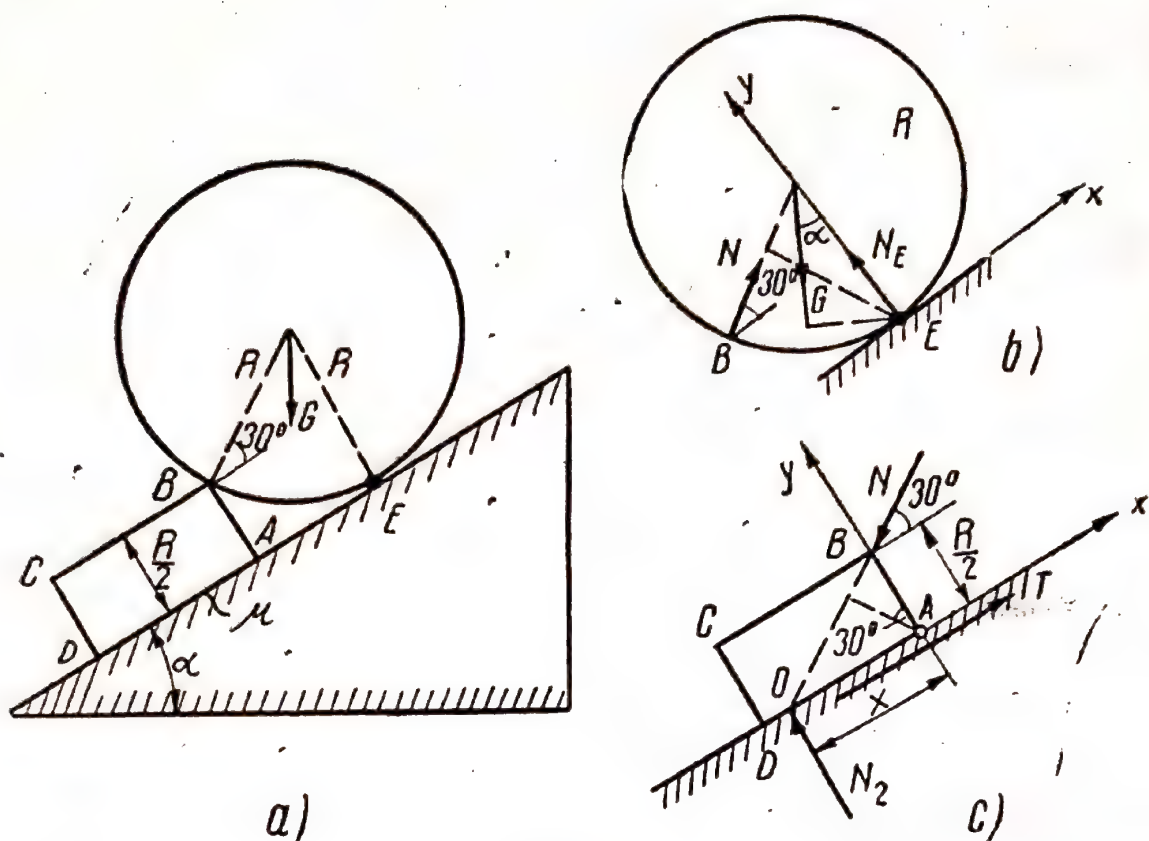


Fig. 6.B.8

Înlocuind în condiția de echilibru cu frecare rezultă :

$$T = G \sin \alpha; \quad N_2 = \frac{G \sin \alpha}{\sqrt{3}};$$

$$N = \frac{2G \sin \alpha}{\sqrt{3}};$$

$$N_x = G \left(\cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \alpha \right).$$

Notînd cu φ unghiul de frecare, rezultă :

$$\operatorname{tg} \varphi \geq \sqrt{3}, \quad \varphi \geq \frac{\pi}{3}.$$

Determinînd pe x din ultima ecuație, obținem :

$$x = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Deci forțele \bar{N} și \bar{N}_2 au punctul de aplicație comun O . Pentru cazul particular $\alpha = 30^\circ$, rezultă :

$$T = \frac{G}{2}; \quad N_2 = \frac{G}{2\sqrt{3}}; \quad N = N_x = \frac{G}{\sqrt{3}}.$$

6.B.9. O bară de lungime l și greutate \bar{G} , articulată în A , se sprijină în B pe un semicilindru de rază R și greutate neglijabilă așezat pe sol, cu

partea bombată în sus. Cunoscându-se coeficientul de frecare μ dintre semicilindru și sol și μ_1 între bară și semicilindru, se cere poziția de echilibru a sistemului (fig. 6.B.9, a).

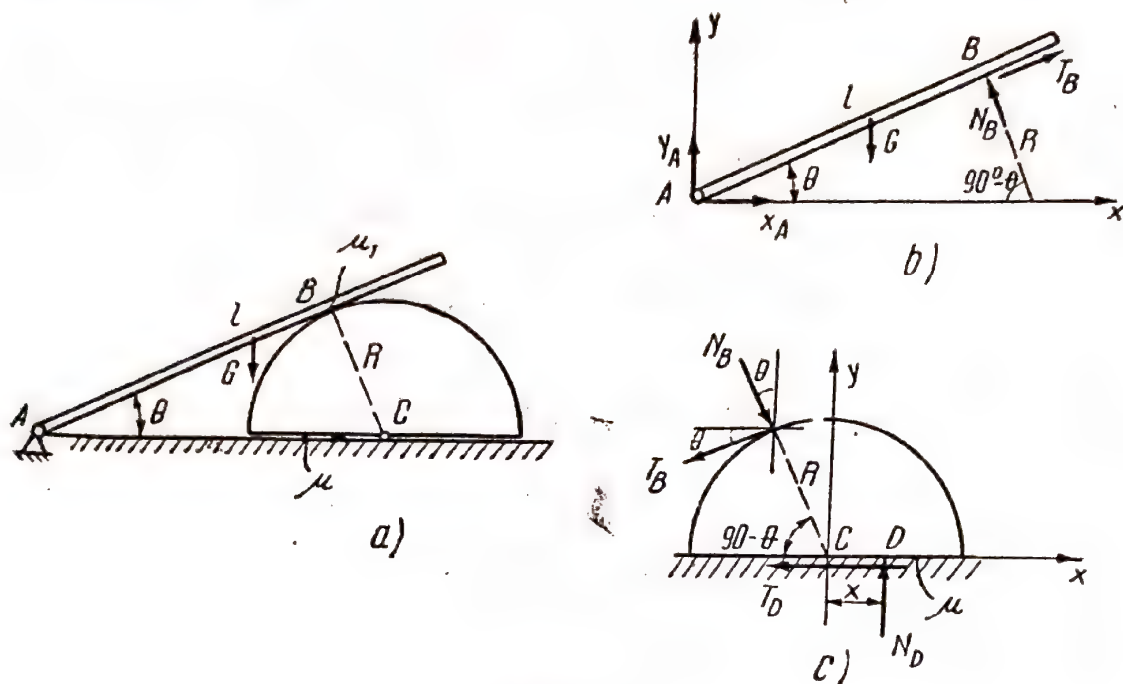


Fig. 6.B.9

Rezolvare. Fie θ parametrul cerut. Se izolează elementele sistemului. Față de axele xAy se obțin ecuațiile de echilibru (fig. 6.B.9, b):

$$(\Sigma X_i = 0); \quad T_B \cos \theta - N_B \sin \theta + X_A = 0; \quad (1)$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad -G + T_B \sin \theta + N_B \cos \theta + Y_A = 0; \quad (2)$$

$$(\Sigma M_{i_A} = 0); \quad -G \frac{l}{2} \cos \theta + N_B \frac{R}{\tan \theta} = 0; \quad (3)$$

$$T_B \leq \mu_1 N_B. \quad (4)$$

Față de axele xCy se obțin ecuațiile (fig. 6.B.9, c):

$$(\Sigma X_i = 0); \quad -T_D + N_B \sin \theta - T_B \cos \theta = 0; \quad (5)$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad N_D - N_B \cos \theta - T_B \sin \theta = 0; \quad (6)$$

$$(\Sigma M_{i_C} = 0); \quad N_D x + T_B R = 0; \quad (7)$$

$$T_D \leq \mu N_D. \quad (8)$$

Sînt șase ecuații și două inecuații. Se va rezolva exercițiul integral, pentru a arăta modul de lucru cu cele două inecuații.

Din relația (3) avem $N_B = \frac{Gl}{2R} \sin \theta$.

Înlocuind în (4), $T_B \leq \mu_1 \frac{Gl}{2R} \sin \theta$.

Înlocuind N_B și T_B în (5) și (6), se obține:

$$-T_D + \frac{Gl}{2R} \sin^2 \theta - \mu_1 \frac{Gl}{2R} \sin \theta \cos \theta \leq 0$$

$$N_D - \frac{Gl}{2R} \sin \theta \cos \theta - \mu_1 \frac{Gl}{2R} \sin^2 \theta \leq 0$$

unde s-a înlocuit T cu valoarea sa maximă, fapt care conduce la inecuațiile scrise mai înainte. Rezultă:

$$T_D \geq \frac{Gl}{2R} \sin \theta (\sin \theta - \mu_1 \cos \theta),$$

$$N_D \leq \frac{Gl}{2R} \sin \theta (\cos \theta + \mu_1 \sin \theta),$$

Înlocuind în (8), rezultă:

$$\frac{Gl}{2R} \sin \theta (\sin \theta - \mu_1 \cos \theta) \leq T_D \leq \mu N_D \leq \mu \frac{Gl}{2R} \sin \theta (\cos \theta + \mu_1 \sin \theta).$$

$$\sin \theta - \mu_1 \cos \theta \leq \mu (\cos \theta + \mu_1 \sin \theta)$$

$$\operatorname{tg} \theta \leq \frac{\mu + \mu_1}{1 - \mu \mu_1}.$$

Din ecuația (7) se poate afla x :

$$x = \frac{-R \cdot \mu_1}{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta},$$

ultima relație arătând că punctul D se găsește la stînga lui C .

Se vede că pentru $\mu_1 = 0$ (caz particular) $\operatorname{tg} \theta \leq \mu$ iar $x = 0$ (forța normală este aplicată în punctul C).

6.B.10. O bară omogenă de greutate \bar{G} și lungime l , articulată în A , se sprijină în B pe un cilindru de rază R și greutate \bar{Q} , așezat pe un plan orizontal în C . Se cere unghiul θ al poziției de echilibru al barei, cunoscînd coeficientul de frecare μ al cilindrului cu bara și μ_1 al cilindrului cu solul. Se neglijează frecarea de rostogolire ($s \approx 0$). (fig. 6.B.10, a).

Rezolvare. Se izolează cilindrul. Ecuațiile de echilibru față de axele xOy sînt (fig. 6.B.10, b):

$$(\Sigma X_i = 0); \quad -T_B \cos \theta + N_B \sin \theta - T_C = 0; \quad (1)$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad N_C - Q - T_B \sin \theta - N_B \cos \theta = 0; \quad (2)$$

$$(\Sigma M_{i_o} = 0); \quad T_B R - T_C R = 0; \quad (3)$$

$$T_C \leq \mu_1 N_C; \quad (4)$$

$$T_B \leq \mu N_B \quad (5)$$

Se izolează bara. Ecuațiile de echilibru față de axele xAy sînt (fig. 6.B.10, c):

$$(\Sigma X_i = 0); \quad X_A + T_B \cos \theta - N_B \sin \theta = 0; \quad (6)$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad -G + Y_A + N_B \cos \theta + T_B \sin \theta = 0; \quad (7)$$

$$(\Sigma M_{i_A} = 0); \quad -G \frac{l}{2} \cos \theta + N_B R \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = 0. \quad (8)$$

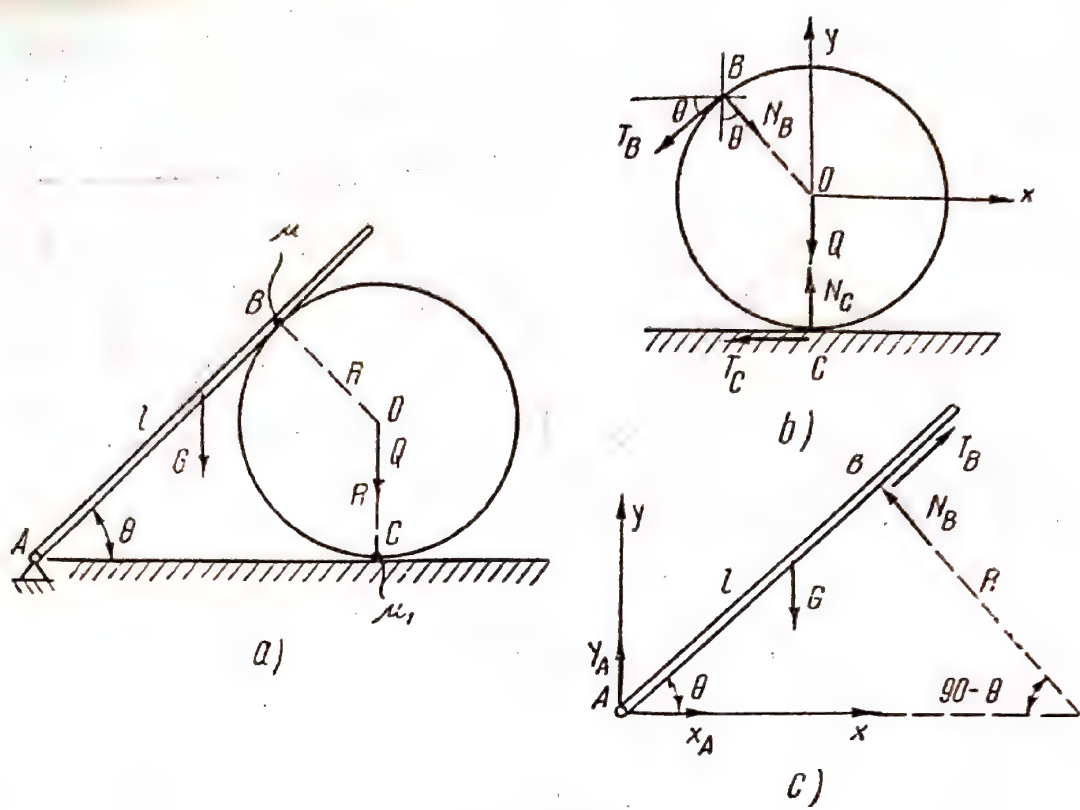


Fig. 6.B.10

Ecuatiile (6) și (7) servesc la determinarea lui X_A și Y_A .

Din (8)

$$N_B = \frac{Gl \cos \theta}{2R} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}.$$

Din (3) avem

$$T_C = T_B,$$

iar (1) dă:

$$T_C = T_B = \frac{Gl \cos \theta \sin \theta}{2R(1 + \cos \theta)} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}.$$

Din (2) rezultă:

$$N_C = Q + N_B \geq N_B.$$

Rezultă că inecuația (5) este inclusă în (4) și că echilibrul se strică întâi în B unde avem alunecare, care începe, odată cu rostogolirea fără alunecare în C, la:

$$T_B = \mu N_B; \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \mu.$$

6.B.11. Se dă mecanismul format din barele AB și BC, de lungimi egale cu l și greutatea identice \bar{G} , articulat în A și simplu rezemat în C pe un plan orizontal, cu coeficientul de frecare μ . În B avem o articulație interioară. Se cere unghiul θ , pentru poziția de echilibru și reacțiunile din figura 6.B.11, a.

Rezolvare. Se aplică teorema solidificării.

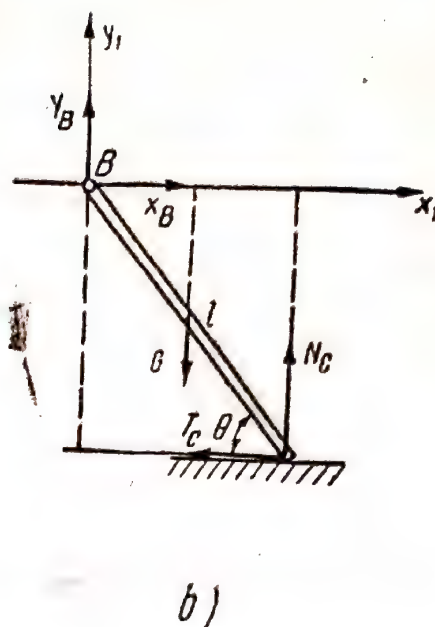
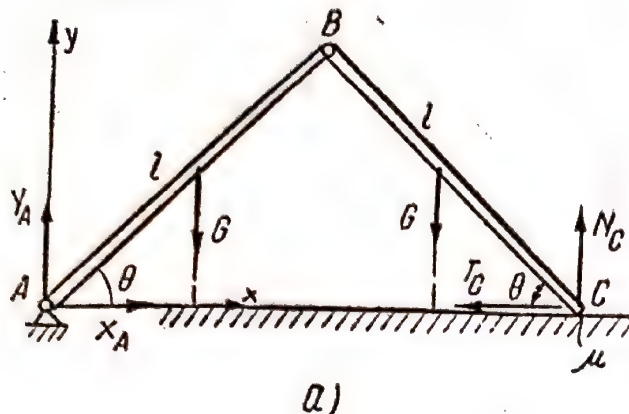


Fig. 6.B.11

Față de axele $x_A y_A$ obținem:

$$(\sum X_i = 0); \quad X_A - T_c = 0; \quad (1)$$

$$(\sum Y_i = 0); \quad Y_A - 2G + N_c = 0; \quad (2)$$

$$(\sum M_{i_A} = 0); \quad N_c 2l \cos \theta - G \frac{l}{2} \cos \theta - G \frac{3l}{2} \cos \theta = 0; \quad (3)$$

$$T_c \leq \mu N_c. \quad (4)$$

Se izolează bara BC , introducând forțele de legătură, interioare X_B și Y_B în B și se scrie echilibrul forțelor ce acționează bara față de axele $x_B y_B$ (fig. 6.B.11, b)

$$(\sum X_i = 0); \quad X_B - T_c = 0; \quad (5)$$

$$(\sum Y_i = 0); \quad Y_B - G + N_c = 0; \quad (6)$$

$$(\sum M_{i_B} = 0); \quad N_c l \cos \theta - T_c \cdot l \sin \theta - G \frac{l}{2} \cos \theta = 0. \quad (7)$$

Ecuatiile (1), (2), (5), (6) servesc la aflarea reacțiunilor X_A , Y_A , X_B , Y_B . Pentru poziția de echilibru, ne folosim de restul ecuațiilor:

$$N_c = G, \text{ din ecuația (3);}$$

$$T_c = \frac{G}{2} \operatorname{ctg} \theta \text{ din, ecuația (7).}$$

Înlocuind în (4), se obține:

$$\operatorname{ctg} \theta \frac{G}{2} \leq \mu G,$$

deci:

$$\operatorname{ctg} \theta \leq 2\mu, \quad \theta \geq \operatorname{arc} \operatorname{ctg} 2\mu; \\ X_A = X_B = T_c \leq \mu G; \quad Y_A = G; \quad Y_B = 0.$$

6.B.12. Se dă mecanismul din figura 6.B.12, a la care se cunosc: lungimile $AB = l$ și $BC = a$, greutatea barei AB este G , iar a barei BC este Q ; distanța $AD = l$. Se cere poziția de echilibru θ a sistemului și reacțiunile interioare din B . Frecarea se neglijează.

Rezolvare. Se aplică metoda solidificării. Ecuațiile de echilibru față de axele xAy sînt:

$$(\Sigma X_i = 0); \quad X_A + N_D \cos \theta = 0; \quad (1)$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad Y_A - G - Q + N_D \sin \theta = 0; \quad (2)$$

$$(\Sigma M_{i_A} = 0); \quad -N_D l \sin \theta + Q \left(\frac{a}{2} \sin \theta + l \cos 2\theta \right) - G \frac{l}{2} \cos 2\theta = 0. \quad (3)$$

Se izolează bara BC . Față de axele x_1By_1 se obțin următoarele ecuații de echilibru:

$$(\Sigma X_i = 0); \quad X_B + N_D \cos \theta = 0; \quad (4)$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad Y_B - Q + N_D \sin \theta = 0; \quad (5)$$

$$(\Sigma M_{i_B} = 0); \quad -Q \frac{a}{2} \sin \theta + N_D 2l \sin \theta = 0. \quad (6)$$

Din ecuația (6), $N_D = \frac{Q}{4} \frac{a}{l}$.

Introducînd în ecuația (3), se obține:

$$4l(2Q + G) \sin^2 \theta - Qa \sin \theta - 2l(2Q + G) = 0,$$

ale cărei rădăcini sînt:

$$\sin \theta_{1,2} = \frac{Qa \pm \sqrt{Q^2 a^2 + 32l^2(2Q + G)^2}}{8l(2Q + G)}.$$

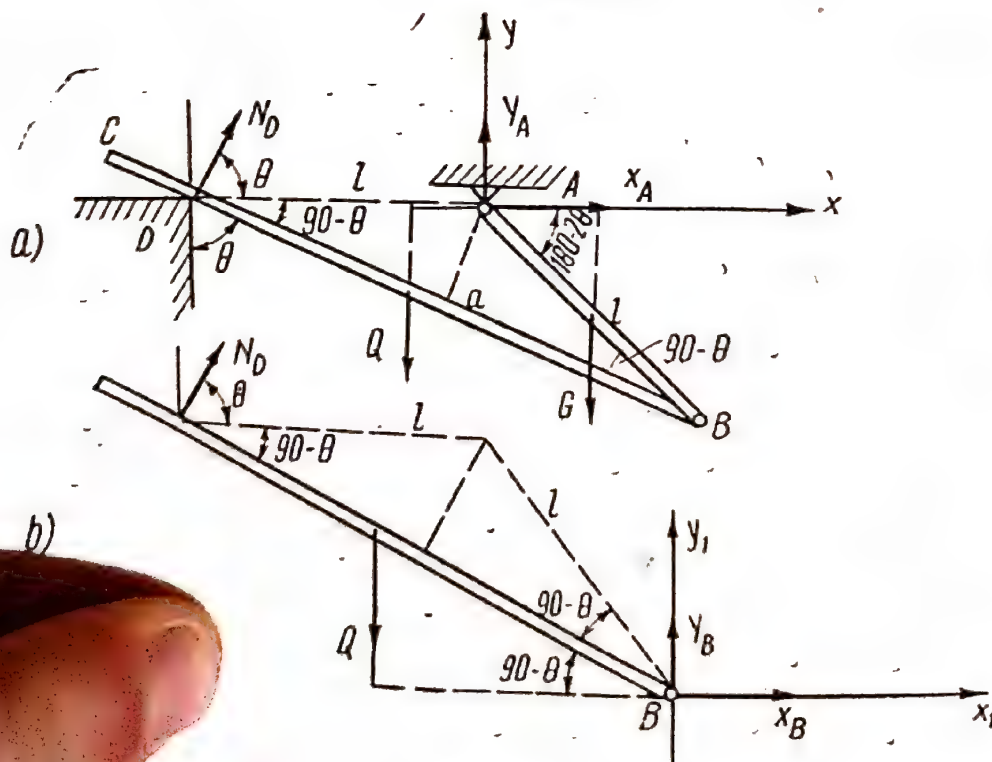


Fig. 6.B.12

Considerînd soluția cu semnul (+), rezultă $\sin \theta_1 > 0$.
 Ecuația (3) se poate pune sub forma:

$$\frac{\cos 2\theta}{\sin \theta} = -\frac{Q \frac{a}{4}}{l\left(Q + \frac{G}{2}\right)}, \text{ deci } \frac{\cos 2\theta}{\sin \theta} < 0.$$

De aici rezultă $\cos 2\theta_1 > 0$, deci $45^\circ < \theta_1 < 135^\circ$.

Considerînd soluția cu semnul (-), rezultă $\sin \theta_2 < 0$ și din aceeași condiție se obține $\cos 2\theta_2 > 0$, ceea ce conduce la $-45^\circ < \theta_2 < 45^\circ$. Această soluție nu poate fi aleasă.

Din condiția $\sin \theta \leq 1$, rezultă

$$Q > \frac{2G}{a - 4l} \text{ sau } a > 4l\left(1 + \frac{G}{2Q}\right).$$

Cu valoarea lui θ astfel obținută se determină componentele reacțiunilor din articulațiile A și B : X_A, Y_A, X_B, Y_B .

6.B.13. Se dă sistemul din figura 6.B.13, a la care în punctul B există recare în articulație, coeficientul de frecare fiind μ , iar raza articulației r . Să se determine unghiul θ la echilibru și reacțiunile.

Rezolvare. Se aplică teorema solidificării. Față de axele $x_A y_A$ avem:

$$(\Sigma X_i = 0); \quad X_A = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad Y_A - G - Q = 0;$$

$$(\Sigma M_{i_A} = 0); \quad M_A - Q \frac{l}{2} - G\left(l + \frac{a}{2} \cos \theta\right) = 0.$$

Se izolează bara BC . Față de axele $x_B y_B$ (fig. 6.B.13, b) vom avea:

$$(\Sigma X_i = 0); \quad X_B = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad Y_B - G = 0;$$

$$(\Sigma M_{i_B} = 0);$$

$$M_{fB} - G \frac{a}{2} \cos \theta = 0,$$

a) unde:

$$M_{fB} \leq \mu r \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}.$$

De unde se obține:

$$Y_B = G; \quad \cos \theta \leq \frac{2\mu r}{a};$$

b)

$$Y_A = G + Q;$$

$$M_A \leq \frac{Ql}{2} + G(l + \mu r).$$

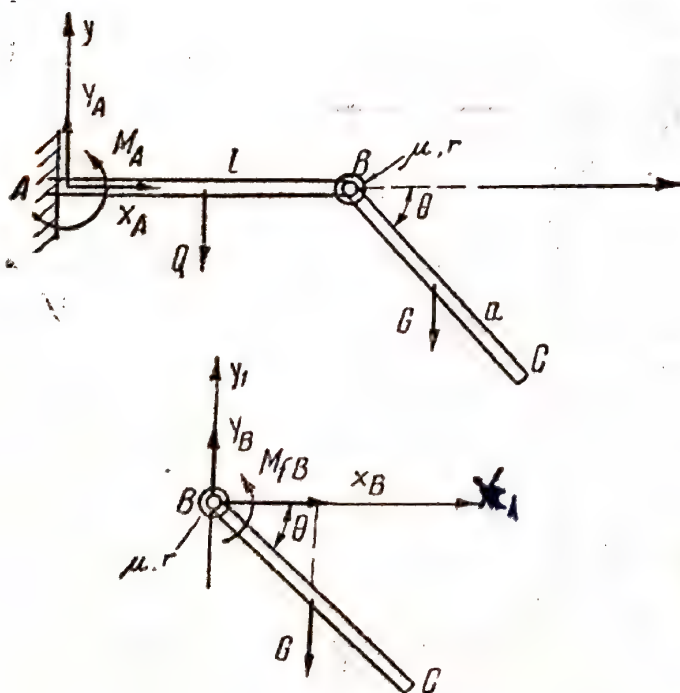


Fig. 6.B.13

7.A. PREZENTARE TEORETICĂ

7.A.1. Generalități

Grinzile cu zăbrele sînt sisteme de bare solide rigide, articulate între ele la capete. Ele pot fi sisteme *plane* sau *spațiale*. Fiind sisteme rigide, necunoscutele problemelor de grinzi cu zăbrele sînt forțele de legătură exterioare și interioare.

Deoarece metoda izolării fiecărei bare este extrem de greoaie și deoarece în tehnica construcției unor asemenea sisteme se cer rezultate **cu** aproximație, cel mult a celei de a treia cifre semnificative, se fac unele ipoteze simplificatoare care dau rezultate satisfăcătoare.

7.A.2. Ipotezele calculului grinzilor cu zăbrele

Sarcinile exterioare se aplică numai la noduri.

În primul calcul aproximativ, cînd nu se cunosc greutatea barelor grinzii, nu se ține seamă de aceste greutăți.

Dacă se cunosc după determinarea lor prin dimensionare, greutatea barelor se consideră aplicată în articulații (noduri), de obicei cîte o jumătate din greutatea barei la fiecare din cele două noduri.

Consecințe

Ca urmare a ipotezelor, în orice secțiune normală pe axa longitudinală a barei, forța de legătură dintr-o parte a secțiunii (efortul S) este echivalentă cu sistemul de forțe aplicat asupra părții suprimate.

Deoarece între noduri nu sînt forțe exterioare, în orice secțiune normală a barei considerate (fig. 7.A.1) efortul S este axial și constant.

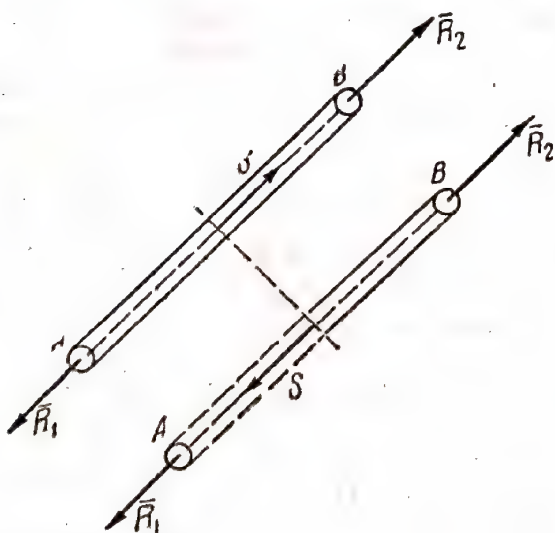


Fig. 7.A.1

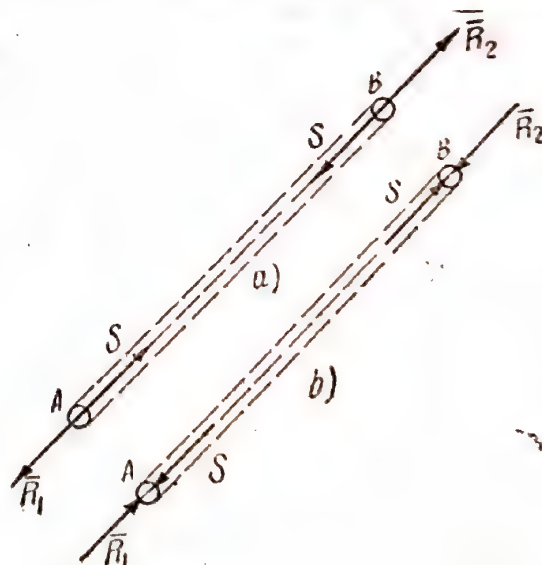


Fig. 7.A.2.

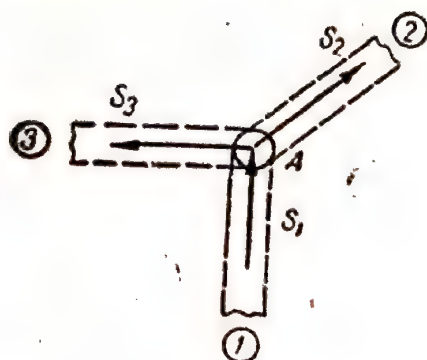


Fig. 7.A.3

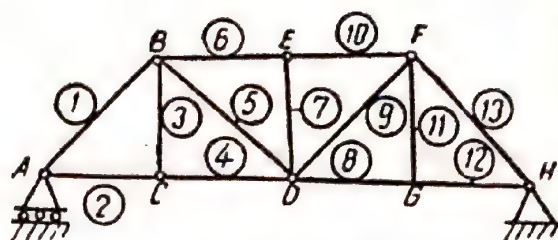


Fig. 7.A.4

În consecință, ducând secțiunile chiar prin noduri, bara întreagă este suprimată și înlocuită prin efortul S . Dacă bara este *întinsă* efortul „pleacă” de la nodul considerat, A sau B (fig. 7.A.2, a). Dacă bara este *compresată* efortul „vine” la nodul considerat, A sau B (fig. 7.A.2, b).

Dacă într-un nod sînt articulate mai multe bare, nodul este acționat de *rezultanta forțelor exterioare* \bar{R} și de eforturile din barele legate de nod și care au fost înlocuite prin aceste eforturi. De pildă în nodul A (fig. 7.A.3) acționează rezultanta forțelor date și de legătură exterioare cunoscute \bar{R} și eforturile S_1 de compresiune care înlocuiește bara suprimată, numerotată 1 și S_2 , S_3 de întindere din barele suprimate 2 și 3.

Așa după cum întregul sistem și fiecare bară izolată rămîn în repaus, tot astfel și *fiecare nod izolat rămîne în repaus*, sub acțiunea forțelor exterioare și a eforturilor din barele articulate aplicate în nod.

7.A.3. Aplicarea metodei izolării nodurilor

Se calculează toate forțele active aplicate la noduri.

Se determină forțele de legătură exterioare scriind condițiile de echilibru pentru întreaga grindă în repaus.

Se notează toate cele n noduri cu literele A , B , C , D etc. într-o ordine anumită și se numerează cele b bare ținîndu-se seamă și de ordinea în care au fost notate nodurile (fig. 7.A.4).

Se izolează succesiv fiecare nod în parte, înlocuindu-se barele prin eforturi cu indicele barei respective S_1 , S_2 și care nefiind cunoscute se presupun, de la început, că sînt eforturi de întindere (pozitive), că „pleacă” de la nod. Se recomandă ca operația să se înceapă de la un nod în care sînt mai puține bare (în plan 2, în spațiu 3).

Se scriu ecuațiile de echilibru ale tuturor forțelor și eforturilor pentru fiecare nod în parte (în plan 2 ecuații, în spațiu 3). Numărul total de ecuații este $2n$ în plan și $3n$ în spațiu. Condiția necesară pentru ca sistemul să fie determinat, adică pentru a se putea determina eforturile în cele b bare, este: $b = 2n - 3$, în plan și $b = 3n - 6$ în spațiu.

După rezolvarea sistemului de ecuații referitor la necunoscutele primului nod (de pildă A , cu S_1 și S_2) se trece la următorul (de pildă B , cu S_2 , S_3 , și S_4). Dacă valoarea găsită pentru S_2 este pozitivă, înseamnă că sensul arbitrar luat corespunde realității, efortul este de întindere și atît în nodul A cît și în B , vectorul care reprezintă pe S_2 *pleacă* de la nodul B . Dacă $S_2 < 0$, înseamnă că efortul este de *compresiune*, în acest caz, cînd se trece la nodul următor (B), *efortul se orientează corect* (vine

înspre B) și i se atribuie valoarea pozitivă, de semn contrar cu cea calculată ș.a.m.d.

Chiar dacă toate eforturile din bare au fost determinate înainte de operația de izolare a ultimelor noduri, calculele se vor duce pînă la capăt deoarece prin izolarea ultimelor noduri se obține cea mai simplă și eficace verificare a rezultatelor.

Uneori în loc de calcule analitice se folosesc, mai ales în tehnica construcțiilor, operații grafice de compuneri și descompuneri de forțe după două direcții (pentru sistemele plane).

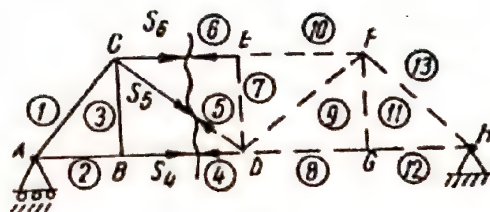


Fig. 7.A.5

7.A.4. Metoda secțiunilor (Ritter)

Metoda izolării nodurilor necesită trecerea de la un nod la următorul. Uneori însă trebuie determinat efortul dintr-o anumită bară, mai ales pentru sarcini care se deplasează pe grindă sau variază în mărime. În asemenea cazuri metoda izolării nodurilor este greoaie. Mai ales pentru grinzi plane, metoda secționării grinzii dă rezultate rapide.

Procedînd la fel ca la metoda izolării nodurilor, în continuare printr-o secțiune, care trece prin bara amintită și prin încă alte două bare, se separă întreaga grindă în două părți. După ce se introduc eforturile în cele trei bare (fig. 7.A.5), presupunînd că sînt de întindere, se consideră că fiecare din cele două părți rămîne în repaus.

Pentru calcul se alege partea cea mai simplă și se scriu condițiile de echilibru ale forțelor date și de legătură, exterioare și interioare, aplicate acestei părți. Se pot scrie două ecuații de proiecții și una de momente sau două de momente și una de proiecții sau trei ecuații de momente în raport cu trei noduri nesituate pe o dreaptă. Pentru exemplul ales, se scriu pentru partea din stînga a grinzii ecuațiile de momente în raport cu C și D și ecuația de proiecție pe bara BC .

Observații

Pentru ca metoda să se poată aplica, este necesar ca cele trei bare secționate să nu treacă toate prin același nod.

Pentru ca metoda să fie într-adevăr rapidă, este bine ca numărul barelor secționate pentru separare să nu fie mai mare ca 3. Dacă nu sînt asemenea situații, se repetă aplicarea metodei și în alte secțiuni care trec prin unele bare ale secțiunii precedente, pînă la determinarea necunoscutelor sau a necunoscutelor căutate.

7.B. APLICAȚII LA GRINZI CU ZĂBRELE

7.B.1. Să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele din figura 7.B.1, a prin metoda izolării nodurilor, verificînd cu metoda secțiunilor eforturile în barele 1, 3 și 4.

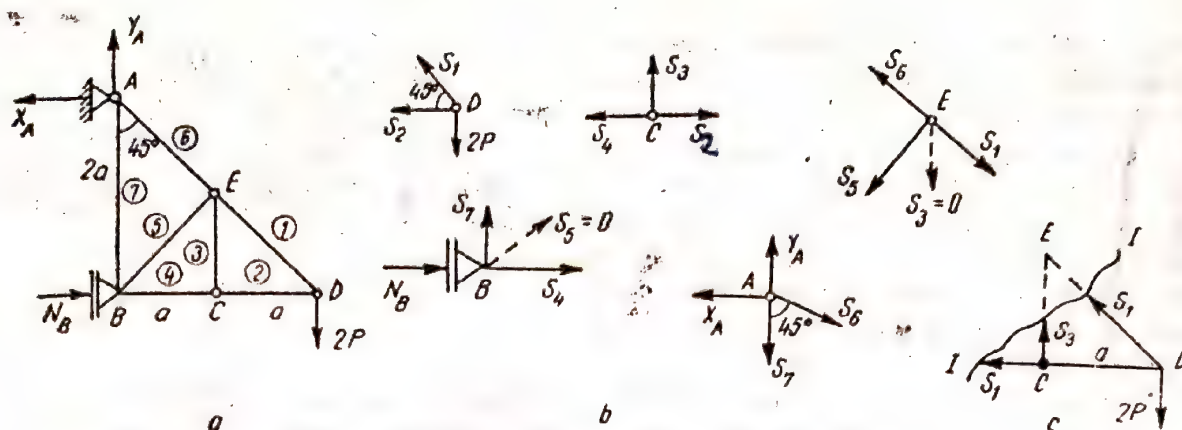


Fig. 7.B.1

Rezolvare. Se determină reacțiunile exterioare din reazemul B și articulația A , aplicînd teorema solidificării, pentru care se scriu ecuațiile de echilibru:

$$(\sum M_A = 0); \quad N_B 2a - 2P \cdot 2a = 0; \quad \text{rezultă:} \quad N_B = 2P;$$

$$(\sum X_i = 0); \quad N_B - X_A = 0, \quad X_A = 2P;$$

$$(\sum Y_i = 0); \quad Y_A - 2P = 0; \quad Y_A = 2P.$$

Se aplică metoda izolării nodurilor (fig. 7.B.1, b):

Nodul D

$$(\sum Y_i = 0); \quad S_1 \sin 45^\circ - 2P = 0; \quad \text{rezultă:} \quad S_1 = \frac{4P}{\sqrt{2}} \text{ (tensiune);}$$

$$(\sum X_i = 0); \quad S_1 \cos 45^\circ + S_2 = 0; \quad S_2 = -2P \text{ (compresiune).}$$

Nodul C

$$(\sum X_i = 0); \quad S_2 - S_4 = 0; \quad \text{rezultă:} \quad S_4 = -2P \text{ (compresiune);}$$

$$(\sum Y_i = 0); \quad S_3 = 0; \quad S_3 = 0 \quad \text{barea CE are efort nul; ea servește la rigidizare.}$$

Nodul E

$$(\sum X_i = 0); \quad S_1 - S_6 = 0; \quad \text{rezultă:} \quad S_6 = \frac{4P}{\sqrt{2}} \text{ (tensiune);}$$

$$(\sum Y_i = 0); \quad S_5 = 0; \quad S_5 = 0 \quad \text{barea EB este de efort nul.}$$

Nodul B

$$(\sum Y_i = 0); \quad S_7 + S_5 \sin 45^\circ = 0; \quad \text{rezultă:} \quad S_7 = 0 \text{ bara AB este de efort nul.}$$

A doua ecuație din nodul B și ambele ecuații de echilibru ale ultimului nod A sînt ecuații de verificare.

Pentru verificarea eforturilor din barele 1, 3 și 4 cu metoda secțiunilor, se duce secțiunea I—I ce intersectează barele căutate (fig. 7.B.1, c). Se scriu ecuațiile de echilibru pentru tronsonul din dreapta:

$$\begin{aligned} (\Sigma M_c = 0); \quad S_1 \sin 45^\circ \cdot a - 2P \cdot a &= 0; \text{ rezultă: } S_1 = \frac{4P}{\sqrt{2}}; \\ (\Sigma M_F = 0); \quad S_4 a + 2Pa &= 0; \quad S_4 = -2P; \\ (\Sigma M_b = 0); \quad S_3 a &= 0; \quad S_3 = 0. \end{aligned}$$

7.B.2. Să se determine reacțiunile din legăturile exterioare A și B, precum și eforturile în barele grinzii cu zăbrele din fig. 7.B.2, a.

Rezolvare. Pentru determinarea reacțiunilor din A și B se scriu ecuațiile de echilibru pentru ansamblul solidificat:

$$\begin{aligned} (\Sigma X_i = 0); \quad P - X_A &= 0; \quad \text{rezultă: } X_A = P; \\ (\Sigma M_A = 0); \quad N_B a - Pa \frac{\sqrt{3}}{2} &= 0; \quad N_B = \frac{\sqrt{3}}{2} P; \\ (\Sigma Y_i = 0); \quad N_B - Y_A &= 0; \quad Y_A = \frac{\sqrt{3}}{2} P. \end{aligned}$$

Se observă că pentru determinarea eforturilor nu se poate aplica deocamdată metoda izolării nodurilor, dat fiindcă în fiecare nod se întâlnesc mai mult de două bare. Se aplică metoda secțiunilor ducînd secțiunea I—I și se scriu ecuațiile de echilibru pentru partea superioară a grinzii (fig. 7.B.2, b):

$$\begin{aligned} (\Sigma M_N = 0); \quad S_1 a - P \frac{a\sqrt{3}}{4} &= 0; \quad \text{rezultă: } S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} P \text{ (tensiune)}; \\ (\Sigma M_G = 0); \quad -S_6 a - P \frac{a\sqrt{3}}{4} &= 0; \quad S_6 = -\frac{\sqrt{3}}{4} P \text{ (compresiune)}; \\ (\Sigma X_i = 0); \quad S_5 + P &= 0; \quad S_5 = -P \text{ (compresiune)}; \end{aligned}$$

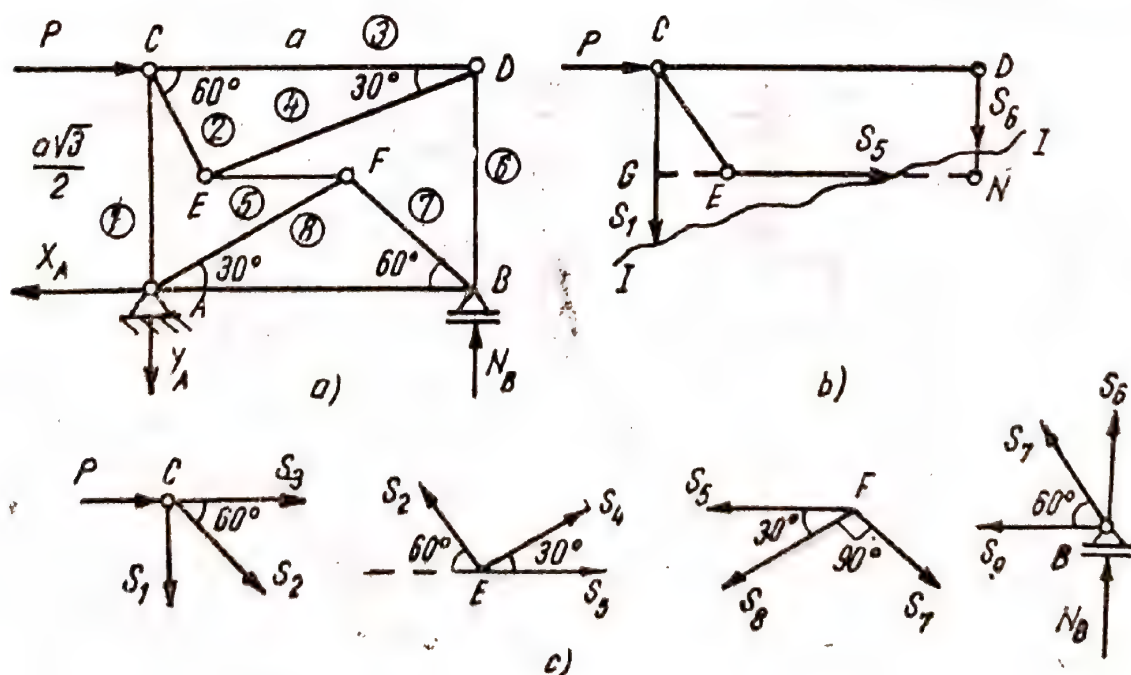


Fig. 7.B.2

Se aplică metoda izolării nodurilor (fig. 7.B.2, c) obținind :

Nodul C

$$(\sum Y_i = 0) \quad S_2 \sin 60^\circ + S_1 = 0; \quad \text{rezultă: } S_2 = -\frac{P}{2} \text{ (compresiune);}$$

$$(\sum X_i = 0); \quad S_3 + S_2 \cos 60^\circ + P = 0; \quad S_3 = -\frac{3}{4} P \text{ (compresiune).}$$

Nodul E

$$(\sum Y_i = 0); \quad S_4 \sin 30^\circ + S_2 \sin 60^\circ = 0; \quad \text{rezultă: } S_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} P \text{ (tensiune);}$$

$$(\sum X_i = 0); \quad S_4 \cos 30^\circ + S_5 - S_2 \cos 60^\circ = 0; \quad S_5 = -P \text{ (compresiune)}$$

Nodul F

$$(\sum X_i = 0); \quad S_5 \cos 30^\circ + S_8 = 0; \quad \text{rezultă: } S_8 = \frac{\sqrt{3}}{2} P \text{ (tensiune);}$$

$$(\sum Y_i = 0); \quad S_5 \sin 30^\circ - S_7 = 0; \quad S_7 = -\frac{P}{2} \text{ (compresiune).}$$

Nodul B

$$(\sum X_i = 0); \quad S_7 \cos 60^\circ + S_9 = 0; \quad \text{rezultă: } S_9 = \frac{P}{4} \text{ (tensiune).}$$

A doua ecuație din nodul C și ambele ecuații de echilibru ale ultimului nod A sînt ecuații de verificare.

7.B.3. Să se determine reacțiunile din legăturile exterioare A și B, barele de efort nul și eforturile în barele 10, 15 și 17, la grinda cu zăbrele din figura 7.B.3, a.

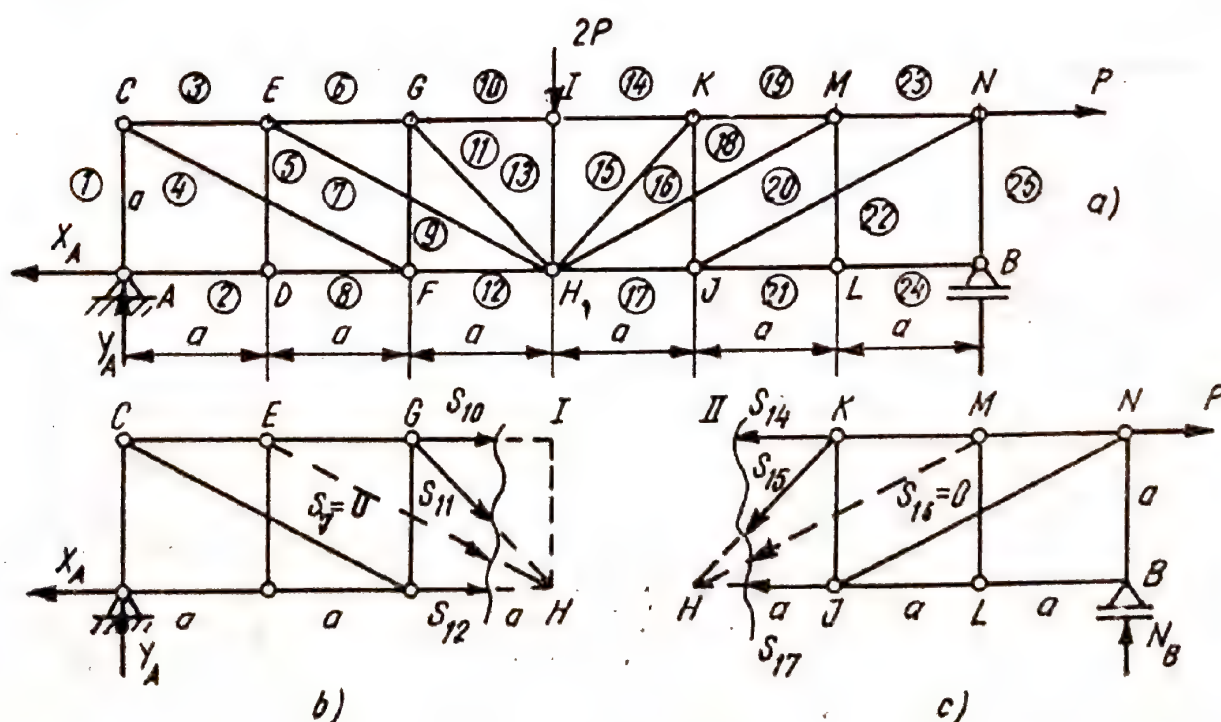


Fig. 7.B.3

Rezolvare. Reacțiunile exterioare se determină aplicând teorema solidificării:

$$(\Sigma X_i = 0); \quad P - X_A = 0; \quad \text{rezultă: } X_A = P;$$

$$(\Sigma M_A = 0); \quad N_B \cdot 6 - 2P \cdot 3 - P \cdot 1 = 0; \quad N_B = \frac{7}{6} P;$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad Y_A + N_B - 2P = 0; \quad Y_A = \frac{5}{6} P.$$

Barele de efort nul se deduc din considerații de izolări de noduri. Izolînd succesiv nodurile D, E, L, M și scriind ecuații de proiecții pe normala barelor cu aceeași direcție ce se întîlnesc în nod, rezultă:

$$S_5 = 0; \quad S_7 = 0; \quad S_{22} = 0 \text{ și } S_{16} = 0.$$

Pentru calculul efortului în bara 10, se duce secțiunea I—I (fig. 7.B.3, a) și se scrie, pentru partea stîngă a secțiunii, ecuația:

$$(\Sigma M_H = 0); \quad Y_A \cdot 3a + S_{10} \cdot a = 0; \quad \text{rezultă: } S_{10} = -\frac{5}{2} P \text{ (compresiune).}$$

Pentru calculul eforturilor în barele 15 și 17 se duce secțiunea II—II (fig. 7.B.5, c) și se scriu, pentru partea dreaptă, ecuațiile:

$$(\Sigma M_K = 0); \quad N_B \cdot 2a - S_{17} \cdot a = 0; \quad \text{rezultă: } S_{17} = \frac{7}{3} P \text{ (tensiune);}$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad N_B - S_{15} \cos 45^\circ = 0; \quad S_{15} = \frac{7}{2\sqrt{3}} P \text{ (tensiune).}$$

7.B.4. Se consideră sistemul format din grinda cu zăbrele $ADEBF$ și bara BC (fig. 7.B.4, a). Să se determine reacțiunile din articulațiile A, B și C , precum și eforturile din barele DE, DF și BE .

Rezolvare. Se folosește metoda separării corpurilor, scriind ecuațiile de echilibru (fig. 7.B.4, b):

— pentru grinda cu zăbrele (fig. 7.B.4, b):

$$(\Sigma X_i = 0); \quad X_B + P\sqrt{3} \cos 60^\circ - X_A = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad Y_A + Y_B - P - P\sqrt{3} \sin 60^\circ = 0;$$

$$(\Sigma M_B = 0); \quad Y_A \cdot 2a - Pa - P\sqrt{3} \cdot a \frac{\sqrt{3}}{2} = 0;$$

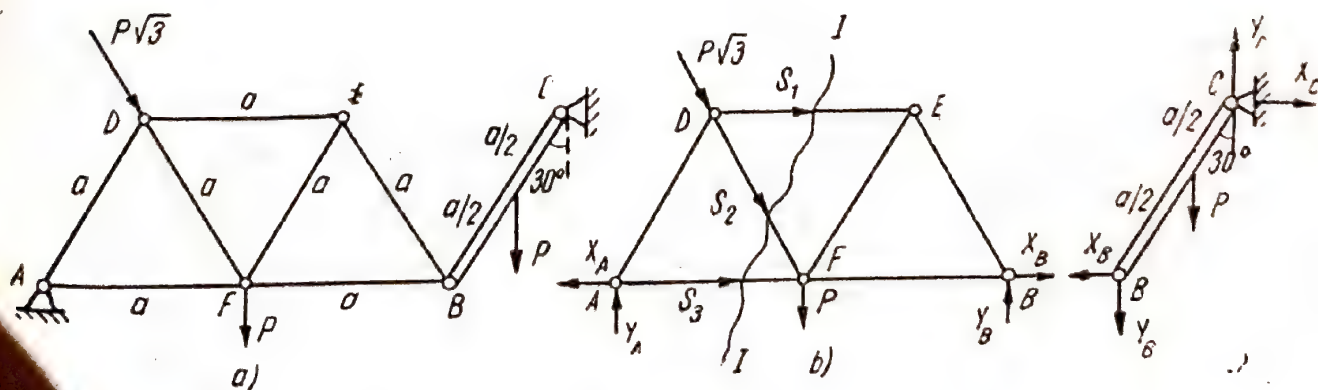


Fig. 7.B.4

— pentru bara BC (fig. 7.B.4, c):

$$(\Sigma X_i = 0); X_c - X_b = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0); Y_c - Y_b - P = 0;$$

$$(\Sigma M_c = 0); P \frac{a}{2} \sin 30^\circ + Y_b a \sin 30^\circ - X_b a \cos 30^\circ = 0$$

Rezolvând sistemul de ecuații, se obține:

$$X_A = \frac{16}{4\sqrt{3}} P; Y_A = \frac{5}{4} P; X_B = \frac{7}{4\sqrt{3}} P; Y_B = \frac{5}{4} P; X_C = \frac{7}{4\sqrt{3}} P; Y_C = \frac{9}{4} P.$$

Pentru determinarea eforturilor în barele DE și DF se aplică metoda secțiunilor, ducând secțiunea I—I și scriind, pentru tronsonul din stînga sa (fig. 7.B.4, b), ecuațiile:

$$(\Sigma M_F = 0); S_1 a \sin 60^\circ + Y_A a = 0; \text{ rezultă: } S_1 = -\frac{5P}{2\sqrt{3}} \text{ (compresiune);}$$

$$(\Sigma Y_i = 0); Y_A - P\sqrt{3} \sin 60^\circ - S_2 \sin 60^\circ = 0; S_2 = -\frac{P}{2\sqrt{3}} \text{ (compresiune).}$$

Pentru determinarea efortului în bara BE (adică S_4), se izolează nodul B (fig. 7.B.4, b) scriind ecuația pe verticală:

$$(\Sigma Y_i = 0); Y_B + S_4 \sin 60^\circ = 0; \text{ rezultă: } S_4 = -\frac{5P}{2\sqrt{3}} \text{ (compresiune).}$$

7.B.5. Bara verticală $AB = 3\text{m}$ a unei macarale (fig. 7.B.5, a) este fixată cu doi tiranți BE și BD . Brațele macaralei formate din barele BC și AC suportă în planul lor forța P . În plan orizontal proiecția AC este bisectoarea unghiului EAD . Să se determine eforturile în barele sistemului.

Rezolvare. Se folosește metoda izolării nodurilor. În nodul C forțele acționează în plan; se vor scrie două ecuații de echilibru:

$$(\Sigma X_i = 0); S_1 \cos 20^\circ + S_2 \cos 60^\circ = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0); P + S_1 \sin 20^\circ + S_2 \sin 60^\circ = 0.$$

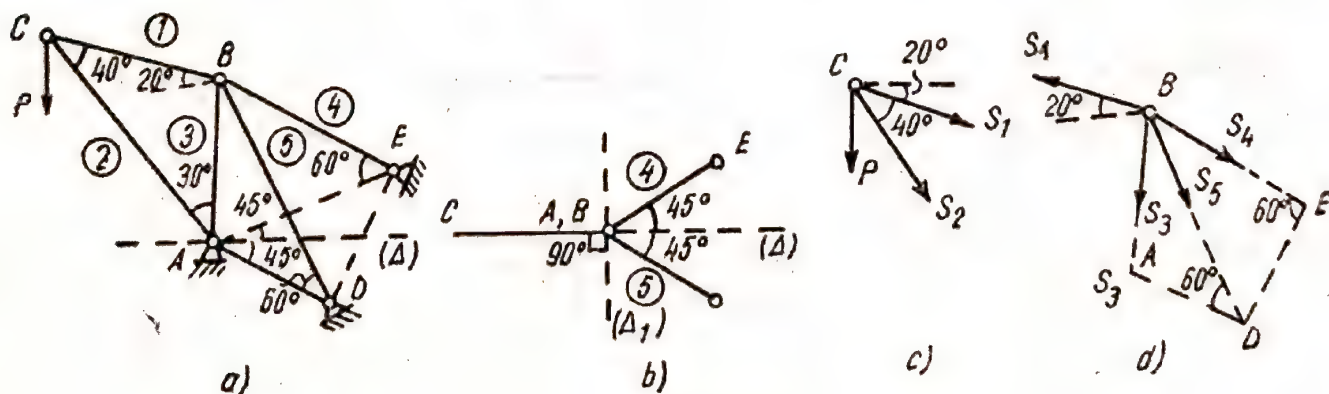


Fig. 7.B.5

unde :

$$\sin 20^\circ = 0,342;$$

$$\cos 20^\circ = 0,935.$$

Rezultă :

$$S_1 = 0,778P \text{ (tensiune) ;}$$

$$S_2 = -1,461P \text{ (compresiune)}$$

În nodul B eforturile au o configurație spațială; se vor scrie trei ecuații de echilibru :

$$(\Sigma X_i = 0); \quad S_5 \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ - S_4 \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad S_5 \cos 60^\circ \cdot \sin 45^\circ + S_4 \cos 60^\circ \cdot \sin 45^\circ - S_1 \cos 20^\circ = 0;$$

$$(\Sigma Z_i = 0); \quad S_3 + S_5 \sin 60^\circ + S_4 \sin 60^\circ - S_1 \sin 20^\circ = 0.$$

Rezultă :

$$S_4 = S_5 = \frac{S_1 \cos 20^\circ}{2 \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ} = 1,032P \text{ (tensiune) ;}$$

$$S_3 = S_1 \sin 20^\circ - 2S_4 \sin 60^\circ = -1,524P \text{ (compresiune).}$$

8.A. PREZENTARE TEORETICA

8.A.1. Generalități

Firul, unul din modelele mecanicii newtoniene, a fost definit la Capitolul 1 ca solidul cu o singură dimensiune (lungimea), inextensibil (lungimea invariabilă) și perfect flexibil.

Pe baza acestui model, se poate construi, pornind de la un sistem de bare articulate între ele, unele după altele, un alt model echivalent (fig. 8.A.1) în următoarele condiții:

- n , numărul barelor, foarte mare, tinzând spre infinit;
- l , lungimea totală a barelor, constantă;
- la limită, lungimea fiecărei bare tinde spre zero când n tinde spre infinit;
- frecarea din fiecare articulație este nulă.

Cu aceste condiții modelele sunt echivalente deoarece:

- *inextensibilitatea* este asigurată de rigiditatea fiecărei bare în parte;
- forma curbă este asigurată de condițiile a, b și c;
- perfecta flexibilitate este asigurată de condiția d;
- numărul gradelor de libertate ale unui fir este ∞ .

Folosind acest model și metoda izolării părților (barelor), se pot stabili cu ușurință condițiile vectoriale sau cele scalare de echilibru ale staticii firelor.

8.A.2. Problemele staticii firelor

Problema directă. Dându-se poziția de repaus a firului (curba de echilibru), să se găsească relații între forțele care acționează firul.

Exemplu clasic: un fir de greutate neglijabilă este înfășurat cu unghiul θ (în radiani) pe un disc circular fix și este acționat la capete de forțele \bar{T}_1 și \bar{T}_2 . Dacă μ este coeficientul de frecare de alunecare dintre fir și disc, să se exprime condițiile ca firul să nu se deplaseze în nici unul din cele două sensuri posibile (fig. 8.A.2).

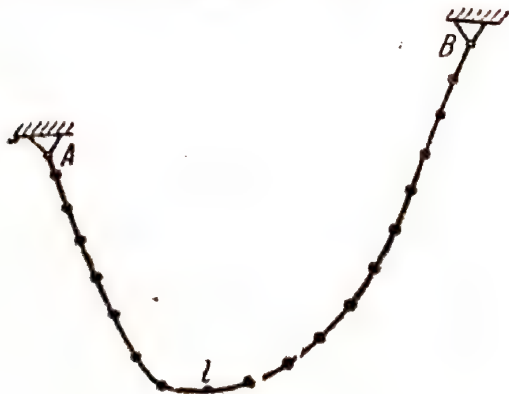


Fig. 8.A.1

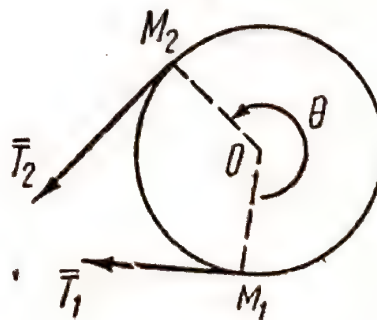


Fig. 8.A.2

Condițiile au fost stabilite de Euler și sînt exprimate prin :

$$e^{-\mu\theta} \leq \frac{T_2}{T_1} \leq e^{\mu\theta}.$$

Problema inversă. Dîndu-se forțele care acționează firul și condițiile la limită, să se stabilească poziția de repaus, adică curba de echilibru a firului.

Exemplu clasic. Un fir omogen cu lungimea $2l$, și greutatea p pe unitate de lungime de fir, este suspendat la capetele lui în două puncte fixe situate pe aceeași orizontală. Să se determine curba de echilibru a firului (fig. 8.A.3).

Ecuația curbei este :

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) = a \operatorname{ch} \frac{x}{a},$$

denumită lăncișor.

Se mai precizează următoarele :

— a este soluția ecuației transcendente :

$$a \operatorname{sh} \frac{b}{a} = l;$$

— în aplicațiile tehnice apare și un alt aspect al problemei și anume, efortul într-un punct curent $M(x, y)$ este : $T = py$;

— condițiile la limită intervin la determinarea constantelor care apar la integrarea ecuațiilor diferențiale.

8.A.3. Ecuațiile vectoriale ale staticii firelor

Se notează cu : O , originea sistemului de referință, \vec{r} vectorul de poziție al unui punct curent M de coordonată curbilinie s în raport cu originea arcelor, \vec{t} versorul tangentei în M la curba de echilibru, $\vec{p}(s)$ forța rezultantă exterioară acționînd în M pe unitatea de lungime a firului, \vec{T} tensiunea în fir, efortul din M (fig. 8.A.4).

Ecuațiile de echilibru al forțelor date și de legătură sînt :

$$\frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{p} = 0 \quad \text{și} \quad \frac{d\vec{r}}{ds} \times \vec{T} = \vec{t} \times \vec{T} = 0, \quad (8.1)$$

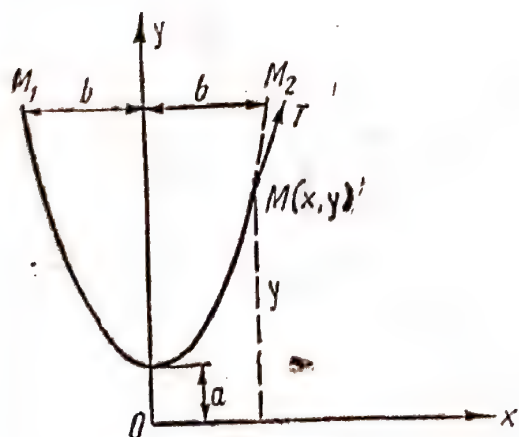


Fig. 8.A.3

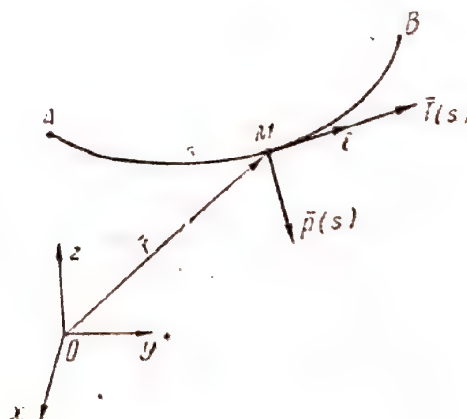


Fig. 8.A.4

prima, dedusă din ecuația de însumare, stabilește variația lui \bar{T} , iar cea de a doua, consecință a ecuației de momente, stabilește faptul că, dacă firul este perfect flexibil, efortul \bar{T} din fir este orientat după tangentă și în sensul întinderii firului. În consecință, la rezolvarea problemelor, dacă \bar{T} este orientat după tangenta la fir, nu mai este necesar să se scrie ecuația (ecuațiile) de momente, urmînd să se folosească numai prima ecuație (8.1) care se proiectează pe axele sistemului de referință ales.

O consecință a ecuației (8.1) este: forța unitară \bar{p} se găsește în planul osculator din M al curbei de echilibru.

8.A.4. Ecuațiile scalare ale staticii firelor

Se scriu în raport cu triedrul natural (Frenet) (fig. 8.A.5).

Notății: \bar{i} , \bar{n} , \bar{b} versorii axelor triedrului,

$$\bar{p} = p_i \bar{i} + p_n \bar{n} + p_b \bar{b} \quad (8.2)$$

p_i , p_n , p_b , scalarii proiecțiilor forței unitare \bar{p} pe cele trei axe, $\frac{1}{R}$, curbura în M a curbei de echilibru. Din (8.1) și (8.2) se obțin ecuațiile scalare în raport cu triedrul natural:

$$\frac{dT}{ds} + p_i = 0; \quad \frac{T}{R} + p_n = 0; \quad p_b = 0,$$

Observații

Din prima ecuație se deduce că variația tensiunii din fir este produsă de componenta tangențială a forței unitare și este proporțională cu aceasta.

Din ecuația a doua rezultă că curbura liniei de echilibru a firului este proporțională și de sens opus cu componenta normală a forței unitare și este invers proporțională cu tensiunea în fir;

Din ecuația a treia, rezultă încă o dată că forța unitară se află în planul osculator din M al curbei.

Ecuațiile scalare sînt folosite de preferință în cazul problemelor directe cînd se cunoaște forma curbei de echilibru a firului, de exemplu în problema frecării firelor.

Ecuațiile scalare ale staticii firelor în raport cu triedrul fix (fig. 8.A.6). Se notează cu: $Oxyz$ reperul cartezian și cu \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} versorii axelor,

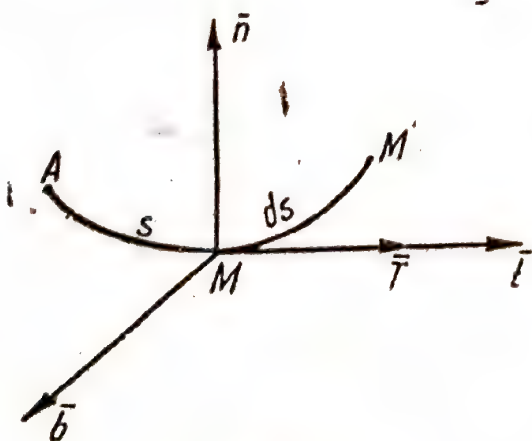


Fig. 8.A.5

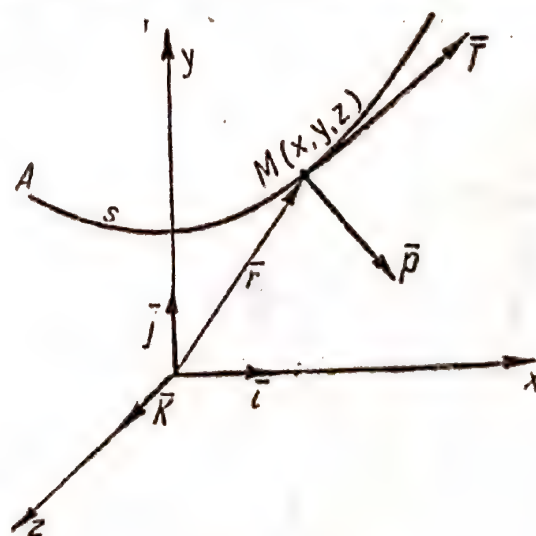


Fig. 8.A.6

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ vectorul de poziție al punctului curent $M(x, y, z)$ avînd pe s coordonata curbilinie, \vec{T} tensiunea din fir: $\vec{T} = T\vec{l} = T \frac{d\vec{r}}{ds}$, iar $\vec{p} = p_x\vec{i} + p_y\vec{j} + p_z\vec{k}$, forța unitară.

Din ecuația (8.1) se deduc următoarele ecuații scalare:

$$\frac{d}{ds}\left(T \frac{dx}{ds}\right) + p_x = 0; \quad \frac{d}{ds}\left(T \frac{dy}{ds}\right) + p_y = 0; \quad \frac{d}{ds}\left(T \frac{dz}{ds}\right) + p_z = 0.$$

8.B. APLICAȚII LA STATICA FIRELOR

8.B.1. Un cablu trecut peste doi tamburi ficși (fig. 8.B.1) are la capete două sarcini P și Q . Cunoscînd coeficienții de frecare μ_1 și μ_2 între cablu și cei doi tamburi, se cere raportul sarcinilor P și Q pentru echilibrare.

Rezolvare. Secționînd cablul între cei doi tamburi și considerînd tendința de mișcare spre P , rezultă:

$$P \leq T e^{\mu_1 \frac{3\pi}{2}}; \quad T \leq Q e^{\mu_2 \frac{3\pi}{2}}.$$

De aici rezultă:

$$P \leq Q e^{\frac{3\pi}{2}(\mu_1 + \mu_2)}.$$

Avînd în vedere posibilitatea ca efectul lui Q să fie mai mare, tendința de mișcare este spre Q , deci:

$$Q \leq P e^{\frac{3\pi}{2}(\mu_1 + \mu_2)}.$$

Pentru echilibru, trebuie deci să fie îndeplinită condiția:

$$e^{-\frac{3\pi}{2}(\mu_1 + \mu_2)} \leq \frac{P}{Q} \leq e^{\frac{3\pi}{2}(\mu_1 + \mu_2)},$$

8.B.2. Se dă troliul din figura 8.B.2, a acționat la raza r de sarcina Q și frînat cu ajutorul unui fir apăsat cu frecare pe periferia troliului prin intermediul barei $O_2A = l$ ($O_2B = BC = CA$).

Se cere valoarea forței F necesară pentru echilibru.

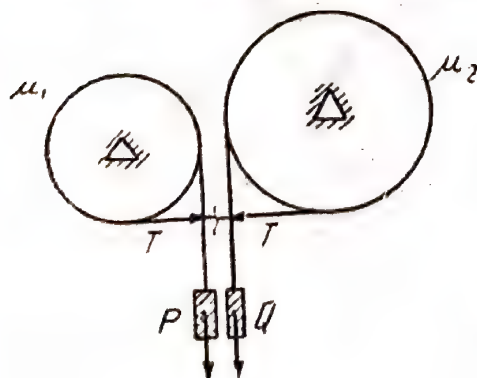


Fig. 8.B.1

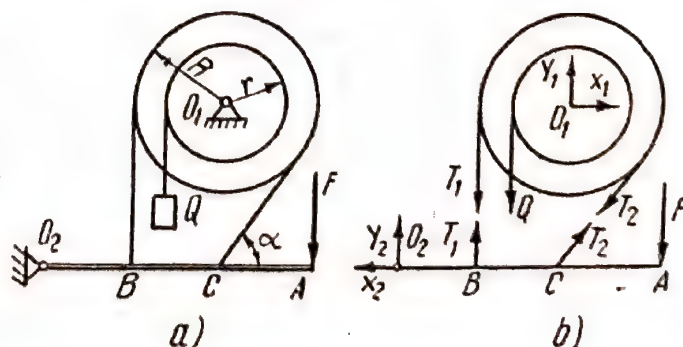


Fig. 8.B.2

Rezolvare. Se separă corpurile din legături (fig. 8.B.2, b) și se introduc forțele de legătură. Pentru eliminarea forțelor de legătură din articulația O_1 , pentru trolu se va scrie numai ecuația de moment în raport cu O_1 și relația de frecare:

$$(\Sigma M_{O_1} = 0); \quad T_1 R + Qr - T_2 R = 0;$$

$$T_2 \leq T_1 e^{\mu \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right)}.$$

Pentru bara $O_2 B$ se va scrie numai ecuația de momente în raport cu punctul O_2 , din aceleași considerații ca și la trolu:

$$(\Sigma M_{O_2} = 0); \quad T_1 \frac{l}{3} + T_2 \sin \alpha \frac{2l}{3} - Fl = 0.$$

Rezolvînd sistemul obținut, rezultă:

$$F \geq \frac{Qr \left[1 + 2 \sin \alpha e^{\mu \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right)} \right]}{3R \left[e^{\mu \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right)} - 1 \right]}.$$

8.B.3. Se dă un fir cu greutatea p pe unitatea de lungime, trecut peste un tambur fix de rază R , ca în figura 8.B.3, a. Cunoscînd coeficientul de frecare de alunecare μ între fir și disc, să se calculeze lungimea l a porțiunii de fir care poate atîrna liber de pe disc fără a strica echilibrul.

Rezolvare. În figura 8.B.3, b a fost izolat un element ds din fir, pentru care pot fi scrise următoarele ecuații de echilibru:

$$(\Sigma X_i = 0); \quad F + T \cos \frac{d\theta}{2} + pds \cos \theta - (T + dT) \cos \frac{d\theta}{2} = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad N - T \sin \frac{d\theta}{2} - (T + dT) \sin \frac{d\theta}{2} - pds \sin \theta = 0;$$

$$F \leq \mu N.$$

Se obține prin rezolvarea sistemului

$$\frac{dT}{d\theta} - \mu T = pR(\cos \theta + \mu \sin \theta).$$

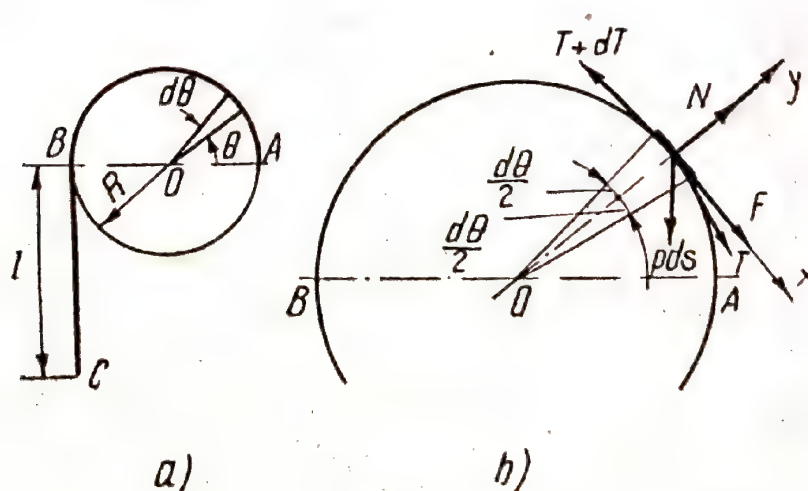


Fig. 8.B.3

Integrând ecuația diferențială de ordinul întâi cu membrul drept, se obține :

$$T = Ce^{\mu\theta} - \frac{2\mu p R}{1 + \mu^2} \cos \theta + \frac{p R(1 - \mu^2)}{1 + \mu^2} \sin \theta.$$

Punînd condițiile în punctele A și B :

$$\theta = 0; \quad T = 0;$$

$$\theta = \pi; \quad T = pl;$$

rezultă :

$$l \leq \frac{2\mu R(e^{\mu\pi} + 1)}{1 + \mu^2}.$$

Dacă se notează $\mu = \operatorname{tg} \varphi$ se obține :

$$l \leq R \operatorname{tg} 2\varphi(e^{\mu\pi} + 1).$$

8.B.4. Se dă un fir cu greutatea neglijabilă solicitat de forțe concentrate, ca în figura 8.B.4, *a*. Folosind datele de pe figură, să se calculeze valorile tensiunilor în A și B , înclinarea față de orizontală α , β , γ a fiecărei porțiuni și lungimea firului.

R e z o l v a r e. Ecuațiile de echilibru ale întregului fir cuprind proiecții pe orizontală, pe verticală și momente față de punctul A .

$$(\Sigma X_i = 0); \quad -T_1 \cos \alpha + T_2 \cos \beta = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad T_1 \sin \alpha + T_2 \sin \beta - 4P = 0;$$

$$(\Sigma M_A = 0); \quad -3Pa - P3a + T_2 \sin \beta \frac{7a}{2} = 0.$$

Se mai poate scrie relația geometrică :

$$\operatorname{tg} \alpha = 2.$$

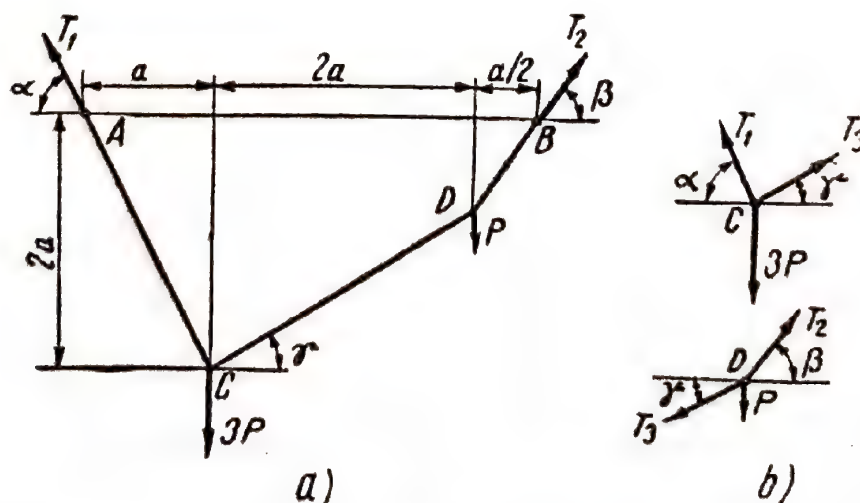


Fig. 8.B.4

Rezolvând sistemul obținut, rezultă:

$$T_1 = \frac{8P\sqrt{5}}{7}; \quad T_2 = \frac{4P\sqrt{13}}{7}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{3}{2}.$$

Se izolează nodurile C și D (fig. 8.B.4, b , c) și se scriu ecuațiile de echilibru pe orizontală și pe verticală a celor două sisteme de forțe concurente. Rezultă:

$$T_3 = \frac{P\sqrt{89}}{7}; \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{5}{8}.$$

Lungimea firului rezultă dintr-o relație matematică:

$$L = \frac{a}{\cos \alpha} + \frac{2a}{\cos \gamma} + \frac{a}{2 \cos \beta} = \frac{a}{4} (4\sqrt{5} + \sqrt{89} + \sqrt{13}) \approx 5,5a.$$

8.B.5. Un cablu omogen de lungime $2l$, avînd greutatea pe unitatea de lungime p , este suspendat cu cele două capete pe aceeași orizontală (fig. 8.B.5). Unghiul făcut de tangenta la cablu cu orizontala în punctele de suspendare este α .

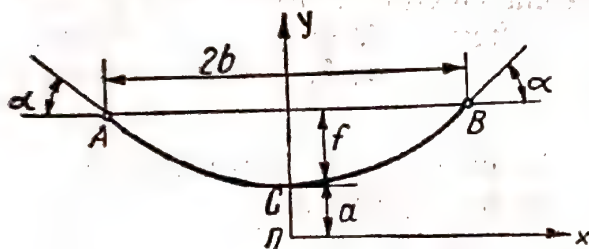


Fig. 8.B.5

Să se calculeze tensiunile maximă T_B , minimă T_0 și săgeata f a cablului.

Rezolvare. Din ecuația curbei funiculare

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a},$$

se poate scrie expresia tangentei la fir în punctul B :

$$\operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{dy}{dx} \right)_B.$$

Deci:

$$\operatorname{sh} \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Expresia lungimii porțiunii de fir CB este

$$l = a \operatorname{sh} \frac{b}{a} = a \operatorname{tg} \alpha.$$

Rezultă:

$$a = l \operatorname{ctg} \alpha.$$

Tensiunea în punctul C (tensiunea minimă) este

$$T_0 = pa = pl \operatorname{ctg} \alpha.$$

Proiecția tensiunii pe orizontală fiind constantă, rezultă:

$$T_{\max} = T_B = \frac{T_0}{\cos \alpha} = \frac{pl}{\sin \alpha}.$$

Se mai poate scrie :

$$T_B = py_B = p(a + f).$$

De aici,

$$f = \frac{T_B - pa}{p} = \frac{l(1 - \cos \alpha)}{\sin \alpha}.$$

8.B.6. Un cablu omogen de lungime $2l$ este suspendat cu cele două capete pe aceeași orizontală, astfel încât tensiunea în fiecare din punctele de suspendare să fie egală cu greutatea întregului cablu. Să se calculeze $2b$, f și α (fig. 8.B.6).

Rezolvare. Notînd p greutatea uniform distribuită pe unitatea de lungime a firului, rezultă :

$$T_A = T_B = 2pl.$$

Scriind ecuația de echilibru a firului pe verticală

$$T_A \sin \alpha + T_B \sin \alpha - 2pl = 0,$$

rezultă :

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}.$$

Tensiunea minimă este :

$$T_o = T_B \cos \alpha = pl \sqrt{3}.$$

Se poate scrie

$$T_B = py_B; \quad T_o = pa.$$

De aici,

$$f = y_B - a = \frac{T_B - T_o}{p} = l(2 - \sqrt{3}).$$

Se introduc coordonatele punctului B în ecuația lăncșorului

$$y_B = a \operatorname{ch} \frac{b}{a}.$$

De aici, rezultă :

$$\operatorname{ch} \frac{b}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Se scrie expresia lungimii porțiunii CB a curbei :

$$l_{CB} = l = a \operatorname{sh} \frac{b}{a}.$$

De aici,

$$\operatorname{sh} \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Deci :

$$AB = 2b = 2l \sqrt{3} \ln \sqrt{3}.$$

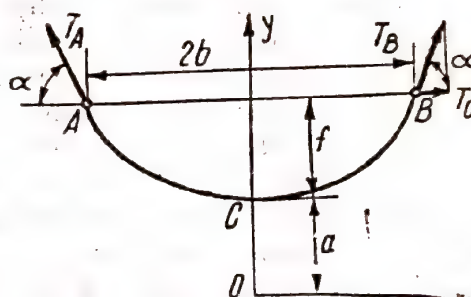


Fig. 8.B.6

9.A. PREZENTARE TEORETICĂ

9.A.1. Generalități

În general, problemele de mecanică trebuie privite sub un triplu aspect: geometric, cinematic și fizic, așa cum apar ele în dinamică.

Aspectul geometric se referă la poziția în raport cu un reper a corpului, la forma și dimensiunile lui, care pot fi variabile sau invariabile. *Deplasare* înseamnă schimbarea poziției, *deformare* înseamnă schimbarea formei sau a dimensiunilor. În operațiile geometrice nu intervine timpul, de aceea aceste operații se pot efectua în nenumărate feluri.

Aspectul cinematic cuprinde pe lângă aspectul geometric și noțiunea și mărimea de timp. Schimbarea poziției, formei și dimensiunilor unui corp în timp se face în mod continuu și *univoc*. Astfel, *deplasarea* în spațiu și în timp, față de un reper presupus fix, a unui corp se numește *mișcare*. Mișcarea mecanică este caracterizată în cinematică prin: *traietectorii*, *distribuții de viteze*, *distribuții de accelerații*, *condiții inițiale* etc.

Aspectul fizic se reflectă în mecanică prin însușirile de material ale corpurilor, dar mai ales prin *interacțiunile* lor exprimate prin distribuțiile de mase și de forțe.

În problemele de dinamică mai apar și calcule privind *momentele statice* și *momentele de inerție* care sînt asociate distribuției masei într-un corp.

9.A.2. Caracteristicile cinematice ale mișcării punctului

Traietectoria este mulțimea continuă a pozițiilor prin care trece punctul mobil într-un interval de timp.

Ecuția ei vectorială față de reperul fix O (fig. 9.A.1.) este:

$$\vec{r} = \vec{r}(t)^1 \quad (9.1)$$

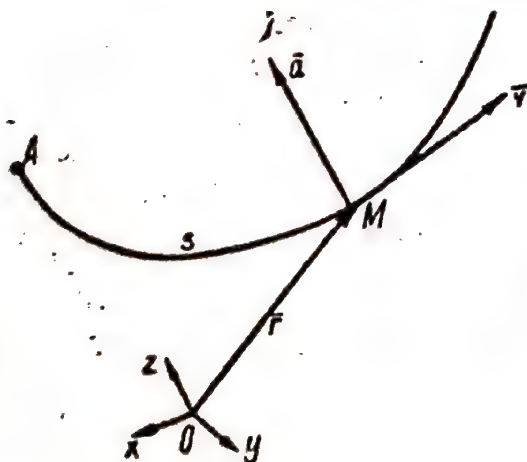


Fig. 9.A.1

Traietectoria punctului mobil M mai este și hodograful vectorului variabil \vec{r} cu originea în O .

Dacă parametrul scalar t reprezintă timpul, ecuația (9.1) exprimă și legea mișcării. Dacă se notează cu s coordonata curbilinie a punctului M față de A (originea arcelor), $s = s(t)$ este *ecuația orară a mișcării*.

Viteza punctului mobil M este o mărime vectorială — tangentă în M

¹ $\vec{r}(t)$ funcție uniformă, vectorială, continuă, cel puțin de două ori derivabilă.

la traiectorie — și care caracterizează direcția, sensul și modul de mișcare în timp a mobilului. Expresia matematică a vitezei în momentul t este:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}.$$

Observații

Dacă $\vec{r} = \vec{r}(s)$ este ecuația curbei pe care se mișcă M , ținând seamă de ecuația orară se poate scrie:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \vec{\tau} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \vec{\tau},$$

unde $\vec{\tau}$ este versorul tangentei la curbă, dirijat în sensul creșterii arcelor, iar \dot{s} reprezintă în valoare (pozitivă sau negativă) viteza în momentul t a mobilului. Dacă s crește $\dot{s} > 0$, \vec{v} are același sens cu $\vec{\tau}$ (mișcare directă). Dacă s scade $\dot{s} < 0$, \vec{v} este în sensul opus lui $\vec{\tau}$ (mișcare retrogradă). Notînd $\dot{s} = v$, expresia vectorului viteză devine:

$$\vec{v} = v \vec{\tau}, \quad (9.2)$$

unde v este valoarea scalară, algebrică, a vitezei în raport cu $\vec{\tau}$.

Întotdeauna trebuie considerată viteza cu toate caracteristicile ei vectoriale. De pildă, cînd viteza este constantă, $\vec{v} = \vec{c}$, adică nu variază nici direcția, nici sensul și nici mărimea ei, numai atunci se poate spune că *mișcarea mobilului este uniformă*. Numai o asemenea mișcare nu are accelerație.

Accelerația unui mobil se definește ca viteza de variație a vectorului viteză și are ca expresie matematică:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}.$$

Observație.

Numai dacă mobilul are o mișcare uniformă, cu viteza constantă în direcție, sens și mărime ($\vec{v} = \vec{c}$), mobilul nu are accelerație:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{c}} = 0.$$

Oricum altfel ar fi mișcarea, mobilul are accelerație.

9.A.3. Componentele vitezei și accelerației în raport cu triedrul natural

Viteza are o singură componentă în raport cu triedrul $M\tau n b$ (fig. 9.A.2), și anume după tangentă: $\vec{v} = v \vec{\tau}$.

Accelerația se deduce din ecuația precedentă prin derivare:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{v} \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \vec{n} = a_{\tau} \vec{\tau} + a_n \vec{n}, \quad (9.3)$$

unde $\frac{1}{R}$ este curbura în M a traiectoriei, iar \vec{n} versorul normalei principale în M la traiectorie.

¹ Notăție folosită în mecanică exclusiv pentru derivata în raport cu timpul a unei mărimi.

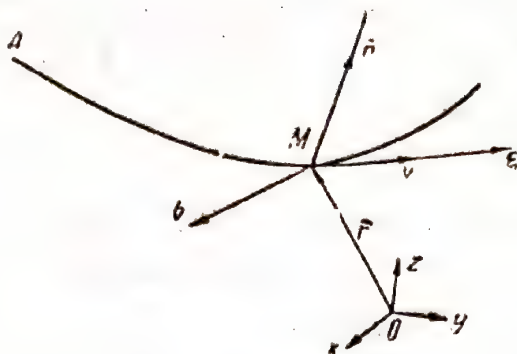


Fig. 9.A.2

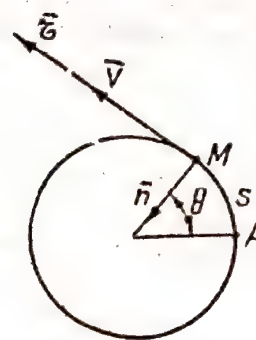


Fig. 9.A.3

Observații

Accelerația are două componente (sau două proiecții ortogonale): una tangențială $\dot{v}\bar{\tau}$ și cealaltă normală $\frac{v^2}{R}\bar{n}$.

Accelerația în orice punct M a mobilului se găsește în planul osculator din M al traiectoriei și este orientată înspre concavitatea acesteia.

Accelerația tangențială măsoară variația în timp a valorii v a vitezei, iar accelerația normală este datorită variației direcției vitezei și exprimă această variație. Modulul accelerației este:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\dot{v}^2 + \frac{v^4}{R^2}}. \quad (9.4)$$

Pentru ca accelerația să fie nulă, este necesar și suficient ca: $\dot{v} = 0$, adică

$$v = c \quad \text{și} \quad \frac{v^2}{R} = \frac{c^2}{R} = 0,$$

adică $R = \infty$, mișcarea să fie cu viteză constantă pe o linie dreaptă.

În tehnica mașinilor sînt mișcări pe traiectorii de curbura constantă. În afară de *dreaptă*, traiectoriile cu curbura constantă sînt cercul și elicea circulară dreaptă. Mișcările cu $|\bar{v}| = \text{constant}$ pe aceste traiectorii curbilinii au accelerații constante în modul $|\bar{a}| = c$.

De obicei, aceste mișcări sînt impropriu denumite ca uniforme. Ele ar putea fi considerate ca mișcări *pseudo-uniforme*.

Mișcarea cu accelerație constantă în direcție, sens și modul, $\bar{a} = \bar{a}_0$, se întîlnește în dinamică la mișcarea pe parabolă a punctului material liber acționat de o forță constantă în direcție, sens și modul, cum ar fi căderea în vid a punctului material la suprafața Pămîntului.

9.A.4. Mișcarea circulară

Aceasta este un caz particular al mișcării oarecare. Se poate folosi triedrul natural cu toate rezultatele obținute (fig. 9.A.3).

Viteza liniară se obține prin derivare din $s = r\theta$, adică $v = \dot{s} = r\dot{\theta}$, unde

$$\dot{\theta} = \omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

este viteza unghiulară.

Accelerația unghiulară:

$$\dot{\omega} = \theta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t}.$$

Expresia accelerației liniare:

$$\vec{a} = r\dot{\omega}\vec{\tau} + r\omega^2\vec{n}, \quad (9.5)$$

unde $a_\tau = r\dot{\omega}$ și $a_n = r\omega^2$ sînt valorile accelerațiilor tangențiale și normale.

Modulul accelerației liniare este:

$$|\vec{a}| = r\sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4}. \quad (9.6)$$

Observații.

În general, $\omega = \omega(t)$ reprezintă legea mișcării circulare. Mișcarea circulară cu viteză unghiulară constantă $\omega = \omega_0$ și cu accelerația unghiulară nulă ($\dot{\omega} = 0$) este una din mișcările pseudouniforme. Ecuația orară a acestei mișcări este:

$$\dot{\theta} = \omega_0, \text{ deci: } \theta = \omega_0 t + \theta_0,$$

iar accelerația liniară nu are componentă tangențială, ci numai normală: $r\omega_0^2$.

Mișcarea circulară cu *accelerație unghiulară constantă* este impropriu denumită uniform variată. Ea este caracterizată prin ecuația: $\dot{\omega} = c$.

Se integrează de două ori:

$$\dot{\theta} = \omega = ct + C_1 \text{ și } \theta = \frac{c}{2}t^2 + C_1t + C_2,$$

iar cele două constante de integrare C_1 și C_2 se determină cu ajutorul condițiilor inițiale: la $t = 0$, $\omega = \omega_0$ și $\theta = \theta_0$. În consecință:

$$\omega = ct + \omega_0 \text{ și } \theta = \frac{c}{2}t^2 + \omega_0 t + \theta_0.$$

Se calculează modulul accelerației liniare:

$$|\vec{a}| = r\sqrt{c^2 + (ct + \omega_0)^4}$$

și se constată că \vec{a} este o funcție destul de complicată de timp.

Dacă $c\omega_0 > 0$ mișcarea este propriu-zis accelerată, dacă $c\omega_0 < 0$ mișcarea este întârziată pînă ce se anulează viteza unghiulară ω , în intervalul de timp:

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{c}.$$

9.A.5. Componentele vitezei și accelerației în raport cu triedrul fix

Triedrul $Oxyz$ fix este triortogonal drept (fig. 9.A.4). Ecuațiile parametrice ale unei curbe sînt:

$$x = x(s); \quad y = y(s); \quad z = z(s),$$

s fiind abscisa curbilinie, în raport cu originea arcelor A , a punctului curent M .

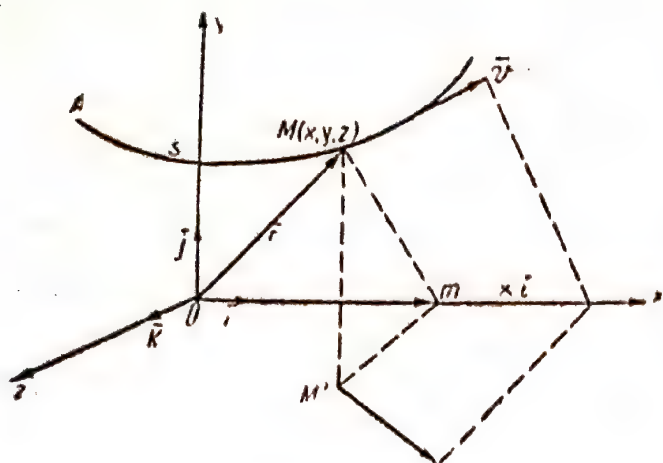


Fig. 9.A.4

Dacă $s = s(t)$, unde t este timpul, este ecuația orară a mișcării punctului M , ecuațiile:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

reprezintă traiectoria și legea mișcării punctului M .

Expresia complexă a vitezei este:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k},$$

unde $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$, $v_z = \dot{z}$, sînt valorile scalare ale proiecțiilor

(componentelor) vitezei pe cele trei axe ale triedrului fix.

Modulul vitezei este:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (9.7)$$

Expresia complexă a accelerației este:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k},$$

unde $a_x = \ddot{x}$, $a_y = \ddot{y}$, $a_z = \ddot{z}$ sînt scalarii proiecțiilor (componentelor) accelerației pe axele triedrului fix.

Modulul accelerației este:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}. \quad (9.8)$$

Observații

O consecință imediată a definițiilor este *teorema*:

Proiecția pe o axă fixă a vitezei sau a accelerației unui punct mobil este egală cu viteza, respectiv cu accelerația punctului pe axa considerată¹.

O aplicație clasică a celor prezentate pînă aici se referă la mișcarea pe o elice circulară dreaptă.

Ecuațiile parametrice ale elicei circulare drepte sînt:

$$x = r \cos \theta; \quad y = r \sin \theta, \quad z = (r \operatorname{tg} \alpha) \theta,$$

unde $M(x, y, z)$ este punctul curent pe elice, r , raza cilindrului circular drept, θ , în radiani, este unghiul dintre OA și Om , m fiind proiecția ortogonală a punctului M de pe elice pe planul cercului de bază (fig. 9.A.5), α înclinarea elicei cu pasul: $p = 2\pi r \operatorname{tg} \alpha$.

¹ Forma enunțului are la bază convenția stabilită la Cap. 2.A. Proiecția unui vector pe o axă este un vector. Proiecțiile ortogonale ale unui vector pe axele unui triedru tri-dreptunghic sînt egale cu componentele vectorului după cele trei direcții ale axelor.

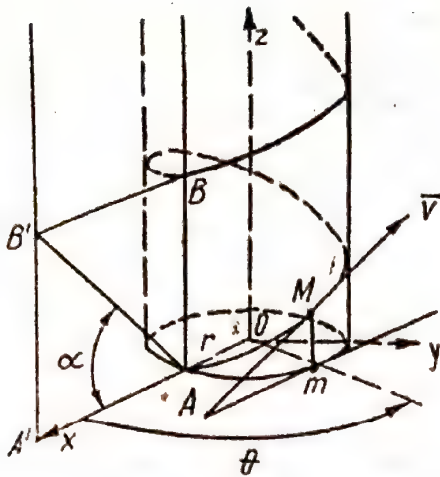


Fig. 9.A.5

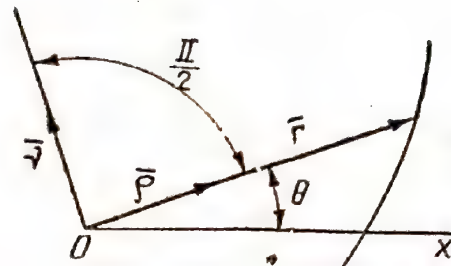


Fig. 9.A.6

Dacă $\theta = \theta(t)$ reprezintă legea mișcării circulare a proiecției m , $\dot{\theta} = \omega$ viteza unghiulară și $\ddot{\theta} = \dot{\omega}$ accelerația unghiulară, se obțin următoarele relații:

$$v = \frac{r\omega}{\cos \alpha}; \quad a_{\tau} = \frac{r\dot{\omega}}{\cos \alpha};$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{r^2\omega^2}{R \cos^2 \alpha}; \quad |\vec{a}| = r \sqrt{\frac{\dot{\omega}^2}{\cos^2 \alpha} + \omega^4}; \quad R = \frac{r}{\cos^2 \alpha},$$

unde R este raza de curbura a elicei circulare drepte.

9.A.6. Componentele vitezei și accelerației în coordonate polare (plan)

Sistemul de referință se compune din polul O (fig. 9.A.6), semi-axa polară Ox , raza polară r , putând primi valori între 0 și $+\infty$, și θ , măsurat de la axa polară în sens direct (trigonometric) sau în sens contrar, putând primi valori între 0 și $+\infty$, respectiv între 0 și $-\infty$.

Ecuția curbei se poate prezenta sub una din formele:

$$f(r, \theta) = 0 \text{ sau } r = r(\theta), \quad \theta = \theta(r).$$

Pentru a cunoaște mișcarea trebuie dată și legea de variație în timp a unei coordonate r sau θ .

Pentru exprimarea sub forma vectorială, se introduc și versorii: $\bar{\rho}$ — dirijat după raza polară; \bar{v} — dirijat după perpendiculara, în sens trigonometric, în O , pe raza polară.

Se stabilesc următoarele relații:

$$\dot{\bar{\rho}} = \dot{\theta}\bar{v} \text{ și } \dot{\bar{v}} = -\dot{\theta}\bar{\rho}.$$

Pornind de la $\vec{r} = r\bar{\rho}$ se obțin componentele vitezei:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\bar{\rho} + r\dot{\theta}\bar{v}, \text{ adică: } v_{\rho} = \dot{r}; \quad v_v = r\dot{\theta} \text{ și } |\vec{v}| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}. \quad (9.9)$$

La fel, pentru *acelerație* se găsesc componentele:

$$a_p = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2; \quad a_v = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) \text{ și}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) \right]^2}. \quad (9.10)$$

9.A.7. Viteza și accelerația areolară

Viteza areolară a punctului M , în raport cu un punct fix, este o mărime vectorială care caracterizează viteza cu care raza vectorie OM generează suprafața conică cu vârful în O , avînd ca directoare traiectoria punctului M (fig. 9.A.7) și care are expresia:

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{v}). \quad (9.11)$$

Observații

Dacă traiectoria este plană și polul O se află în planul ei, $\vec{\Omega}$ este un vector de direcție invariabilă, perpendiculară pe plan. În acest caz valoarea vitezei areolare în coordonate carteziene este dată de expresia:

$$\Omega = \frac{1}{2} (x\dot{y} - \dot{x}y)$$

iar în coordonate polare este:

$$\Omega = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$$

Accelerația areolară este viteza de variație a vectorului viteză areolară a punctului M (fig. 9.A.8) și are expresia:

$$\dot{\vec{\Omega}} = \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{a}). \quad (9.12)$$

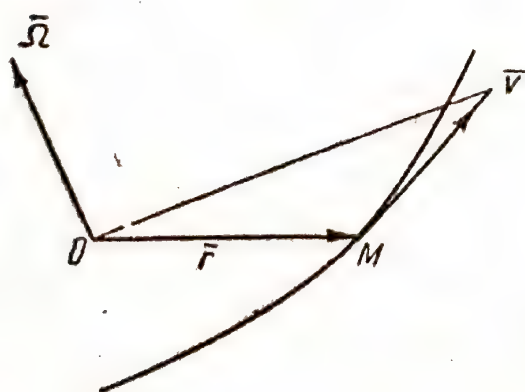


Fig. 9.A.7

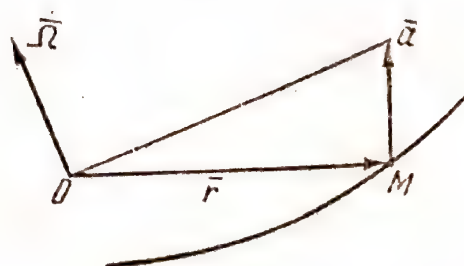


Fig. 9.A.8

Observații

În cazul traiectoriei plane și cu polul O în plan, $\vec{\Omega}$ este un vector cu direcția constantă, iar valoarea accelerației areolare este dată de expresia:

$$\dot{\Omega} = \frac{1}{2} (\dot{x}\dot{y} - \ddot{x}y)$$

în coordonate carteziene, iar în coordonate polare de expresia:

$$\dot{\Omega} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}).$$

9.B. APLICAȚII LA CINEMATICA PUNCTULUI

9.B.1. Un punct se mișcă pe dreapta $OABC$ pornind din O fără viteză inițială (fig. 9.B.1, a). Pe porțiunea OA mișcarea este uniform accelerată atingându-se viteza v_1 în timpul t_1 în punctul A , pe porțiunea AB mișcarea este uniformă, iar pe porțiunea BC , parcursă în timpul t_3 , mișcarea este uniform întârziată. Mobilul se oprește în C . Cunoscând distanța $OC = d$, să se studieze mișcarea mobilului și să se reprezinte diagramele accelerației, vitezei și spațiului.

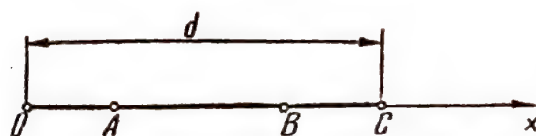
Rezolvare. Mișcarea este rectilinie, în lungul axei Ax . Pe prima porțiune:

$$\ddot{x} = a_1 \text{ și prin integrare } \dot{x} = a_1 t,$$

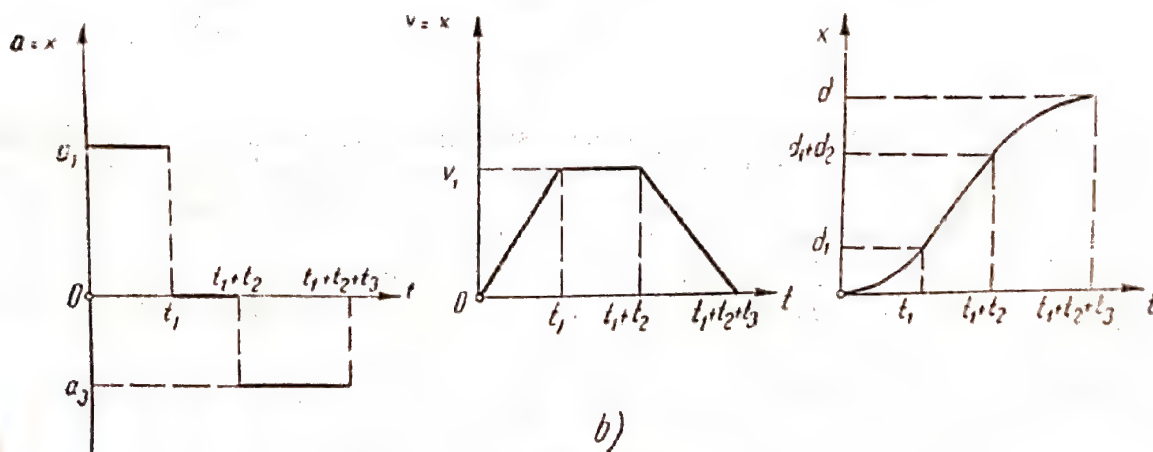
$$x = \frac{a_1 t^2}{2}$$

iar

$$(\dot{x})_A = v_1 = a_1 t_1, \text{ deci } \ddot{x} = a_1 = \frac{v_1}{t_1} \text{ și } d_1 = \frac{v_1 t_1}{2}.$$



a)



b)

Fig. 9.B.1

Pe porțiunea AB ; $\ddot{x} = v_1$, $\ddot{a} = 0$, $d_2 = v_1 t_2$.

Pe porțiunea BC ; $\ddot{a} = -a_3$, $\dot{x} = v_1 - a_3[t - (t_1 + t_2)]$.

$$x = -\frac{a_3}{2} [t - (t_1 + t_2)]^2 + v_1[t - (t_1 + t_2)] + \frac{v_1 t_1}{2} + v_1 t_2.$$

În punctul C :

$$t = t_1 + t_2 + t_3; \quad x = d, \quad \dot{x} = 0,$$

de unde:

$$a_3 = \frac{v_1}{t_3}; \quad t_2 = \frac{d}{v_1} - \frac{t_1 + t_3}{2}.$$

Diagramele mișcării sînt date în figura 9.B.1, b .

9.B.2. Două mobile se mișcă în linie dreaptă unul spre celălalt. Primul pleacă din punctul A avînd o mișcare uniformă cu viteza $v_1 = 12$ m/s; al doilea pleacă din B după $t_1 = 5$ s de la plecarea primului și are o mișcare uniform accelerată cu viteza inițială $v_0 = 10$ m/s și accelerația $a = 2$ m/s². Cunoscînd distanța $AB = d = 300$ m, să se determine locul și momentul întîlnirii mobilelor (fig. 9.B.2).

Rezolvare. Legile de mișcare ale mobilelor sînt:

$$x = v_1(t + t_1); \quad (t \geq t_1),$$

$$x = -\frac{at^2}{2} - v_0 t + d; \quad (t \geq 0).$$

Întîlnirea are loc cînd:

$$v_1(t + t_1) = -\frac{at^2}{2} - v_0 t + d,$$

adică:

$$t^2 + 22t - 240 = 0.$$

Rezultă: $t_1 = 8$ s și $t_2 = -30$ s. Se alege valoarea pozitivă pentru timpul t . Introduscînd t_1 în expresia lui x , rezultă $x = 156$ m.



Fig. 9.B.2

9.B.3. Două mobile M și N pornesc simultan din punctele A și B pe două drepte care se intersectează în unghi drept, îndreptîndu-se către intersecția O . Se cunosc coordonatele $OA = x_0$ și $OB = y_0$. Ambele mobile au o mișcare uniform accelerată, cu accelerațiile a_1 și a_2 , fără viteze inițiale. Să se determine timpul după care distanța s dintre mobile va fi minimă, mărimea acestei distanțe minime și pozițiile corespunzătoare ale mobilelor (fig. 9.B.3).

Rezolvare. Legile de mișcare sînt:

$$x = x_0 - \frac{1}{2} a_1 t^2, \quad y = y_0 - \frac{1}{2} a_2 t^2.$$

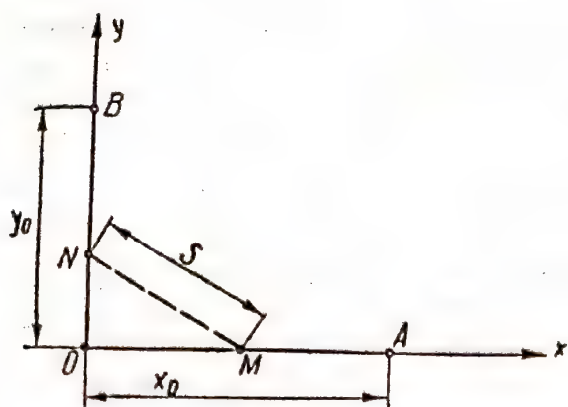


Fig. 9.B.3

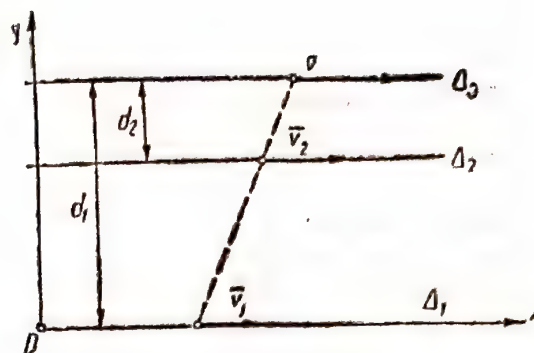


Fig. 9.B.4

Distanța s :

$$s^2 = x^2 + y^2 = \frac{1}{4} (a_1^2 + a_2^2) t^4 - (a_1 x_0 + a_2 y_0) t^2 + x_0^2 + y_0^2$$

va fi minimă pentru $\frac{d(s^2)}{dt} = 0$, adică

$$t = \sqrt{\frac{2(a_1 x_0 + a_2 y_0)}{a_1^2 + a_2^2}},$$

pozițiile mobilelor fiind:

$$x = \frac{a_2(a_2 x_0 - a_1 y_0)}{a_1^2 + a_2^2}; \quad y = \frac{a_1(a_1 y_0 - a_2 x_0)}{a_1^2 + a_2^2},$$

iar

$$s = \frac{|a_1 y_0 - a_2 x_0|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}.$$

iv₁ 9.B.4. Două puncte se mișcă pe dreptele paralele Δ_1 și Δ_2 cu vitezele v_1 și v_2 , iar un al treilea punct se mișcă pe o a treia paralelă Δ_3 . Cele trei puncte sînt mereu coliniare. Cunoșcînd raportul distanțelor dintre drepte $\lambda = d_2/d_1$, să se determine viteza v (fig. 9.B.4).

Rezolvare. Din condiția de colinearitate a punctelor:

$$\begin{vmatrix} x & d_1 & 1 \\ x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & d_1 - d_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

prin derivare, se obține:

$$v = \frac{v_2 - \lambda v_1}{1 - \lambda}.$$

9.B.5. Un om de înălțime h trece cu viteza v_1 sub o lampă situată la înălțimea H . Să se determine viteza v a extremității umbrei omului pe pămînt (fig. 9.B.5).

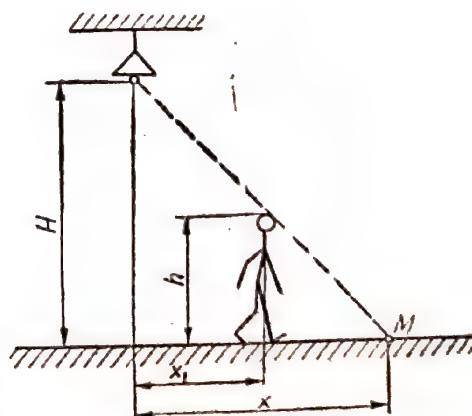


Fig. 9.B.5

Rezolvare. Din asemănarea triunghiurilor formate se poate scrie:

$$x = \frac{H}{H-h} x_1.$$

Prin derivare, rezultă:

$$v = \frac{H}{H-h} v_1.$$

9.B.6. Manivela OA se rotește uniform în jurul unui punct fix O cu viteza unghiulară ω constantă și, prin intermediul bieiei $AM = b$, ea pune în mișcare culisa M (fig. 9.B.6). Să se determine viteza și accelerația culisei și expresiile aproximative ale vitezei și accelerației dacă raportul r/b este mic.

Rezolvare. Exprimând abscisa lui M și aplicând teorema sinusurilor ($\theta = \omega t$), rezultă:

$$x = r \cos \omega t + b \sqrt{1 - \frac{r^2}{b^2} \sin^2 \omega t},$$

$$\dot{x} = -r\omega \sin \omega t - \frac{r^2 \omega \sin 2\omega t}{2b \sqrt{1 - \frac{r^2}{b^2} \sin^2 \omega t}}.$$

Dacă raportul este mic, se poate dezvolta în serie:

$$x = r \cos \omega t + \frac{r^2}{4b} \cos 2\omega t + b - \frac{r^2}{4b},$$

$$\dot{x} = -r\omega \sin \omega t - \frac{r^2 \omega}{2b} \sin 2\omega t,$$

$$\ddot{x} = -r\omega^2 \cos \omega t - \frac{r^2 \omega^2}{b} \cos 2\omega t.$$

9.B.7. Diagrama viteză-timp a unei mișcări rectilinii are forma sfertului de elipsă din figura 9.B.7. Să se determine drumul x străbătut de mobil pînă la oprire.

Rezolvare. Drumul reprezintă aria de sub curba vitezei, deci:

$$x = \int_0^{t_1} v dt = \frac{\pi}{4} v_0 t_1.$$

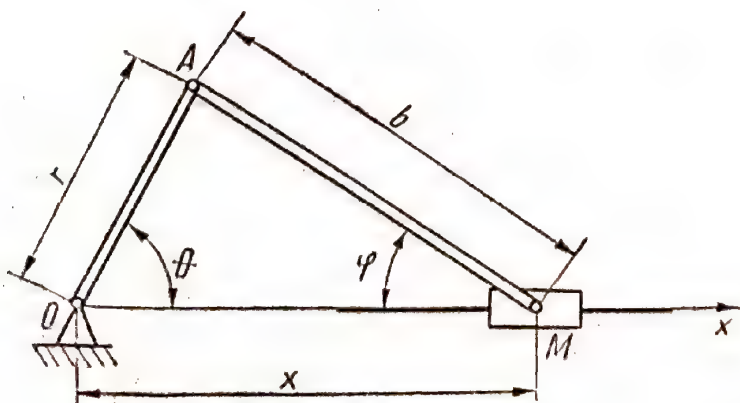


Fig. 9.B.6

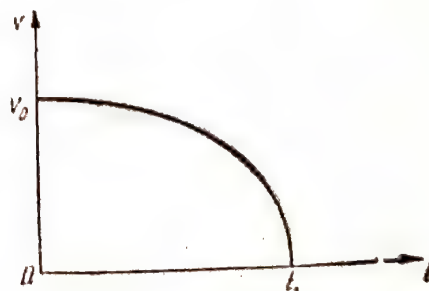


Fig. 9.B.7

9.B.8. Un disc de rază R se rostogolește fără alunecare pe dreapta tangentă Ox . Să se determine traiectoria unui punct M de pe periferia discului, precum și legile lui de mișcare, dacă viteza constantă v_0 a centrului C al discului este cunoscută.

Rezolvare. Alegînd un sistem de referință cu originea O în punctul unde inițial M coincide cu punctul de contact cu solul și axa Ox paralelă cu v_0 , și notînd cu θ unghiul de rotire:

$$x = R(\theta - \sin \theta); \quad y = R(1 - \cos \theta)$$

sînt ecuațiile parametrice ale unei cicloide. Din relații geometrice rezultă:

$$\theta = \frac{v_0 t}{R}; \quad \dot{\theta} = \frac{v_0}{R}.$$

și deci: $x = v_0 t - R \sin \frac{v_0 t}{R}; \quad y = R \left(1 - \cos \frac{v_0 t}{R} \right).$

9.B.9. Să se arate că orice mișcare în care avem îndeplinită condiția

$$v^2 = As + B,$$

unde s este arcul de curbă parcurs de mobil, iar v viteza lui, este o mișcare uniform variată.

Rezolvare. Prin derivare

$$2v\dot{v} = A\dot{s},$$

dar

$$\dot{s} = v.$$

Deci, $a_\tau = \dot{v} = \frac{A}{2} = \text{constant}$ și mișcarea este uniform variată.

9.B.10. Un cerc de rază r se rotește uniform cu viteza unghiulară ω în jurul unui punct O situat pe circumferința lui (fig. 9.B.10). Să se studieze mișcarea punctului M de intersecție a cercului cu dreapta Ox .

Rezolvare. Abscisa punctului M este:

$$x = 2r \cos \theta = 2r \cos \omega t,$$

de unde, prin derivare, rezultă:

$$\dot{x} = -2r\omega \sin \omega t,$$

$$\ddot{x} = -2r\omega^2 \cos \omega t.$$

9.B.11. Cunoscînd diagrama viteză-timp a unei mișcări rectilinii (fig. 9.B.11, a) să se traseze diagramele drumului parcurs de mobil și a accelerației sale.

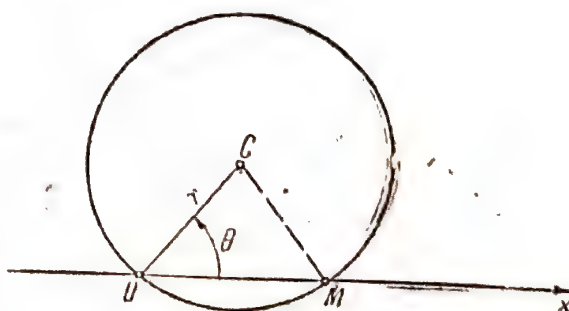


Fig. 9.B.10

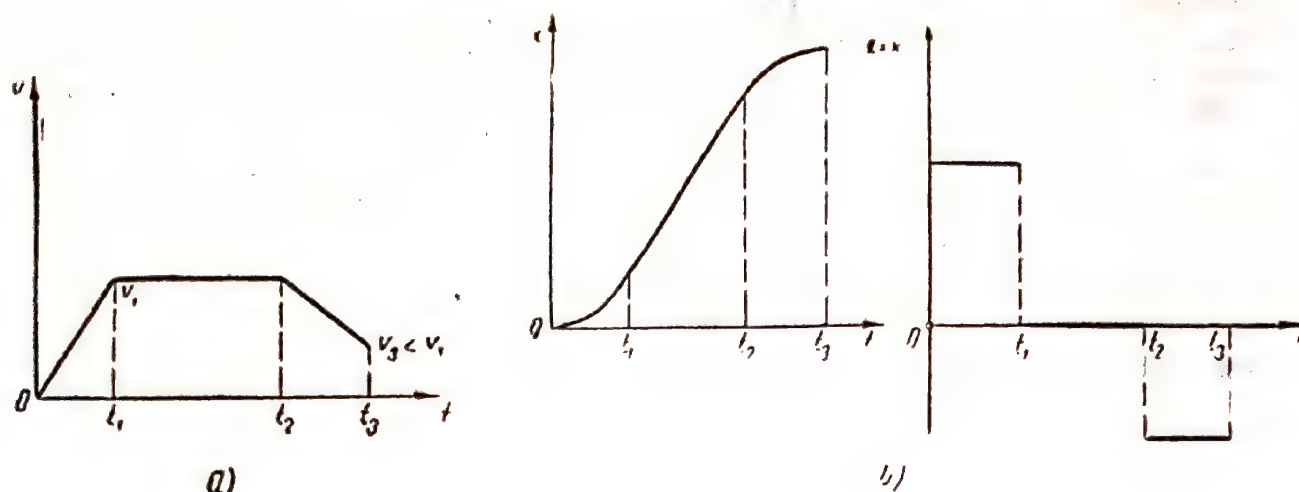


Fig. 9.B.11

Rezolvare. Legea drumului și accelerația rezultă din relațiile de definiție:

$$x = \int_0^t v dt \quad \text{și} \quad a = \frac{dv}{dt}.$$

Se obțin astfel cele trei porțiuni ale diagramei:

$$x = \frac{v_1}{2t_1} t^2 \quad \text{și} \quad a = \frac{v_1}{t_1} \quad (0 \leq t \leq t_1);$$

$$x = v_1 \left(t - \frac{t_1}{2} \right) \quad \text{și} \quad a = 0 \quad (t_1 \leq t \leq t_2);$$

$$x = v_1 \left(t - \frac{t_1}{2} \right) - \frac{v_1 - v_3}{t_3 - t_2} \frac{(t - t_2)^2}{2};$$

$$a = - \frac{v_3 - v_1}{t_3 - t_2} \quad (t_2 \leq t \leq t_3).$$

și diagramele căutate sînt date în figura 9.B.11, b.

9.B.12. Culisa M este pusă în mișcare prin intermediul firului MBA , ce se înfășoară pe o roată de rază r care se rotește cu viteza unghiulară $\omega = ct$ (fig. 9.B.12). Să se determine viteza culisei M în funcție de poziția sa.

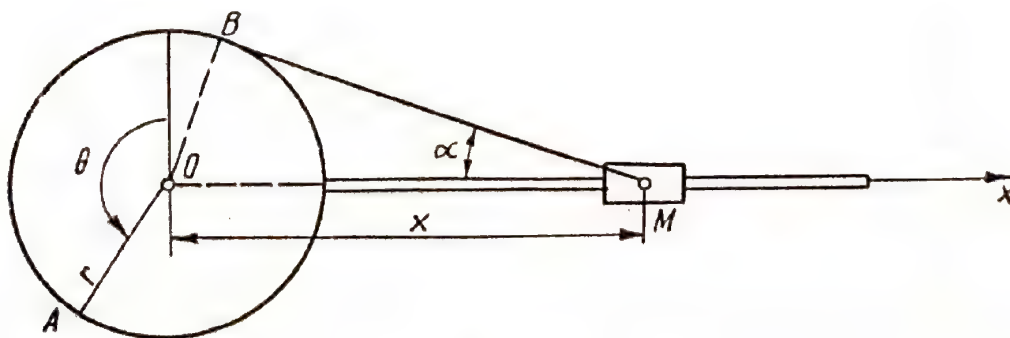


Fig. 9.B.12

R e z o l v a r e. Lungimea firului este :

$$l = r\omega t + r\alpha + \sqrt{x^2 - r^2}.$$

Prin derivare, deoarece $l = \text{constant}$, se obține :

$$\dot{x} = -\frac{r\omega x}{\sqrt{x^2 - r^2}} = -\frac{r\omega}{\cos \alpha}.$$

9.B.13. Legea de mișcare a unui punct este :

$$\vec{r} = \frac{1}{2} \alpha t^2 \vec{i} + \left(\frac{1}{2} \beta t^2 + \gamma \right) \vec{j},$$

unde $\alpha > 0$, iar β, γ sînt constante. Știind că mișcarea începe la momentul $t = 0$, să se determine traiectoria, viteza și accelerația. Să se determine hodograful vitezei.

R e z o l v a r e. Traiectoria este în planul xOy . Eliminînd timpul între coordonate, se obține :

$$y = \frac{\beta}{\alpha} x + \gamma,$$

care este o semidreaptă. Prin derivare :

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \alpha t \vec{i} + \beta t \vec{j},$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}.$$

Hodograful vitezei rezultă din :

$$\dot{x} = \alpha t; \quad \dot{y} = \beta t,$$

deci,

$$\dot{y} = \frac{\beta}{\alpha} \dot{x}.$$

9.B.14. Legea de mișcare a unui punct este :

$$\vec{r} = a \cos \omega t \vec{i} + b \sin \omega t \vec{j},$$

unde a, b, ω sînt constante pozitive. Știind că mișcarea începe la $t = 0$, să se determine traiectoria, viteza și accelerația. Să se determine hodograful vitezei.

R e z o l v a r e. Traiectoria este elipsa :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = -\omega a \sin \omega t \vec{i} + \omega b \cos \omega t \vec{j},$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = -\omega^2 a \cos \omega t \vec{i} - \omega^2 b \sin \omega t \vec{j}.$$

Cum :

$$\dot{x} = -\omega a \sin \omega t; \quad \text{iar} \quad \dot{y} = \omega b \cos \omega t,$$

hodograful vitezei este elipsa :

$$\frac{\dot{x}^2}{(\omega a)^2} + \frac{\dot{y}^2}{(\omega b)^2} = 1.$$



9.B.15. Două mobile M_1 și M_2 pornesc simultan din A , unul pe diametrul AB , iar altul pe semicercul AM_2B . Mobilul M_1 are viteză constantă dată v_0 iar mobilul M_2 pornește din repaus avînd accelerația tangențială, constantă, necunoscută. Știind că cele două mobile ajung simultan în B , să se calculeze accelerația mobilului M_2 , cînd ajunge în B (fig. 9.B.15).

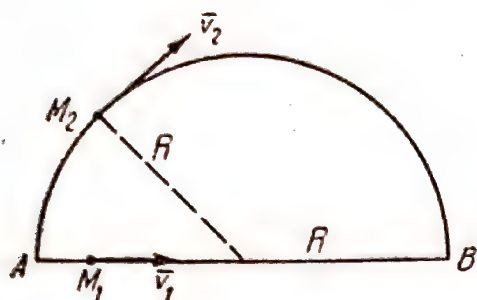


Fig. 9.B.15

Rezolvare. Legile de mișcare ale mobilelor luînd în considerare valorile inițiale sînt:

$$AM_1 = s_1 = v_0 t; \quad \widehat{AM_2} = s_2 = \frac{a_\tau t^2}{2},$$

cu vitezele: $v_1 = v_0$; $v_2 = a_\tau t$.

Cînd mobilele ajung în B , legile devin:

$$\text{pentru } M_1: 2R = v_0 t_B;$$

$$\text{pentru } M_2: \pi R = \frac{a_\tau t_B^2}{2} \quad \text{și} \quad v_B = a_\tau t_B.$$

Rezultă

$$t_B = \frac{2R}{v_0}; \quad v_B = \pi v_0 \quad \text{și} \quad a_\tau = \frac{\pi v_0^2}{2R}.$$

Accelerația mobilului M_2 ajuns în B , va avea componentele:

$$a_\tau = \frac{\pi v_0^2}{2R}; \quad a_n = \frac{v_B^2}{R} = \frac{\pi^2 v_0^2}{R},$$

$$\text{de unde } a_B = \frac{\pi v_0^2}{2R} \sqrt{1 + 4\pi^2},$$

9.B.16. Un mobil pornește din repaus, pe cercul de rază R , cu accelerație unghiulară constantă $\dot{\omega}$, cunoscută. Să se determine drumul $AM = s$ parcurs de mobil din momentul inițial pînă în momentul în care unghiul dintre vectorul viteză și accelerație este 45° (fig. 9.B.16).

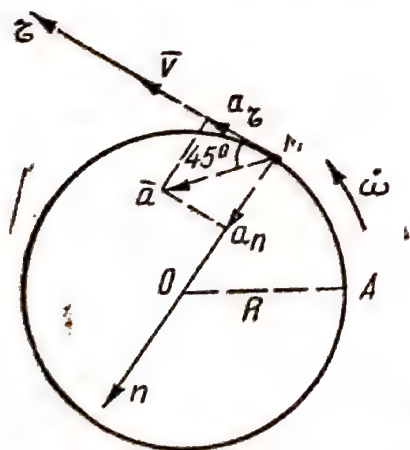


Fig. 9.B.16

Rezolvare. Presupunînd că în poziția M unghiul între v și a este de 45° , se deduce, prin descompunerea accelerației \vec{a} după sistemul τMn , că

$$a_\tau = a_n.$$

Exprimîndu-se în funcție de elementele unghiulare ale mișcării, se obține:

$$\omega = \sqrt{\dot{\omega}}.$$

Ecuația orară și viteza în mișcarea pe cerc

$$\theta = \frac{\dot{\omega} t^2}{2}, \quad \omega = \dot{\omega} t$$

conduc la

$$t = \frac{1}{\sqrt{\dot{\omega}}} \quad \text{și} \quad \theta = \frac{1}{2}, \quad \text{adică} \quad s = R\theta = \frac{R}{2}.$$

9.B.17. Un mobil se mișcă pe un cerc de rază R cu accelerație tangențială constantă. Știind că în momentul inițial, în A viteza este v_0 .

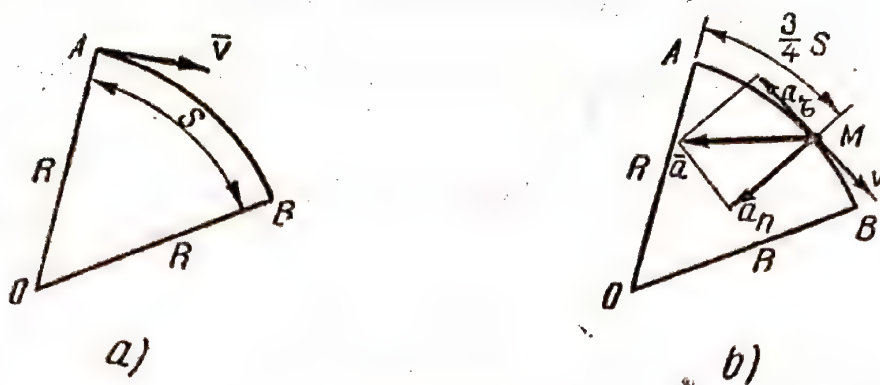


Fig. 9.B.17

iar după parcurgerea arcului $\widehat{AB} = S$ mobilul se oprește, să se determine accelerația și drumul parcurs la timpul $t = \frac{1}{2} t_B$ (fig. 9.B.17, a).

Rezolvare. Folosind ecuațiile mișcării scrise în B

$$S = v_0 t_B - \frac{a_\tau t_B^2}{2}; \quad v_B = v_0 - a_\tau t_B = 0,$$

se obțin:

$$t_B = \frac{2S}{v_0}; \quad a_\tau = \frac{v_0^2}{2S}.$$

La momentul

$$t = \frac{1}{2} t_B,$$

rezultă:

$$v = \frac{v_0}{2}; \quad s = \frac{3}{4} S; \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{v_0^2}{4R}.$$

Accelerația va fi:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \frac{v_0^2}{4RS} \sqrt{4R^2 + S^2},$$

iar unghiul θ între \bar{v} și \bar{a} (fig. 9.B.17, b),

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{S}{2R}.$$

9.B.18. Un punct se mișcă pe un cerc de rază $R = 2$ m; accelerația tangențială a punctului este constantă $a_\tau = 1$ m/s². Știind că după o secundă de la începutul mișcării accelerația este $a = 2$ m/s², să se determine viteza inițială v_0 a punctului, ecuația de mișcare, precum și viteza și accelerația la un moment dat.

Rezolvare. Se obțin ecuațiile:

$$s = \frac{t^2}{2} + v_0 t; \quad v = t + v_0.$$

Scriind componentele accelerației la $t = 1 \text{ s}$,

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{1 + \frac{(1 + v_0)^2}{4}} = 2; \quad v_0 = 0,86 \text{ m/s}$$

și

$$s = \frac{t^2}{2} + 0,86t; \quad v = t + 0,86;$$

$$a_x = 1; \quad a_y = \frac{(t + 0,86)^2}{2}.$$

9.B.19. Mișcarea unui punct este definită de:

$$x = 20t^2 + 5; \quad y = 15t^2 - 3$$

(t se dă în secunde, x și y în centimetri). Să se determine mărimea și direcția vitezei și accelerației când $t = 2 \text{ s}$.

Rezolvare. Folosind relațiile:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}; \quad a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$$

$\cos(\bar{v}, x) = \frac{\dot{x}}{v}$, etc., se obține:

$$v = 100 \text{ cm/s}; \quad a = 50 \text{ cm/s}^2; \quad \cos(\bar{v}, x) = \cos(\bar{a}, x) = 0,8;$$

$$\cos(\bar{v}, y) = \cos(\bar{a}, y) = 0,6.$$

9.B.20. Să se determine ecuația traiectoriei unui punct, dacă mișcarea sa este dată de ecuațiile:

$$(a) \quad x = 20t^2 + 5; \quad y = 15t^2 + 3;$$

$$(b) \quad x = 5 + 3 \cos t; \quad y = 4 \sin t.$$

Rezolvare. Eliminându-se parametrul t între coordonate se obțin:

(a) linia dreaptă $3x - 4y - 3 = 0$ cu poziția inițială în punctul de coordonate:

$$x = 5; \quad y = 3;$$

(b) elipsa $\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$. Poziția inițială în punctul de coordonate:

$$x = 8; \quad y = 0.$$

9.B.21. Mișcarea unei încărcături eliberate de un avion este dată de ecuațiile:

$$x = v_0 t; \quad y = h - \frac{gt^2}{2},$$

axa Ox fiind orizontală, iar Oy verticală în sus. Să se determine traiectoria încărcăturii, viteza (modul și direcție) în momentul atingerii solului (intersecția cu axa Ox), bătaia corespunzătoare și hodograful vitezei.

Rezolvare. Eliminând timpul, se obține traiectoria

$$y = h - g \frac{x^2}{2v_0^2}.$$

Prin derivare, din x și y se obține, la $y = 0$:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}; \quad \cos(\bar{v}, x) = \frac{v_0}{v}, \quad \cos(\bar{v}, y) = -\frac{\sqrt{2gh}}{v}.$$

Pentru $y = 0$, se obține din ecuația traiectoriei bătaia $x = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$.
Hodograful se obține eliminând timpul din $X = \dot{x}$, $Y = \dot{y}$;
deci:

$$X = v_0.$$

9.B.22. Știind că ecuațiile de mișcare ale unui punct în coordonate polare sînt:

$$r = r_0 e^{\alpha t}; \quad \theta = \beta t,$$

să se afle traiectoria sa și să se determine viteza și accelerația punctului.

Rezolvare. Eliminînd timpul, se obține:

$$r = r_0 e^{\frac{\alpha}{\beta} \theta},$$

o spirală logaritmică. În coordonate polare se obține:

$$v_p = \dot{r} = \alpha r_0 e^{\alpha t}; \quad v_v = r\dot{\theta} = \beta r_0 e^{\alpha t};$$

$$a_p = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = (\alpha^2 - \beta^2)r_0 e^{\alpha t};$$

$$a_v = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 2\alpha\beta r_0 e^{\alpha t}.$$

9.B.23. Un punct are o mișcare plană cu viteza $v_0 = \text{const.}$, $\dot{\theta} = \omega_0$ și în momentul inițial $t = 0$, $r = 0$. Să se determine ecuațiile de mișcare în coordonate polare.

Rezolvare. Din relația $v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}$ se obține:

$$\dot{r} = \sqrt{v_0^2 - r^2\omega_0^2}.$$

Separînd variabilele, prin integrare rezultă:

$$t = \frac{1}{\omega_0} \arcsin \frac{r\omega_0}{v_0} \quad \text{sau} \quad r = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Dacă $\dot{\theta} = \omega_0$, $\theta = \omega_0 t$, traiectoria va fi:

$$r = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \theta.$$

10.A. PREZENTARE TEORETICĂ

10.A.1. Generalități

Se știe că poziția unui solid rigid poate fi oricând determinată dacă se cunosc, în acel moment, pozițiile a trei puncte ale sale, care nu sînt coliniare, în raport cu un triedru $O'x'y'z'$ presupus fix (fig. 10.A.1). Dacă cele trei puncte notate O , A și B sînt alese astfel încît triunghiul OAB să fie isoscel, $OA = OB = 1$ și dreptunghic în O , se poate considera un reper dreptunghic $Oxyz$ solidar legat cu solidul (C) și la fel orientat cu triedrul fix. Poziția triedrului solidar legat de solidul (C) poate fi determinată în orice moment cu ajutorul vectorului de poziție $\bar{r}_0 = \overrightarrow{O'O}$ și al versorilor: $\bar{i} = \overrightarrow{OA}$, $\bar{j} = \overrightarrow{OB}$ și $\bar{k} = \overrightarrow{OC}$, ultimul rezultînd din $\bar{k} = \bar{i} \times \bar{j}$ și din convenția de orientare.

Dacă solidul (C) este fix în raport cu $O'x'y'z'$, atunci \bar{r}_0 , \bar{i} , \bar{j} , și \bar{k} sînt vectori constanți (în direcție, sens și modul) și reciproc.

Dacă solidul (C) este în mișcare în raport cu $O'x'y'z'$, toți vectorii \bar{r}_0 , \bar{i} , \bar{j} și \bar{k} sau unii din ei variază în timp, adică sînt funcții vectoriale de timp.

Poziția unui punct $M(x, y, z)$ solidar cu (C) este determinată în raport cu reperul $Oxyz$, prin:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \quad (10.1)$$

iar în raport cu $O'x'y'z'$, prin:

$$\bar{r}' = x'\bar{i}' + y'\bar{j}' + z'\bar{k}' = \bar{r}_0 + \bar{r} = \bar{r}_0 + x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \quad (10.2)$$

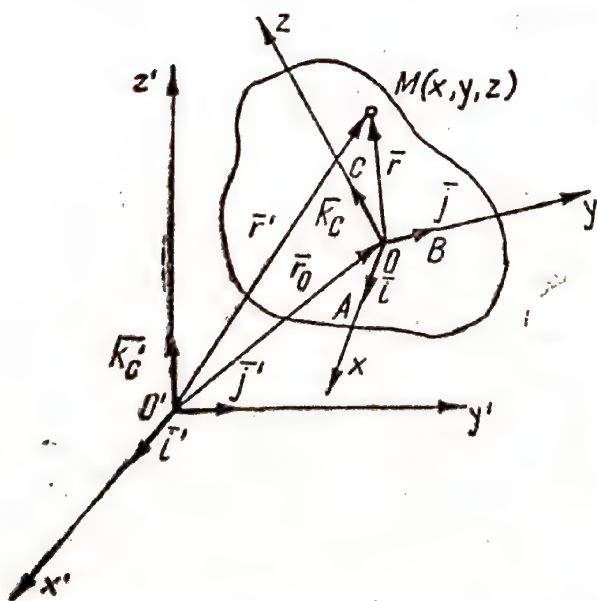


Fig. 10.A.1

unde x' , y' , z' sînt coordonatele punctului M în raport cu $O'x'y'z'$, iar \bar{i}' , \bar{j}' , \bar{k}' sînt versorii invariabili ai axelor fixe.

Dacă punctul $M(x, y, z)$ rămîne fix pe solidul (C), coordonatele lui nu depind de timp, chiar dacă (C) este în mișcare. În acest caz însă: $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = \bar{r}(\bar{t})$, variația lui \bar{r} este numai în direcție, datorită variației în direcție a versorilor \bar{i} , \bar{j} și \bar{k} din cauza mișcării solidului (C).

Dacă M este în mișcare în raport cu (C), coordonatele lui depind de timp. Dacă în același timp și (C) este în mișcare în raport cu $O'x'y'z'$, există o *suprapunere de mișcări*.

Mișcarea lui M în raport cu (C) , adică în raport cu $Oxyz$, se numește *mișcare relativă*, iar în raport cu reperul fix, din O' , mișcarea se numește *absolută*.

În cinematica solidului rigid, M este un punct solidar cu (C) , coordonatele lui (x, y, z) sînt parametri depinzînd de poziția punctului, dar independenți de timp.

Pentru a cunoaște mișcarea solidului (C) în raport cu $O'x'y'z'$ este suficient să se cunoască mișcarea *triedrului mobil* $Oxyz$ și pozițiile oricărui punct M al solidului prin coordonatele sale.

Distribuția de viteze. Vitezele diferitelor puncte ale solidului (C) , în raport cu $O'x'y'z'$, se exprimă prin ecuația :

$$\vec{v} = \vec{r}' = \dot{\vec{r}}_0 + x\dot{\vec{i}} + y\dot{\vec{j}} + z\dot{\vec{k}} = \vec{v}_0 + x\dot{\vec{i}} + y\dot{\vec{j}} + z\dot{\vec{k}}, \quad (10.3)$$

unde \vec{v}_0 este viteza punctului O (nu se va citi v zero). (V indice O .)

Distribuția de accelerații. Accelerațiile punctelor solidului (C) , în raport cu $O'x'y'z'$, se exprimă prin ecuația :

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_0 + x\ddot{\vec{i}} + y\ddot{\vec{j}} + z\ddot{\vec{k}} = \vec{a}_0 + x\ddot{\vec{i}} + y\ddot{\vec{j}} + z\ddot{\vec{k}}, \quad (10.4)$$

unde \vec{a}_0 este accelerația punctului O (se va citi a , indice o).

Observație importantă.

Cunoașterea funcțiilor :

$$\vec{r}_0(t), \quad \dot{\vec{i}}(t), \quad \dot{\vec{j}}(t), \quad \vec{k}(t)$$

rezolvă complet problema cinematicii solidului rigid, deoarece prin $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(t)$ se cunoaște traiectoria punctului O , prin $\vec{v}_0 = \dot{\vec{r}}_0(t)$, viteza lui și prin $\vec{a}_0 = \dot{\vec{v}}_0(t) = \ddot{\vec{r}}_0(t)$, accelerația lui. În ceea ce privește funcțiile vectoriale $\dot{\vec{i}}(t)$, $\dot{\vec{j}}(t)$, $\vec{k}(t)$, care trebuie să fie de asemenea funcții continue de două ori derivabile, ele caracterizează, în general, tipul de mișcare al solidului rigid.

10.A.2. Mișcarea de translație

Definiție. Un solid rigid are o deplasare de *translație* dacă un segment de dreaptă, unind două *puncte arbitrare*, solidare cu solidul, rămîne în decursul deplasării paralel cu el însuși.

Observație.

Definiția mișcării de translație diferă de aceea a deplasării de translație, doar prin introducerea timpului, adică segmentul de dreaptă OM , (fig. 10.A.2), unind două puncte arbitrare O și M , rămîne invariabil în timp cu aceeași mărime, direcție și sens, ceea ce se poate exprima și vectorial :

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{c},$$

adică \vec{r} , \vec{i} , \vec{j} și \vec{k} sînt și ei independenți de timp.

Traectoriile punctelor solidului sînt date de ecuația :

$$\vec{r}' = \vec{r}_0 + \vec{r} = \vec{r}_0(t) + \vec{c},$$

adică toate punctele solidului rigid descriu, într-o mișcare de translație, traiectorii egale și paralele cu traiectoria lui O . Astfel dacă $\vec{r}_0(t)$ este o funcție liniară de t , O descrie o linie dreaptă, la fel orice punct M descrie o linie dreaptă paralelă, mișcarea se numește de *translație rectilinie*.

În alte condiții se poate ca mișcarea să fie de *translație circulară* sau de *translație curbilinie*.

Distribuția de viteze este dată de ecuația :

$$\dot{\vec{r}}' = \vec{v} = \dot{\vec{r}}_0(t) + \vec{c} = \vec{v}_0 \quad \text{sau} \quad \vec{v} = \vec{v}_0(t)^1,$$

adică toate punctele solidului rigid au, în același moment t , aceeași viteză cu viteza punctului O .

Distribuția de accelerații este dată în ecuația :

$$\vec{a} = \vec{a}_0(t),$$

adică toate punctele solidului rigid au în același moment t aceeași accelerație cu accelerația punctului O .

Reciproc, dacă în orice moment, punctele solidului rigid au aceeași viteză cu viteza $\vec{v}_0(t)$ a punctului O , mișcarea solidului este de translație.

10.A.3. Mișcarea de rotație

Definiție. Un solid rigid este în rotație dacă în cursul mișcării cel puțin două puncte ale sale, sau solidare cu el, rămân fixe. Dreapta determinată de aceste puncte fixe se numește *axa de rotație*.

Proprietăți. Punctele solidului rigid descriu cercuri având planele perpendiculare pe axă, cu centrele pe axă, iar razele R egale cu distanțele punctelor până la axă (fig. 10.A.3).

Toate punctele solidului rigid descriu cercurile respective cu aceeași viteză unghiulară, în același moment t .

Proiecțiile vitezelor a două puncte solidare între ele pe dreapta care le unește sînt egale. *Această proprietate este adevărată oricare ar fi mișcarea segmentului de dreaptă, de lungime invariabilă, care unește cele două puncte.*

Reprezentare vectorială. Mișcarea de rotație poate fi caracterizată cu ajutorul unui vector alunecător $(\vec{\omega}, \Delta)^2$, unde Δ , suportul, reprezintă axa de rotație, sensul vectorului arată sensul rotației (regula observatorului), $\omega(t)$ reprezintă legea mișcării de rotație (fig. 10.A.4).

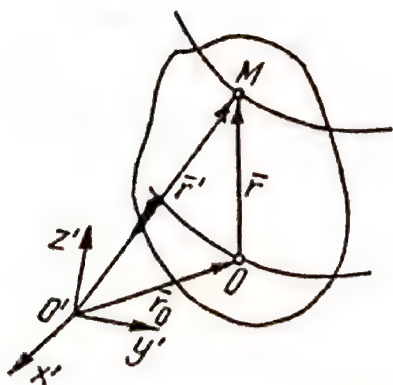


Fig. 10.A.2

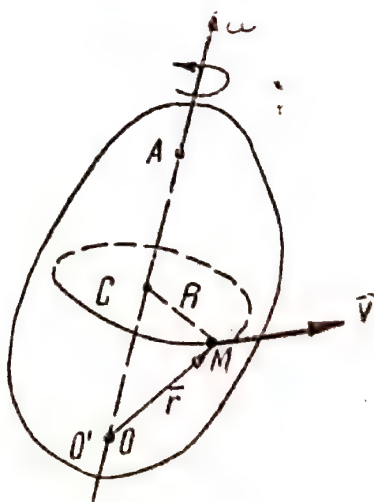


Fig. 10.A.3

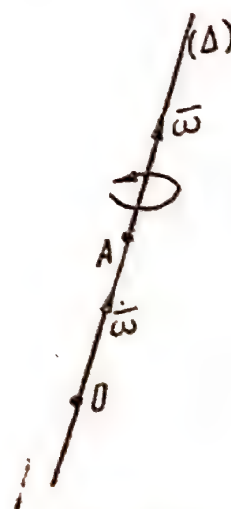


Fig. 10.A.4

¹ \vec{v}_0 este un vector polar legat de punctul O .

² Spre deosebire de \vec{v}_0 , $\vec{\omega}$ este un vector axial.

Dacă ω nu depinde de timp, mișcarea este o *rotație uniformă*. În cazul că ω este funcție de timp, mișcarea are și o accelerație unghiulară care poate fi caracterizată și ea printr-un vector $\dot{\omega}(t)$ *coliniar* cu ω pe (Δ) . Dacă $\dot{\omega}$ are același sens cu ω , mișcarea de rotație este accelerată și invers, mișcarea este *decelerată* dacă $\dot{\omega}$ și ω au sensuri opuse.

Dacă $\dot{\omega}$ este independent de timp, accelerația sau decelerația fiind constante, mișcarea este *uniform accelerată (decelerată)*.

Distribuția de viteze este dată de relația :

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}, \quad (10.5)$$

unde \bar{r} este vectorul de poziție în raport cu reperul cu originea în punctul fix O (fig. 10.A.3.).

Distribuția de accelerații, dedusă din (10.5), prin derivare este dată de :

$$\bar{a} = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v} \quad (10.6)$$

sau

$$\bar{a} = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}). \quad (10.7)$$

Expresii analitice. Se recomandă să se aplice indicațiile date la Cap. II, adică traducerea relațiilor vectoriale în expresii analitice, și anume : se vor folosi sistemele de referință cele mai simple cerute de problemă și nu cele mai generale cu puțință care apoi să fie particularizate, după caz.

Aici, la mișcarea de rotație în jurul axei fixe (Δ) , aceasta va fi aleasă ca axă fixă comună $Oz' \equiv Oz$, cu $\bar{k}' = \bar{k}$, axele $O'x'$ și $O'y'$ fixe, iar Ox și Oy mobile, în același plan cu $O'x'y'$ (fig. 10.A.5). Punctul M are coordonatele x', y', z' , respectiv x, y, z față de cele două sisteme de referință.

Originile O' și O fiind confundate : $\bar{r}' = \bar{r}$, iar $\bar{r}' = x'\bar{i}' + y'\bar{j}' + z'\bar{k}' = \bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, $\bar{\omega} = \omega\bar{k}' = \omega\bar{k}$.

Înlocuind în (10.5), se găsesc rezultatele căutate :

$$\bar{v} = \omega\bar{k}' \times (x'\bar{i}' + y'\bar{j}' + z'\bar{k}') = \omega x'\bar{j}' - \omega y'\bar{i}' \text{ sau } v_{x'} = -\omega y',$$

$$v_{y'} = \omega x'; \quad v_{z'} = 0; \quad \bar{v} = \omega\bar{k} \times (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = \omega x\bar{j} - \omega y\bar{i} \text{ sau}$$

$$v_x = -\omega y;$$

$$v_y = \omega x;$$

$$v_z = 0,$$

adică scalarii proiecțiilor vitezelor pe axele fixe $O'x'y'z'$ și pe cele mobile $Oxyz$.

La fel se procedează și pentru proiecțiile accelerației. Rezultatele sînt :

$$a_{x'} = -\dot{\omega} y' - \omega^2 x';$$

$$a_{y'} = \dot{\omega} x' - \omega^2 y';$$

$$a_z = -\dot{\omega} y - \omega^2 x;$$

$$a_y = \dot{\omega} x - \omega^2 y,$$

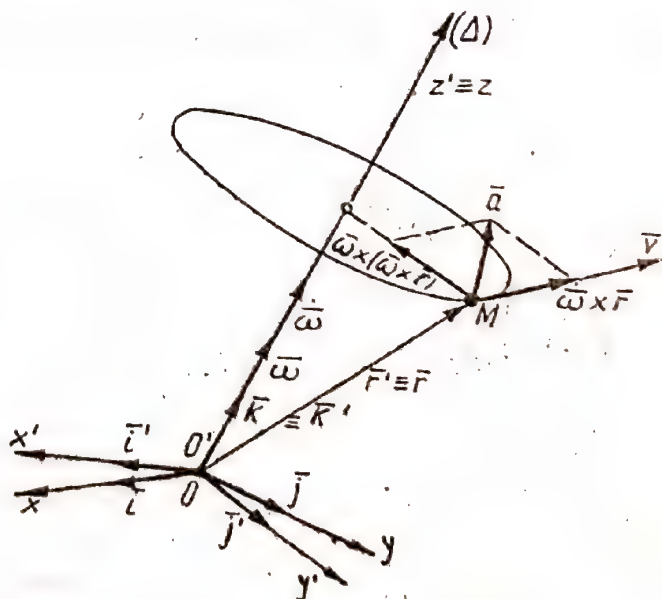


Fig. 10.A.5

de unde :

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(x'^2 + y'^2)(\dot{\omega}^2 + \omega^4)} = R \sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4} = \\ = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(x^2 + y^2)(\dot{\omega}^2 + \omega^4)},$$

R fiind raza cercului descris de punctul M .

10.A.4. Mișcarea solidului cu un punct fix

Mișcarea solidului rigid cu un punct fix O (fig. 10.A.6) este o mișcare complexă.

Pare că se aseamănă cu mișcarea *simplă* de rotație, dar această asemănare este numai *formală*.

Mișcarea solidului cu un punct fix O este caracterizată prin vectorii $\vec{v}_0 = 0$, $\vec{a}_0 = 0$ și vectorul $\vec{\omega}(t)$ avînd suportul care trece neconținut prin punctul fix O , dar are variabile nu numai modulul ci și *direcția*. Din această cauză $\vec{\omega}$ este un vector al cărui suport trece mereu prin O , dar *nu mai coincide* cu suportul lui $\vec{\omega}$.

În aceste condiții mișcarea *nu poate* fi o mișcare de rotație, deoarece axa $(\vec{\omega}, \Delta)$ nu este fixă, ci variază de la un moment la altul.

De asemenea, nu poate fi denumită *nici mișcare instantanee de rotație*, deoarece suportul vectorului $\dot{\vec{\omega}}$ nu este coliniar cu $(\vec{\omega}, \Delta)$.

Este adevărat că distribuția *instantanee* de viteze corespunde unei mișcări de rotație în jurul axei instantanee $(\vec{\omega}, \Delta)$; adică :

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (10.8)$$

unde \vec{r} este vectorul de poziție al unui punct oarecare M al solidului rigid.

În momentul corespunzător t , toate punctele axei instantanee de rotație au vitezele nule, iar lucrurile se petrec, *însă numai din punctul de vedere al distribuției de viteze, ca și cum solidul s-ar roti, în acel moment, în jurul axei (Δ)* .

În realitate această rotație este formală, deoarece punctele axei (Δ) , deși au vitezele nule, nu au în afară de punctul fix O și accelerațiile nule.

Distribuția de accelerații se deduce din (10.8) prin derivare în raport cu timpul :

$$\vec{a} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (10.9)$$

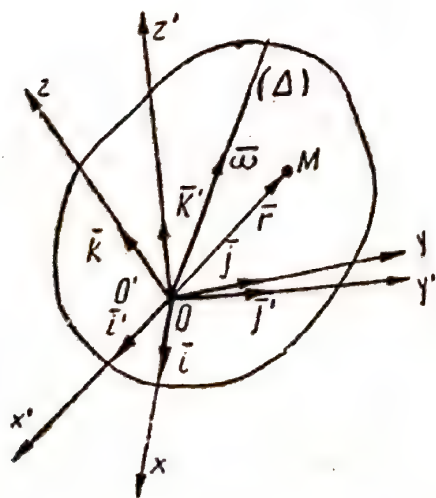


Fig. 10.A.6

Deși ca formă, ecuația (10.9) este la fel cu ecuația distribuției de accelerații ca în mișcarea de rotație, *în fond*, deoarece nu există alt punct al solidului, decât punctul fix O , care să aibă accelerația nulă, adică nu există o axă a accelerațiilor nule, înseamnă că *distribuția instantanee a accelerațiilor în cazul solidului cu un punct fix nu se poate reduce la aceea a unei mișcări de rotație*.

Axoida fixă, axoida mobilă. Mulțimea continuă de axe instantanee formează în raport cu triedrul fix $O'x'y'z'$, o suprafață conică, numită *axoida fixă*.

Axa instantanee nu este fixă nici în raport cu triedrul mobil $Oxyz$ și generează în raport cu acest triedru o altă suprafață conică, numită axoïda mobilă.

Se demonstrează că, în tot timpul mișcării solidului cu un punct fix, axoïda mobilă este tangentă, după o generatoare comună, la axoïda fixă, se rostogolește fără să alunece peste axoïda fixă, iar generatoarea comună este chiar axa instantanee din acel moment. (Conurile și mișcarea Poinșot).

Formulele lui Poisson se determină ușor calculându-se vitezele vîrfurilor versorilor $\overline{OA} = \vec{i}$, $\overline{OB} = \vec{j}$, și $\overline{OC} = \vec{k}$, oîdată direct prin derivare în raport cu timpul și a doua oară folosind ecuația generală (10.5) de distribuție a vitezelor în mișcarea solidului cu un punct fix, adică :

$$\dot{\vec{i}} = \overline{\omega} \times \vec{i}; \quad \dot{\vec{j}} = \overline{\omega} \times \vec{j}; \quad \dot{\vec{k}} = \overline{\omega} \times \vec{k}. \quad (10.10)$$

10.A.5. Mișcarea oarecare (cea mai generală) a solidului rigid

Distribuția de viteze se obține folosind formulele lui Poisson în ecuația (10.3), adică :

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \overline{\omega} \times \vec{r}. \quad (10.11)$$

În mișcarea cea mai generală a solidului rigid, distribuția instantanee de viteze se obține prin suprapunerea a două distribuții : una corespunzătoare unei translații, iar alta, unei rotații în jurul unei axe :

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}''; \quad \vec{v}' = \vec{v}_0; \quad \vec{v}'' = \overline{\omega} \times \vec{r}.$$

Observație.

Se precizează că solidul are o mișcare unică și nu una compusă dintr-o translație și o rotație. Numai din punctul de vedere al distribuției instantanee de viteze lucrurile se petrec ca și cum s-ar suprapune cele două câmpuri de viteze.

Distribuția de accelerații este dată de relația :

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \dot{\overline{\omega}} \times \vec{r} + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \vec{r}). \quad (10.12)$$

Prima componentă $\vec{a}' = \vec{a}_0$ corespunde unei translații, iar cea de-a doua :

$$\vec{a}'' = \dot{\overline{\omega}} \times \vec{r} + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \vec{r})$$

mișcării solidului cu un punct fix, la care distribuția instantanee de accelerații nu corespunde unei rotații.

Discuția asupra tipurilor de mișcări se poate face cu ajutorul vectorilor caracteristici $\overline{\omega}(t)$ și $\vec{v}_0(t)$ în funcție de particularitățile lor :

$\overline{\omega} = 0$, $\vec{v}_0 = 0$, cazul banal al repausului în raport cu triedrul fix $O'x'y'z'$;

$\overline{\omega} = 0$, $\vec{v}_0(t) \neq 0$, mișcare de translație ;

$\overline{\omega}(t) \neq 0$, $\vec{v}_0 = 0$, dacă suportul vectorului $\overline{\omega}$, care trece neconținut prin punctul fix O , are direcția invariabilă, mișcarea este o rotație ;

$\overline{\omega}(t) \neq 0$, $\vec{v}_0 = 0$ suportul lui $\overline{\omega}$ variabil, mișcarea solidului cu un punct fix O ;

$\overline{\omega}(t) \neq 0$, $\vec{v}_0(t) \neq 0$, dacă suportul $\overline{\omega}$ este o dreaptă fixă trecînd prin O' , iar \vec{v}_0 este pe același suport (Δ) , mișcarea se numește elicoïdală, (Δ) fiind axa acestei mișcări (fig. 10.A.7) ;

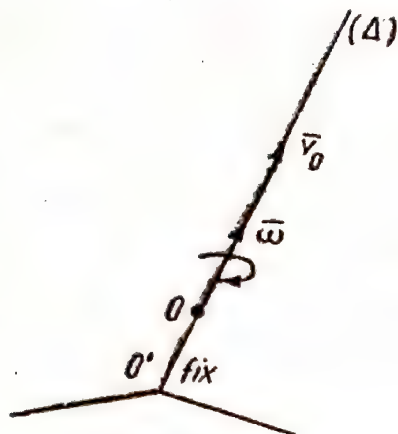


Fig. 10.A.7

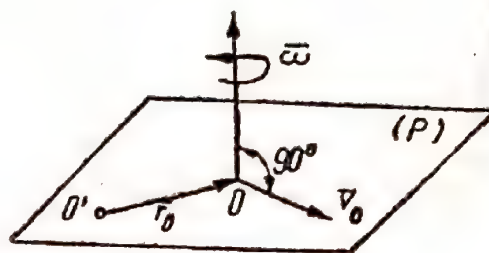


Fig. 10.A.8

$\bar{\omega}(t) \neq 0$, $\bar{v}_0(t) \neq 0$, suportul lui $\bar{\omega}$ are o *direcție invariabilă*, iar \bar{v}_0 , neconținut perpendicular pe $\bar{\omega}$, este situat într-un plan fix. Mișcarea se numește *plan-paralelă* (fig. 10.A.8).

$\bar{\omega}(t) \neq 0$, $\bar{v}_0(t) \neq 0$, fără condiții pentru direcțiile acestor vectori prezintă *mișcarea cea mai generală* a solidului rigid.

În mișcarea cea mai generală a solidului rigid, se demonstrează următoarele proprietăți:

Proiecția vitezei oricărui punct M al solidului pe direcția lui $\bar{\omega}$ este un invariant, independent de poziția punctului.

Mișcarea cea mai generală a solidului rigid poate fi asimilată, însă numai din punctul de vedere al distribuției instantanee de viteze, cu o *mișcare elicoidală*.

Axa instantanee a mișcării elicoidale generează, în raport cu triedrul fix, o suprafață riglată, numită *axoïda fixă*, iar în raport cu triedrul mobil, o suprafață de asemenea riglată, numită *axoïda mobilă*.

Se demonstrează că în tot timpul mișcării solidului axoïda mobilă se rostogolește peste axoïda fixă și alunecă în același timp, în lungul generatoarei de contact care, în momentul considerat, este axa instantanee a mișcării elicoidale.

10.A.6 Mișcarea elicoidală

Această mișcare a solidului rigid poate fi caracterizată *geometric* prin aceea că un segment de dreaptă, solidar cu solidul în rotație în jurul lui, alunecă în lungul unei drepte fixe, *axa mișcării elicoidale*.

Punctele solidului descriu elici cilindrice, în general cu pas variabil.

Vectorii caracteristici ai mișcării elicoidale cu pas variabil, $\bar{\omega}(t)$ și $\bar{v}_0(t)$, fiind funcții continue, și derivabile, nu sînt legați decît de condiția de a avea același suport fix, axa mișcării. Derivatele lor: $\dot{\bar{\omega}}(t)$ și $\dot{\bar{v}}_0(t) = \bar{a}_0(t)$ reprezintă de asemenea vectori pe același suport, fără vreo altă legătură între ei.

Mișcarea de șurub este un caz particular al mișcării elicoidale: punctele solidului descriu elici circulare cu același pas p , există o relație liniară între valorile $\bar{\omega}$ și \bar{v}_0 , respectiv între $\bar{\omega}$ și \bar{a}_0 , adică:

$$v_0 = k \frac{p}{2\pi} \omega \quad \text{și} \quad a_0 = k \frac{p}{2\pi} \dot{\omega}.$$

unde k poate fi ± 1 după cum șurubul are filetul *drept* sau *stîng*.

10.A.7. Mișcarea plan-paralelă

Această mișcare se caracterizează *geometric* prin aceea că există un plan (P), solidar cu solidul rigid (C), care se mișcă într-un plan fix (P') (fig. 10.A.9).

Observații

Orice punct al solidului rigid în mișcare plan-paralelă rămâne la distanță invariabilă față de planul fix al mișcării.

Toate punctele solidului rigid, situate pe o dreaptă perpendiculară pe planul fix, au în același moment aceeași viteză și aceeași accelerație și descriu traiectorii egale și paralele cu planul fix.

În consecință, mișcările punctelor situate în orice plan paralel cu planul fix (P') sînt identice cu mișcările punctelor corespunzătoare situate în planul (P).

Pentru cunoașterea mișcării plan-paralele a solidului rigid (C), este suficient să se studieze mișcarea secțiunii sale plane (P) cu planul fix (P').

Mișcarea planului (P) în planul (P') se numește *mișcare plană*, iar pe baza observațiilor se poate face ușor corespondența dintre mișcarea plană a secțiunii (P) cu mișcarea plan-paralelă a solidului rigid (C).

10.A.8. Mișcarea plană

Determinare. Mișcarea plană, mișcarea unei plăci rigide plane (P) în propriul ei plan fix (P'), este determinată (fig. 10.A.10) în raport cu un reper fix $O'x'y'$ din planul (P') prin:

$$\vec{r}_0(t) = x_0(t)\vec{i}' + y_0(t)\vec{j}' \text{ și } \theta(t),$$

adică prin poziția originii O a reperului mobil Oxy și prin $\angle \theta$ dintre Ox și $O'x'$.

Vectorii caracteristici ai mișcării plane sînt: $\vec{\omega}(t) = \dot{\theta}\vec{k}'$ perpendicular pe planul (P) și $\vec{v}_0(t) = \dot{\vec{r}}_0 = \dot{x}_0\vec{i}' + \dot{y}_0\vec{j}'$, situat în planul (P). Pentru completarea expresiilor analitice, se va ține seamă și de relațiile evidente dintre versorii axelor mobile Oxy și ai celor fixe $O'x'y'$:

$$\vec{k} = \vec{k}'; \quad \vec{i}\vec{i}' = \cos \theta; \quad \vec{j}\vec{i}' = -\sin \theta; \quad \vec{i}\vec{j}' = \sin \theta; \quad \vec{j}\vec{j}' = \cos \theta.$$

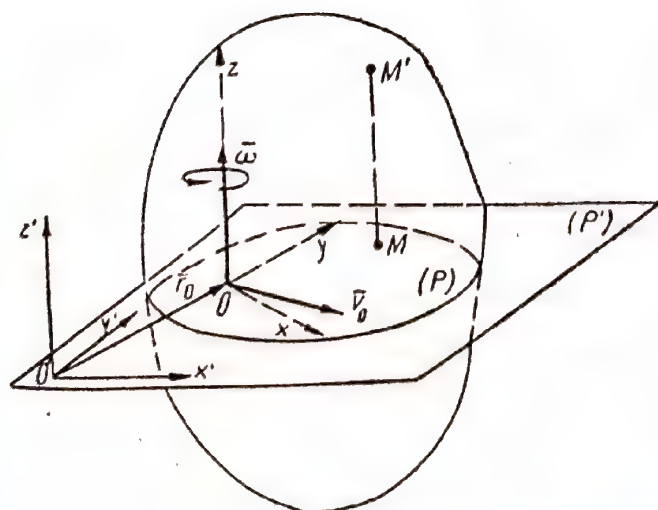


Fig. 10.A.9

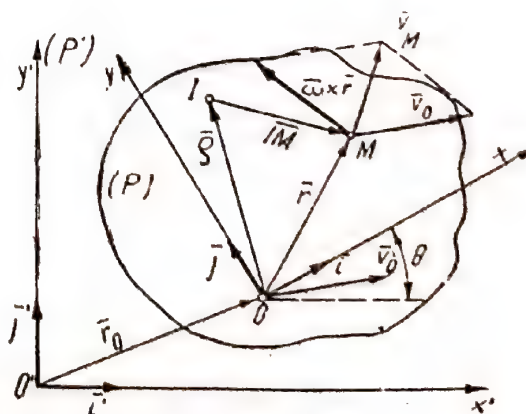


Fig. 10.A.10

Distribuția de viteze este, ca formă, aceeași ca în mișcarea generală: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$ cu particularitățile caracteristice ale vectorilor $\vec{\omega}$, \vec{v}_0 și \vec{r} . În orice moment t al mișcării se poate găsi în planul (P) un punct I a cărui viteză trece prin valoarea zero. Acest punct nu este fix deoarece el are accelerație. Vectorul de poziție al punctului I este:

$$\vec{\rho}(t) = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_0}{\omega^2} \quad \text{iar} \quad |\vec{\rho}| = \frac{|\vec{v}_0|}{|\vec{\omega}|},$$

adică: I se află în orice moment t pe perpendiculara din planul (P) dusă pe \vec{v}_0 , în sensul în care triedrul $O\vec{\omega}\vec{v}_0\vec{\rho}$ este drept, la distanța $\frac{|\vec{v}_0|}{|\vec{\omega}|}$.

Cu ajutorul punctului I , distribuția de viteze la momentul t (instantanee) are o formă simplă: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{IM}$ ca și la mișcarea de rotație, ca și cum punctul I ar fi fix, iar placa (P) s-ar roti în jurul lui cu viteza unghiulară din acel moment.

În realitate lucrurile nu se petrec așa, ci numai din punctul de vedere al distribuției momentane sau instantanee și numai pentru viteze, mișcarea se poate asemui, formal, cu o rotație în jurul lui I care se numește centru instantaneu de rotație.

Se precizează din nou că nu este vorba de o rotație propriu-zisă, deoarece în momentul următor t , un alt punct I al planului (P) are — în acel moment — viteza nulă și rolul de centru instantaneu de rotație, astfel că:

mișcarea cea mai generală a unei plăci rigide plane în propriul ei plan fix poate fi privită, din punctul de vedere al distribuției instantanee de viteze, ca o mulțime continuă de rotații în jurul unor centre instantanee de rotație care se succed de asemenea în mod continuu.

Centroida fixă și centroida mobilă. Mulțimea continuă a centrelor instantanee de rotație formează în planul fix (P') o curbă (C') numită centroida fixă, iar în planul mobil (P) o altă curbă (C) , solidară cu acest plan, numită centroida mobilă (fig. 10.A.11). Se demonstrează că în tot timpul mișcării planului (P) în raport cu planul (P') centroida mobilă se rostogolește¹ fără să alunece pe centroida fixă. Punctul de tangență din fiecare moment este centrul instantaneu de rotație, din acel moment.

Distribuția de accelerații este dată de ecuația generală:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}), \quad (10.13)$$

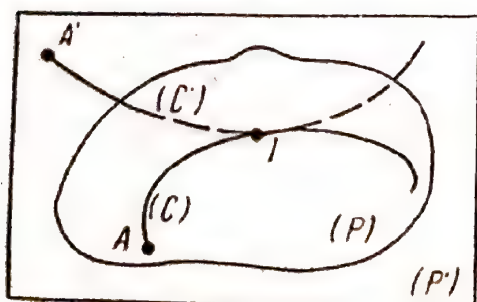


Fig. 10.A.11

unde $\vec{a}_0(t) = \dot{\vec{v}}_0(t)$ este un vector legat de O și situat în planul (P) ca și \vec{v}_0 , iar $\vec{\omega}$ este coliniar cu $\vec{\omega}$. În aceste condiții, ecuația (10.13) are o formă mai simplă:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r}. \quad (10.14)$$

În orice moment t al mișcării se poate găsi în planul (P) un punct J a cărui accelerație trece prin valoarea zero. Evi-

¹ De aceea centroida mobilă se mai numește și rostogolitoarea, iar centroida fixă, baza mișcării plane.

dent acest punct nu este fix, el avînd viteza diferită de zero. Vectroul de poziție al punctului J este:

$$\vec{\eta} = \frac{\dot{\vec{\omega}} \times \vec{a}_0 + \omega^2 \vec{a}_0}{\dot{\omega}^2 + \omega^4}; \quad |\vec{\eta}| = \frac{|\vec{a}_0|}{\sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4}}; \quad (10.15)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|\dot{\vec{\omega}}|}{\omega^2}.$$

adică J se află în orice moment pe semidreapta din O care formează cu \vec{a}_0 , în sensul dat de $\dot{\vec{\omega}}$, unghiul φ , cuprins între 0 și $\frac{\pi}{2}$, la distanța $|\vec{\eta}|$, ambele valori fiind date de (10.15).

Observație.

Pentru figura 10.A.12, $\vec{\omega}$ trebuie să fie orientat înspre observator, deoarece φ este orientat de la \vec{a}_0 în sens trigonometric.

Cu ajutorul punctului J , distribuția instantanee de accelerații (la momentul t) are forma mai simplă:

$$\vec{a} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{JM} - \omega^2 \vec{JM}, \quad (10.16)$$

ca și la mișcarea de rotație, ca și cum punctul ar fi fix iar placa (P) s-ar roti în jurul lui cu viteza unghiulară $\vec{\omega}$ și accelerația unghiulară $\dot{\vec{\omega}}$, din acel moment.

Acest punct joacă în mișcarea plană un rol asemănător cu centrul instantaneu, pentru distribuția vitezelor. El poate fi numit centrul instantaneu pentru distribuția accelerațiilor, dar pentru evitarea confuziilor poartă denumirea de *polul accelerațiilor*. Adică, din punctul de vedere al distribuției instantanee de accelerații, lucrurile se petrec ca și cum în momentul t , *polul accelerațiilor* (J) ar fi fix, iar placa (P) s-ar roti în jurul lui (fig. 10.A.13).

Observații

Centrul instantaneu de rotație și polul accelerațiilor nu coincid în mișcarea plană, deoarece un punct care are, în același moment, atât viteza cît și accelerația nule este un punct fix, iar mișcarea plăcii ar fi o rotație propriu-zisă în jurul acestui punct.

Perpendiculara dusă din J pe OJ întâlnește pe \vec{a}_0 în A (fig. 10.A.12). Cum $|\vec{OA}| = \frac{|\vec{a}_0|}{\omega^2}$, rezultă că polul accelerațiilor se găsește în orice moment pe cercul construit pe OA ca diametru la intersecția cu semidreapta OJ construită cu ajutorul unghiului

$$\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{|\dot{\vec{\omega}}|}{\omega^2}.$$

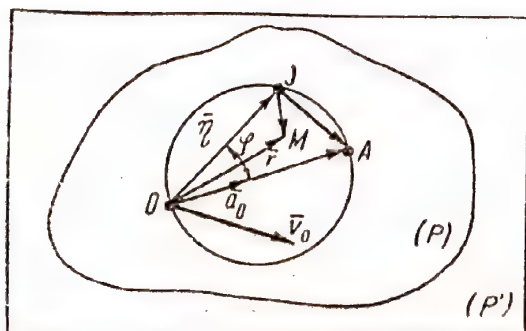


Fig. 10.A.12

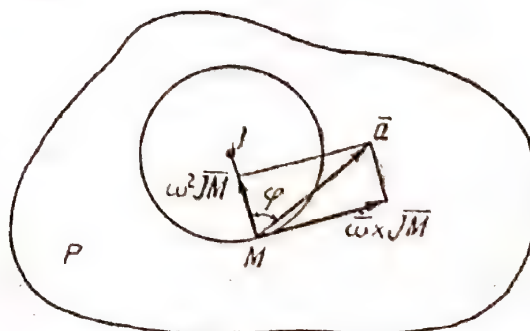


Fig. 10.A.13

10.B. APLICAȚII LA CINEMATICA SOLIDULUI RIGID

10.B.1. Se consideră două prisme ABC și $DEFG$ în mișcare de translație la care se cunosc α . $CB = 2FG = 2l$. Prisma $DEFG$ coboară pe verticală după legea $s = a_0 t^2$, unde $a_0 = \text{constant}$. La $t = 0$ punctele A și D ale celor două prisme coincid (fig. 10.B.1). Să se calculeze legea de mișcare a prisme ABC , valoarea vitezei sale în momentul când cealaltă prismă atinge planul orizontal.

Rezolvare. Între deplasările corespunzătoare ale celor două prisme se poate scrie relația :

$$s_1 = s \operatorname{ctg} \alpha = a_0 t^2 \operatorname{ctg} \alpha.$$

Prin derivări succesive, se poate scrie :

$$v_1 = v \operatorname{ctg} \alpha = 2a_0 t \operatorname{ctg} \alpha ;$$

$$a_1 = a \operatorname{ctg} \alpha = 2a_0 \operatorname{ctg} \alpha.$$

Drumul parcurs pe verticală de prisma $DEFG$ pînă la planul orizontal este :

$$s = l \operatorname{tg} \alpha,$$

în timpul

$$t_1 = \sqrt{\frac{l \operatorname{tg} \alpha}{a_0}}.$$

În momentul atingerii planului, viteza prisme ABC este

$$v_1 = 2\sqrt{la_0 \operatorname{ctg} \alpha}.$$

10.B.2. Se consideră mecanismul format din cinci bare articulate din figura 10.B.2, cu dimensiunile $O_1A = O_2B = r$, $O_2C = O_3D = R$, $O_1O_2 = AB = O_2O_3 = CD = l$, unde $l > R$.

Cunoscîndu-se viteza unghiulară $\omega = \text{constant}$, a manivelei O_1A , să se calculeze și să se reprezinte grafic vitezele și accelerațiile punctelor A , B , C , D , M și N .

Rezolvare. Deoarece patrulateralele O_1ABO_2 și O_2CDO_3 rămîn tot timpul mișcării paralelograme cu laturile O_1O_2 și O_2O_3 fixe, rezultă că barele AB și CD au mișcări de translație.

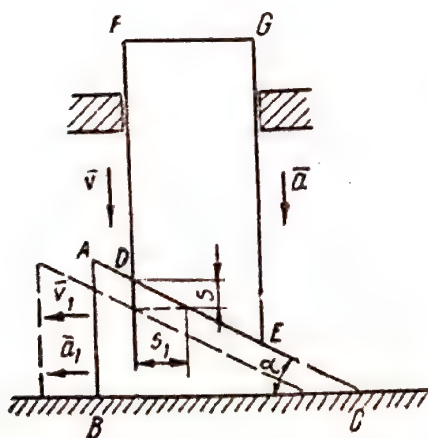


Fig. 10.B.1

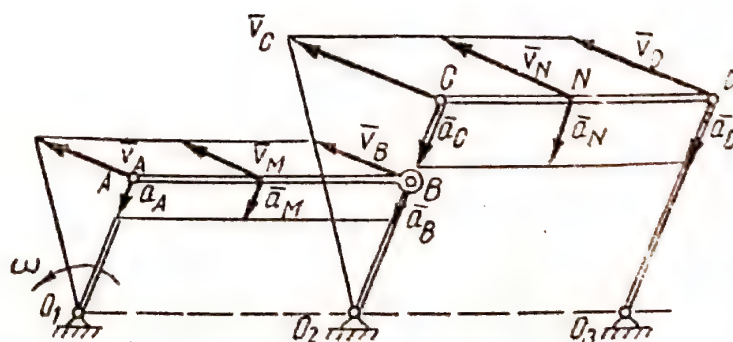


Fig. 10.B.2

La bara O_1A se poate calcula

$$v_A = \omega r; \quad a_A = \omega^2 r.$$

Datorită caracterului mișcării, rezultă:

$$\bar{v}_A = \bar{v}_B = \bar{v}_M; \quad \bar{a}_A = \bar{a}_B = \bar{a}_M.$$

Bara O_2C are aceeași viteză unghiulară cu O_1A , deci:

$$v_C = \omega R; \quad a_C = \omega^2 R.$$

Ca și la bara AB , se poate scrie și la bara CD :

$$\bar{v}_C = \bar{v}_D = \bar{v}_N; \quad \bar{a}_C = \bar{a}_D = \bar{a}_N.$$

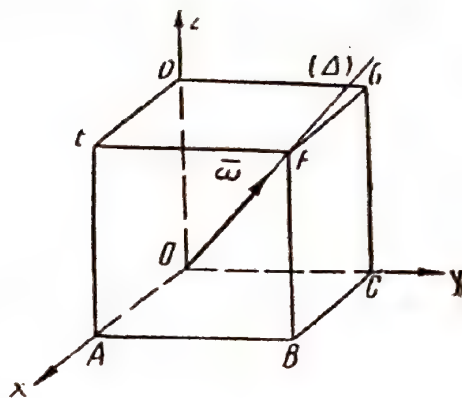


Fig. 10.B.3

10.B.3. Un cub rigid cu muchia l se rotește în jurul diagonalei OF (fig. 10.B.3) cu viteza unghiulară $\omega = \varepsilon_0 t$, unde $\varepsilon_0 = \text{const.}$ Să se calculeze viteza și accelerația la un moment dat a vîrfurilor B și D ale cubului.

R e z o l v a r e. Expresia vitezei și accelerației unui punct al corpului este:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}; \quad \bar{a} = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}).$$

Se vor exprima vectorii din expresiile lui \bar{v} și \bar{a} în raport cu sistemul de axe mobil $Oxyz$.

$$\bar{\omega} = \omega \frac{\sqrt{3}}{3} (\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}); \quad \dot{\bar{\omega}} = \dot{\omega} \frac{\sqrt{3}}{3} (\bar{i} + \bar{j} + \bar{k});$$

$$\bar{r}_B = l(\bar{i} + \bar{j}); \quad \bar{r}_D = l\bar{k}.$$

Efectuînd calculele, rezultă:

$$\bar{v}_B = l\varepsilon_0 t \frac{\sqrt{3}}{3} (-\bar{i} + \bar{j});$$

$$\bar{v}_D = l\varepsilon_0 t \frac{\sqrt{3}}{3} (\bar{i} - \bar{j});$$

$$\bar{a}_B = -\frac{l\varepsilon_0}{3} (\sqrt{3} + \varepsilon_0 t^2) \bar{i} + \frac{l\varepsilon_0}{3} (\sqrt{3} - \varepsilon_0 t^2) \bar{j} + \frac{2l\varepsilon_0^2 t^2}{3} \bar{k};$$

$$\bar{a}_D = \frac{l\varepsilon_0}{3} (\sqrt{3} + \varepsilon_0 t^2) \bar{i} - \frac{l\varepsilon_0}{3} (\sqrt{3} - \varepsilon_0 t^2) \bar{j} - \frac{2l\varepsilon_0^2 t^2}{3} \bar{k}.$$

O b s e r v a Ț i e.

Mărimile vitezelor și accelerațiilor celor două puncte sînt egale deoarece ele se află la egală distanță față de axa Δ .

10.B.4 În mișcarea de rotație a discului unu polizor se știe că valoarea la un moment dat a unghiului la centru descris de la începutul mișcării este proporțională cu puterea a doua a timpului. Să se calculeze viteza și accelerația unui punct oarecare de pe periferia discului de rază R la momentul t_1 , dacă după t_2 secunde de la începutul mișcării, discul are turația n_2 rot/min.

Aplicație numerică: $R = 7$ cm, $t_1 = 2$ s, $t_2 = 3$ s, $n_2 = 540$ rot/min.

Rezolvare. Punind $\theta = kt^2$, se obține $\omega = 2kt$.
La momentul t_2 turația fiind n_2 , rezultă :

$$\frac{\pi n_2}{30} = 2kt_2.$$

De aici,

$$k = \frac{\pi n_2}{60t_2}.$$

Legea mișcării discului este deci :

$$\theta = \frac{\pi n_2}{60t_2} t^2.$$

La momentul t_1 viteza punctului de la raza R este :

$$v_1 = \frac{\pi R n_2 t_1}{30t_2} = 2,64 \text{ m/s.}$$

Accelerația punctului este :

$$a_1 = \sqrt{a_{1t}^2 + a_{1n}^2} = \frac{\pi R n_2}{900t_2^2} \sqrt{900t_2^2 + \pi^2 n_2^2 t_1^4} \cong 99,5 \text{ m/s}^2.$$

10.B.5. Un volant în mișcare de rotație față de o axă fixă are la un moment dat viteza unghiulară ω_0 . După N rotații făcute din acest moment, volantul se oprește din cauza frecărilor din lagăre. Să se determine accelerația unghiulară ε a volantului, presupusă constantă, viteza și accelerația unui punct de pe cercul de rază R la jumătatea intervalului de timp pînă la oprire. Aplicație numerică pentru $R = 20 \text{ cm}$, $\omega_0 = 2\pi \text{ s}^{-1}$, $N = 10$ rotații.

Rezolvare. Legea de mișcare este :

$$\theta = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2} \text{ și } \omega = \omega_0 - \varepsilon t.$$

Pentru $t = t_1$ (oprire) $\omega = 0$ și $\theta = 2\pi N$.

Rezolvînd sistemul celor două ecuații, rezultă :

$$\varepsilon = \frac{\omega_0^2}{4\pi N} = \frac{\pi}{10} \text{ s}^{-2}; \quad t_1 = \frac{4\pi N}{\omega_0} = 20 \text{ s.}$$

Mijlocului intervalului îi corespunde timpul

$$t_2 = \frac{t_1}{2} = 10 \text{ s.}$$

În acest moment viteza unghiulară a volantului este

$$\omega_2 = \frac{\omega_0}{2} = \pi \text{ s}^{-1}.$$

Viteza punctului respectiv în acest moment este

$$v_2 = \frac{\omega_0}{2} R = 0,628 \text{ m/s.}$$

Accelerația punctului este

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \frac{R}{10} \sqrt{\pi^2 + 100\pi^4} \cong 1,96 \text{ m/s}^2.$$

10.B.6. În mișcarea elicoidală a unui solid rigid, un punct M situat la distanța R față de axa mișcării elicoidale are la un moment dat viteza \vec{v} , înclinată cu unghiul α față de axă — $|\vec{v}|$ și α fiind constante (fig. 10.B.6). Să se găsească vectorii caracteristici \vec{v}_0 , $\vec{\omega}$ și accelerația punctului M .

Rezolvare. Din distribuția de viteze a mișcării elicoidale

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r},$$

rezultă

$$|\vec{v}_0| = v \cos \alpha;$$

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega R = v \sin \alpha.$$

De aici, al doilea vector caracteristic:

$$\omega = \frac{v \sin \alpha}{R}.$$

Expresia accelerației este

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}),$$

unde

$$\vec{a}_0 = \vec{v}_0 = 0; \quad \dot{\vec{\omega}} = 0.$$

Deci,

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}),$$

iar mărimea a :

$$a = \omega^2 R = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{R}.$$

10.B.7. Se dă un șurub cu diametrul exterior d și pasul p care, plecând din repaus, are după t_1 secunde turația n_1 rot/min. Să se găsească expresiile lui \vec{v}_0 , $\vec{\omega}$, viteza și accelerația la momentul t_1 a unui punct de la periferia șurubului, considerând mișcarea uniform accelerată.

Rezolvare. La momentul t_1 viteza unghiulară a șurubului este

$$\omega_1 = \frac{\pi n_1}{30}.$$

Din expresia vitezei unghiulare ca funcție de timp $\omega = \varepsilon t$, înlocuind ω_1 și t_1 , rezultă:

$$\varepsilon = \frac{\pi n_1}{30 t_1}.$$

Deci,

$$\omega = \frac{\pi n_1}{30 t_1} t.$$

Din relația între v_0 și ω la mișcarea de șurub

$$\frac{v_0}{\omega} = \frac{p}{2\pi},$$

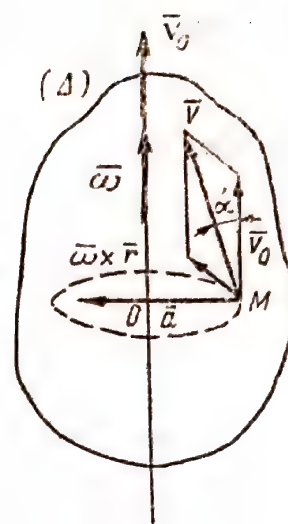


Fig. 10.B.6

se deduce

$$v_0 = \frac{pn_1}{60t_1} t.$$

De asemenea,

$$a_0 = \frac{pn_1}{60t_1}.$$

Viteza unui punct de pe periferia șurubului la momentul t_1 este :

$$v = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{d}{2}\omega\right)^2} = \frac{n_1}{60} \sqrt{p^2 + \pi^2 d^2}.$$

Accelerația are valoarea :

$$a = \sqrt{a_0^2 + \left(\frac{d}{2}\dot{\omega}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\omega^2\right)^2} = \frac{n_1}{900t_1} \sqrt{225(p^2 + \pi^2 d^2) + \frac{\pi^4}{4} d^2 t_1^2 n_1^2}.$$

10.B.8. O glisieră G_1 sub formă de pană cu unghiul planului înclinat α este acționată de o a doua glisieră G_2 pusă în mișcare de un șurub diferențial, avînd porțiunea filetată cu pasul p_1 pe dreapta, iar cea cu pasul p_2 pe stînga (fig. 10.B.8). Se cere viteza de deplasare a glisierii G_1 , dacă manivela de antrenare este rotită cu n ture pe minut.

Rezolvare. Viteza unghiulară a șurubului este :

$$\omega = \frac{\pi n}{30}.$$

Șurubul are o mișcare de înaintare cu viteza :

$$v_1 = \omega \frac{p_1}{2\pi} = \frac{p_1 n}{60}.$$

În raport cu șurubul, glisiera filetată G_2 se deplasează cu viteza :

$$v_2 = \omega \frac{p_2}{2\pi} = \frac{p_2 n}{60}.$$

În raport cu cadrul fix, ea va avea viteza

$$v = v_1 + v_2 = \frac{n(p_1 + p_2)}{60}.$$

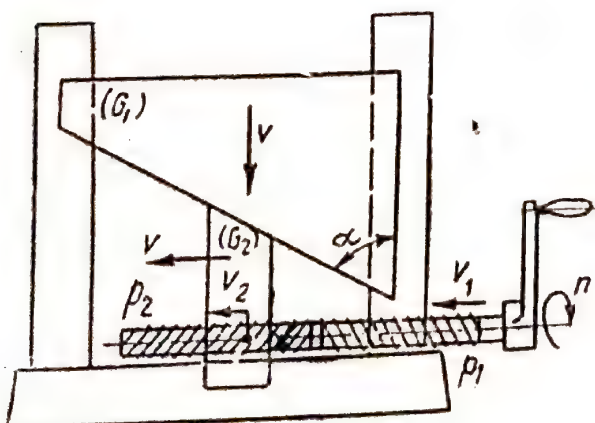


Fig. 10.B.8

Între deplasarea s a glisierii G_2 și deplasarea s' a glisierii G_1 se poate stabili relația (v. problema 10.B.1) :

$$s' = s \operatorname{ctg} \alpha.$$

Se obține viteza v' a glisierii nefiletată G_1 :

$$v' = \frac{n(p_1 + p_2)}{60} \operatorname{ctg} \alpha.$$

10.B.9. În mișcarea unui solid cu un punct fix (fig. 10.B.9), unghiurile lui Euler au următoarele expresii funcție de timp:

$$\varphi = kt; \quad \psi = \frac{\pi}{2} + Ckt; \quad \theta = \frac{\pi}{3}.$$

Considerînd k și C constante, să se determine proiecția vitezei instantanee de rotație pe axele sistemului fix. Ce valoare trebuie dată lui C , ca planul fix $Ox'y'$ să fie axoida fixă?

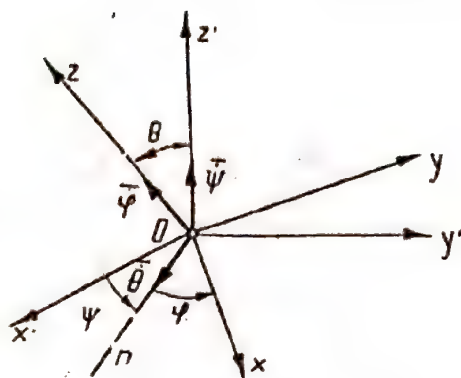


Fig. 10.B.9

Rezolvare. În figura 10.B.9 au fost reprezentate axele sistemelor de axe fix ($O'x'y'z'$), mobil ($Oxyz$), unghiurile lui Euler și vitezele unghiulare corespunzătoare.

Viteza instantanee de rotație are expresia:

$$\bar{\omega} = \bar{\psi} + \bar{\varphi} + \bar{\theta}.$$

Proiectînd pe axele sistemului fix, se obține

$$\omega_x = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi;$$

$$\omega_{y'} = -\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi;$$

$$\omega_{z'} = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta.$$

Derivînd ψ , φ și θ și înlocuind, rezultă:

$$\omega_x = \frac{k\sqrt{3}}{2} \cos(Ckt);$$

$$\omega_{y'} = \frac{k\sqrt{3}}{2} \sin(Ckt);$$

$$\omega_{z'} = k\left(C + \frac{1}{2}\right).$$

Dacă $Ox'y'$ este axoidă fixă, rezultă $\omega_{z'} = 0$. Deci,

$$C = -\frac{1}{2}.$$

10.B.10. O placă de forma unui triunghi dreptunghic, cu catetele $OA = \frac{AB}{2} = c$ (fig. 10.B.10), se mișcă față de punctul fix O , cateta OA rămînd în planul orizontal. Se cunosc viteza de rotație a plăcii în jurul catetei OA , $\omega_2 = \omega_0$ și viteza de rotație a catetei în plan, $\omega_1 = 2\omega_0$, unde $\omega_0 = \text{constant}$. La momentul inițial triunghiul este perpendicular pe plan. Să se calculeze expresiile vitezei și accelerației instantanee de rotație a plăcii în raport cu triedrul mobil, viteza și accelerația vârfului B al triunghiului în momentul în care placa este perpendiculară pe plan.

Rezolvare. Se alege un sistem de axe mobil, cu originea în O , conținînd placa în planul Oxz . Placa, fiind verticală la momentul inițial,

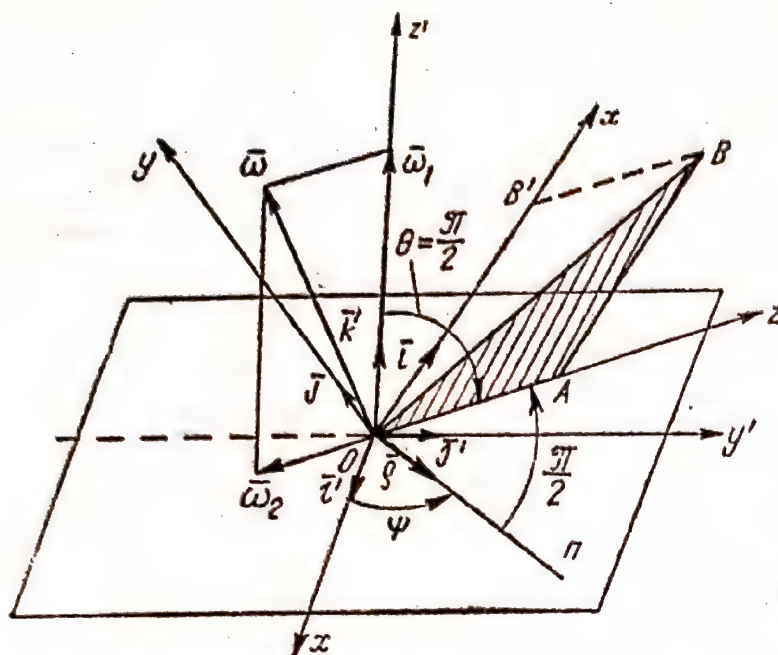


Fig. 10.B.10

axele Ox , Ox' și linia nodurilor sînt suprapuse. Corespunzător datelor problemei, unghiurile lui Euler sînt :

$$\psi = \omega_1 t = 2\omega_0 t;$$

$$\varphi = \omega_2 t = \omega_0 t;$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Viteza instantanee de rotație este :

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 = \dot{\psi} \bar{k} + \dot{\varphi} \bar{i}.$$

Pe triedrul mobil, proiecțiile vitezei unghiulare au expresiile :

$$\omega_x = \omega_1 \sin \varphi = 2\omega_0 \sin \omega_0 t;$$

$$\omega_y = \omega_1 \cos \varphi = 2\omega_0 \cos \omega_0 t;$$

$$\omega_z = -\omega_2 = -\omega_0.$$

Pentru cazul în care placa este verticală $\varphi = (2k+1) \frac{\pi}{2}$, cu $\cos \varphi = 0$ și $\sin \varphi = \pm 1$, după cum axele Ox și Oz' coincid sau sînt de sens contrar.

Viteza punctului $B(\bar{r}_B = 2c\bar{i} + c\bar{k})$ este :

$$\bar{v}_B = \bar{\omega} \times \bar{r}_B = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \pm 2\omega_0 & 0 & -\omega_0 \\ 2c & 0 & c \end{vmatrix} = 2\omega_0 c (\pm 1 + 1) \bar{j}.$$

Rezultă : $\bar{v}_B = 4\omega_0 c \bar{j}$, cînd Ox este de același sens cu $O'z'$ și $\bar{v}_B = 0$, cînd Ox este de sens contrar lui $O'z'$.

Accelerația instantanee de rotație este :

$$\dot{\bar{\omega}} = \dot{\bar{\omega}}_1 + \dot{\bar{\omega}}_2 = \dot{\bar{\omega}}_2.$$

Pentru derivare, se proiectează $\bar{\omega}_2$ pe sistemul de referință fix :

$$\bar{\omega}_2 = \omega_2 \sin \psi \bar{i}' - \omega_2 \cos \psi \bar{j}';$$

$$\dot{\bar{\omega}}_2 = 2\omega_0^2 (\cos \psi \bar{i}' + \sin \psi \bar{j}') = 2\omega_0^2 \bar{\rho},$$

unde $\bar{\rho}$ este versorul liniei nodurilor (intersecția planurilor xOy și $O'x'y'$).

Pe axele triedrului mobil proiecțiile lui $\dot{\bar{\omega}}$ sînt :

$$\dot{\omega}_x = 2\omega_0^2 \cos \varphi = 2\omega_0^2 \cos \omega_0 t;$$

$$\dot{\omega}_y = -2\omega_0^2 \sin \varphi = -2\omega_0^2 \sin \omega_0 t;$$

$$\dot{\omega}_z = 0.$$

Expresia lui \vec{a}_B este:

$$\vec{a}_B = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_B + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_B) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \mp 2\omega_0^2 & 0 \\ 2c & 0 & c \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \pm 2\omega_0 & 0 & -\omega_0 \\ 0 & 2\omega_0 c(\pm 1 + 1) & 0 \end{vmatrix} = 2\omega_0^2 c \vec{i} \pm 4\omega_0^2 c(2 \pm 1) \vec{k}.$$

Rezultă accelerația:

$$\vec{a}_B = 2\omega_0^2 c \vec{i} + 12\omega_0^2 c \vec{k}; |\vec{a}_B| = 2\omega_0^2 c \sqrt{37},$$

cînd axele Ox și $O'z'$ sînt în același sens și

$$\vec{a}_B = 2\omega_0^2 c \vec{i} - 4\omega_0^2 c \vec{k}, |\vec{a}_B| = 2\omega_0^2 c \sqrt{5},$$

cînd axa Ox este de sens contrar lui $O'z'$.

10.B.11. Două roți solidare de raze R și r (fig. 10.B.11) sînt antrenate simultan cu două cremaliere, imprimîndu-se punctelor A și B vitezele cunoscute $\vec{v}_1 > \vec{v}_2$. Să se determine poziția centrului instantaneu de rotație, viteza unghiulară instantanee și viteza centrului comun al celor două roți.

Rezolvare. Se găsește poziția centrului instantaneu de rotație ținînd seama că distribuția de viteze față de acest punct este aceeași ca la mișcarea de rotație.

Din asemănarea triunghiurilor formate, rezultă:

$$IB = \frac{v_2(R+r)}{v_1 - v_2}.$$

Cu poziția lui I determinată, rezultă:

$$\omega = \frac{v_2}{IB} = \frac{v_1 - v_2}{R+r} \text{ și } v_0 = \omega IO = \frac{v_1 R + v_2 r}{R+r},$$

10.B.12. Se consideră mecanismul din figura 10.B.12, format din barele O_1A , AB , CD și O_2D avînd lungimile cunoscute. Să se determine, în poziția considerată, vitezele punctelor A , B , C , D și viteza unghiulară a barei O_2D .

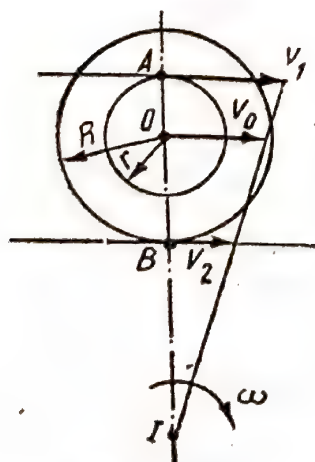


Fig. 10.B.11

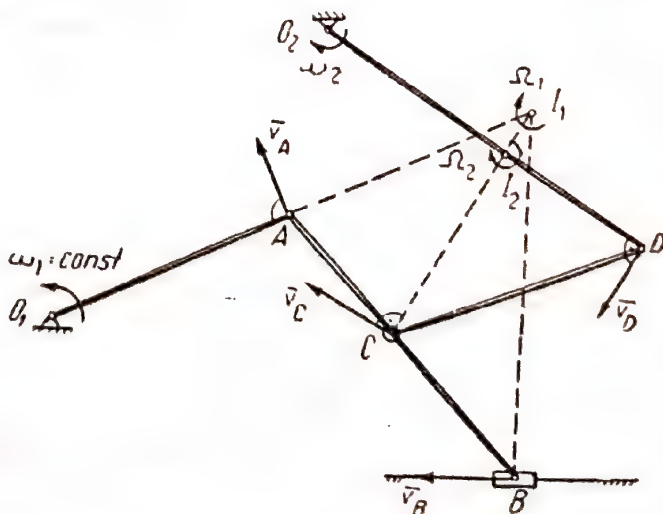


Fig. 10.B.12

Rezolvare. Bara O_1A execută o mișcare de rotație. Viteza punctului A va fi: $\vec{v}_A = O_1A\omega_1$. Bara AB are mișcare plan-paralelă, cu centrul instantaneu în I_1 . Cunoscând viteza punctului A , se poate deduce:

$$\Omega_1 = \frac{O_1A}{I_1A} \omega_1; \quad v_B = \frac{I_1B \cdot O_1A}{I_1A} \omega_1; \quad v_C = \frac{I_1C \cdot O_1A}{I_1A} \omega_1.$$

Centrul instantaneu al mișcării barei CD se află în punctul I_2 , în raport cu care se scrie:

$$v_C = I_2C\Omega_2; \quad v_D = I_2D\Omega_2.$$

Ținând seama de expresia lui v_C de mai sus, se deduce:

$$\Omega_2 = \frac{I_1C \cdot O_1A}{I_1A \cdot I_2C} \omega_1; \quad v_D = \frac{I_1C \cdot O_1A \cdot I_2D}{I_1A \cdot I_2C} \omega_1.$$

În sfârșit, viteza ω_2 va fi:

$$\omega_2 = \frac{v_D}{O_2D} = \frac{I_1C \cdot O_1A \cdot I_2D}{I_1A \cdot I_2C \cdot O_2D} \omega_1.$$

10.B.13. La mecanismul din figura 10.B.13, roata de rază r se rostogolește fără alunecare pe periferia discului fix de rază R , fiind condusă de manivela OA . Pe periferia roții mobile este articulată biela BC de lungime l . La momentul considerat, AB este perpendicular pe OA . Să se calculeze vitezele instantanee de rotație ale roții mobile și bielei, vitezele punctelor B și C .

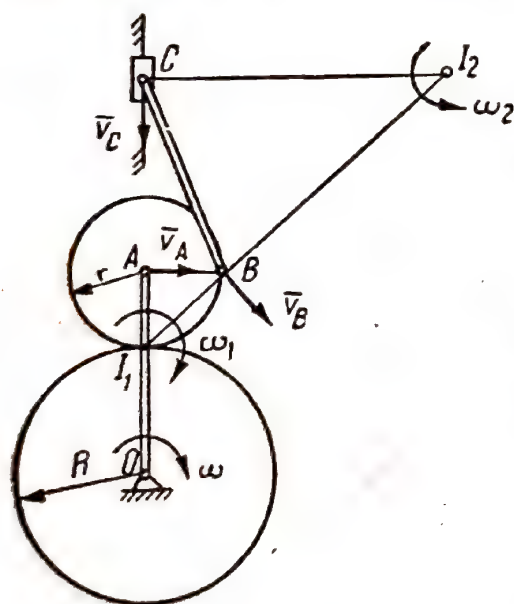


Fig. 10.B.13

Rezolvare. Se poate determina imediat viteza punctului A :

$$v_A = \omega(R + r).$$

Determinându-se poziția centrelor instantanee de rotație I_1 și I_2 pentru roata mobilă și pentru biela, cu ajutorul lui \vec{v}_B se stabilesc sensul și mărimea celor două viteze unghiulare instantanee:

$$\omega_1 = \frac{v_A}{I_1A} = \omega \frac{R + r}{r}.$$

De aici,

$$v_B = \omega_1 I_1B = \omega \sqrt{2}(R + r)$$

și

$$\omega_2 = \frac{v_B}{I_2B} = \frac{\omega(R + r)}{\sqrt{l^2 - r^2}}.$$

Utilizând I_2 se poate găsi:

$$v_C = \omega_2 I_2C = \frac{\omega(R + r)(r + \sqrt{l^2 - r^2})}{\sqrt{l^2 - r^2}}.$$

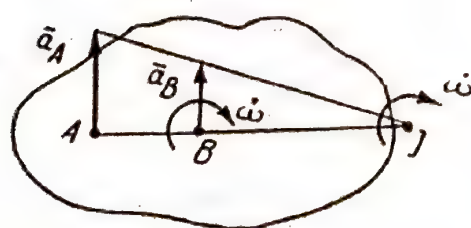


Fig. 10.B.14

10.B.14. În mișcarea plană a unei plăci se cunosc la un moment dat accelerațiile $a_A = 3a_0$, $a_B = 2a_0$ perpendiculare în același sens pe dreapta $AB = l$ (fig. 10.B.14). Să se găsească polul accelerațiilor J , viteza și accelerația unghiulară a plăcii în momentul considerat.

Rezolvare. Se poate scrie:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \overline{AB} - \omega^2 \overline{AB}.$$

Deoarece $\vec{a}_B - \vec{a}_A$ este coliniar cu $\dot{\vec{\omega}} \times \overline{AB}$, rezultă:

$$(\omega)^2 \overline{AB} = 0.$$

Cum $\overline{AB} \neq 0$, rezultă că viteza instantanee de rotație a barei în momentul respectiv este $\omega = 0$.

Se poate calcula:

$$\dot{\omega} = \frac{a_A - a_B}{AB} = \frac{a_0}{l},$$

avînd sensul de pe figură.

Pentru polul accelerațiilor,

$$\operatorname{tg} \varphi = \infty \quad \text{deci} \quad \varphi = \pi/2$$

și

$$BJ = \frac{a_B}{\dot{\omega}} = 2l,$$

măsurat la dreapta punctului B .

Ca sens fizic, $\omega = 0$ și $\dot{\omega} \neq 0$ poate corespunde momentului inițial al mișcării.

10.B.15. O placă de formă triunghi echilateral cu latura l , în mișcare plană, are la un moment dat accelerațiile cunoscute $|\vec{a}_A| = |\vec{a}_B| = a_0$ dirijate ca în figura 10.B.15, a . Să se determine accelerația punctului C în momentul considerat.

Rezolvare. Considerînd A originea sistemului de axe mobil, se poate scrie:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \overline{AB} - \omega^2 \overline{AB}.$$

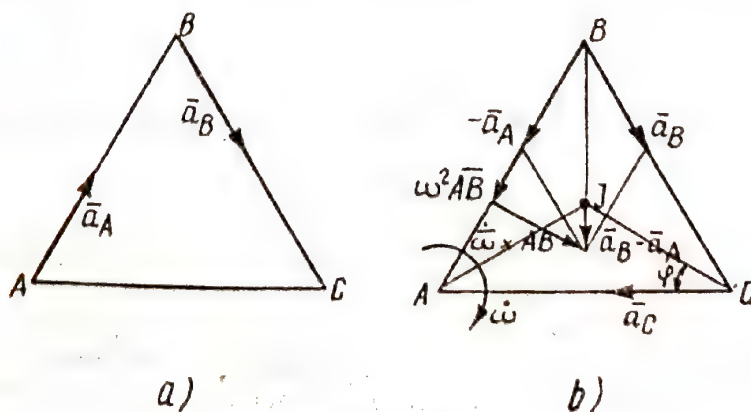


Fig. 10.B.15

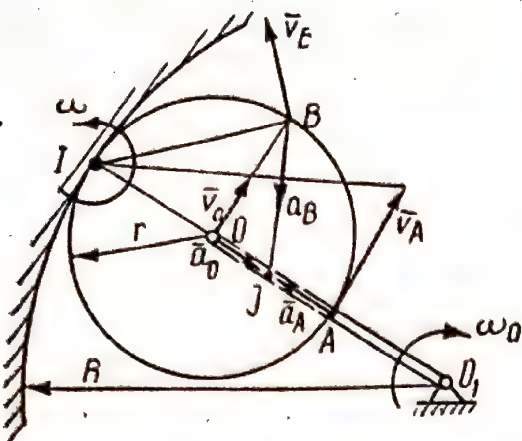


Fig. 10.B.16

Descompunînd $\vec{a}_B - \vec{a}_A$ după direcția perpendiculară pe AB și de-a lungul lui AB (fig. 10.B.15, b), se obțin componentele tangențială, respectiv, normală ale accelerației de rotație a lui B față de A :

$$\vec{a}_{BA}^t = \dot{\omega} \times \overline{AB}; \quad \vec{a}_{BA}^n = \omega^2 \overline{AB}.$$

Din construcția grafică, rezultă:

$$\dot{\omega} = \frac{a_{BA}^t}{AB} = \frac{a_0 \sqrt{3}}{2l}; \quad \omega^2 = \frac{a_{BA}^n}{AB} = \frac{3a_0}{2l}.$$

Pentru găsirea polului accelerațiilor, se calculează:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\dot{\omega}}{\omega^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad (\varphi = 30^\circ)$$

$$AJ = \frac{a_A}{\sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4}} = \frac{l}{\sqrt{3}}.$$

Polul accelerațiilor este situat la intersecția bisectoarelor triunghiului echilateral.

10.B.16. Manivela $O_1O = 2r$ se rotește cu $\omega_0 = \text{const.}$ în jurul lui O_1 (fig. 10.B.16). Ea conduce în mișcare plană un disc de rază r care se rostogolește fără alunecare în interiorul suprafeței cilindrice de rază $R = 3r$. Să se calculeze vitezele și accelerațiile punctelor A și B ale discului.

Rezolvare. Centrul instantaneu de rotație în mișcarea discului este la punctul de tangență cu suprafața cilindrică. Deci:

$$\omega = \frac{v_0}{OI} = \frac{2r\omega_0}{r} = 2\omega_0.$$

În raport cu I se pot calcula:

$$v_A = \omega IA = 4r\omega_0; \quad v_B = \omega IB = 2\sqrt{2}r\omega_0.$$

Pentru determinarea accelerației, se stabilește poziția polului accelerațiilor, cunoscînd:

$$a_0 = 2r\omega_0^2; \quad \dot{\omega} = 0; \quad \operatorname{tg} \varphi = 0.$$

Deci, polul accelerațiilor J este situat în sensul lui \vec{a}_0 la distanța:

$$OJ = \frac{a_0}{\omega^2} = \frac{r}{2}.$$

Considerînd distribuția de accelerații față de J ca în mișcarea de rotație, rezultă:

$$a_A = \omega^2 JA = 2r\omega_0^2; \quad a_B = \omega^2 JB = 2\sqrt{5}r\omega_0^2.$$

11.A. PREZENTARE TEORETICĂ

11.A.1. Datele problemei

Mișcarea *relativă* și mișcarea *absolută* a punctului au fost definite la Capitolul 10.

Folosind aceleași notații, $M(x, y, z)$ este un punct oarecare al solidului (C) raportat la triedrul $Oxyz$ solidar cu (C) .

Poziția triedrului $Oxyz$ în raport cu triedrul fix $O'x'y'z'$ este determinată în orice moment cu ajutorul vectorilor: $\vec{r}(t)$, $\vec{i}(t)$, $\vec{j}(t)$ și $\vec{k}(t)$, funcțiuni date de timp.

Mișcarea triedrului $Oxyz$ și a solidului (C) este caracterizată prin vectorii: $\vec{v}_0(t) = \dot{\vec{r}}_0(t)$, $\vec{\omega}(t)$ și derivatele lor: $\vec{a}_0(t)$, $\dot{\vec{\omega}}(t)$.

În mișcarea *relativă* a punctului $M(x, y, z)$ în raport cu $Oxyz$, poziția lui M este dată de $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, în care $x(t)$, $y(t)$ și $z(t)$ sînt funcții date de timp, iar \vec{i} , \vec{j} , și \vec{k} sînt *presupuse* independente de timp.

Deci, viteza relativă și accelerația relativă a punctului M față de triedrul $Oxyz$ sînt:

$$\vec{v}_r = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \quad \text{și} \quad \vec{a}_r = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}. \quad (11.1)$$

În mișcarea *absolută* a punctului M în raport cu triedrul fix $O'x'y'z'$, vectorul de poziție este dat, în momentul t , prin relația:

$$\vec{r}' = \vec{r}_0 + \vec{r} = \vec{r}_0 + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (11.2)$$

11.A.2. Necunoscutele problemei

Fiind date mișcarea *relativă* a punctului M în raport cu (C) și mișcarea triedrului $Oxyz$, solidar cu (C) , în raport cu triedrul fix $O'x'y'z'$, se cere mișcarea *absolută* a punctului M în raport cu triedrul fix.

Viteza *absolută* \vec{v}_a , din momentul t , a punctului mobil, dedusă din (11.2), prin derivare este:

$$\vec{v}_a = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}} = \vec{v}_0 + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} + x\dot{\vec{i}} + y\dot{\vec{j}} + z\dot{\vec{k}}, \quad (11.3)$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t, \quad (11.3 \text{ bis})$$

unde:

$$\vec{v}_t = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (11.4)$$

este viteza de transport a mobilului, ca o consecință a mișcării solidului (C) în raport cu triedrul fix. Prin definiție, viteza de transport \vec{v}_t , în momentul t , a punctului mobil, este egală cu viteza punctului, solidar cu (C) , cu care în momentul considerat, mobilul coincide.

Accelerația absolută \vec{a}_a din momentul t , a punctului mobil, dedusă din (11.3) este:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_0 + \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} + 2(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}), \quad (11.5)$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_t + \vec{a}_r + \vec{a}_c, \quad (11.5 \text{ bis})$$

unde:

$$\vec{a}_t = \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (11.6)$$

este accelerația de transport a mobilului. Prin definiție: accelerația de transport \vec{a}_t din momentul t , a punctului mobil este egală cu accelerația punctului solidar cu (C), cu care în momentul considerat, mobilul coincide.

Accelerația Coriolis \vec{a}_c sau accelerația complementară se exprimă vectorial prin:

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r; \quad (11.7)$$

se anulează în următoarele cazuri:

$$\vec{\omega} = 0 \text{ sau } \vec{v}_r = 0 \text{ sau } \vec{v}_r \text{ paralel cu } \vec{\omega}.$$

Observație

Expresia vectorială a accelerației absolute este:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{a}_t + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r. \quad (11.8)$$

11.B. APLICAȚII LA CINEMATICA MIȘCĂRII RELATIVE A PUNCTULUI

11.B.1. O barcă se deplasează într-un râu cu viteză constantă v_1 în raport cu apa. Viteza curentului apei v_2 este constantă pe toată lățimea l a râului.

Să se determine:

- viteza absolută a bărcii;
- în ce direcție trebuie să se traverseze râul pentru ca pornind din A să se atingă malul opus în B (fig. 11.B.1);
- în ce direcție trebuie să se traverseze râul, pentru ca timpul de traversare să fie minim.

Rezolvare. Viteza relativă a bărcii în raport cu apa: $v_r = v_1$.

Viteza de transport este viteza curentului apei: $v_t = v_2$.

Viteza absolută este: $|\vec{v}_a| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos \alpha}$, unde s-a notat cu α unghiul dintre viteza relativă și mal, iar cu β unghiul dintre viteza absolută și mal.

Proiectând v_1 și v_a pe direcția AB se obține:

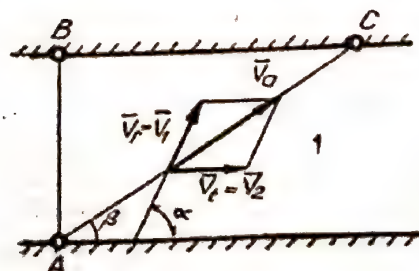


Fig. 11.B.1

de unde

$$v_1 \sin \alpha = v_a \sin \beta,$$

$$\sin \beta = \frac{v_1 \sin \alpha}{v_a}.$$

Înlocuind pe v_a :

$$\sin \beta = \frac{v_1 \sin \alpha}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos \alpha}}.$$

Dacă $\alpha = 0 \Rightarrow \beta = 0$, rezultă că
 $v_a = v_1 + v_2$ (barca merge în același sens cu curentul).

Pentru $\alpha = \pi \Rightarrow \beta = 0^\circ$ sau 180° , rezultă că
 $v_a = |v_1 - v_2|$ (v_1 fiind împotriva curentului, barca se va deplasa cu v_a în sensul vitezei mai mari dintre v_1 și v_2).

Pentru ca barca, pornind din A , să ajungă în B trebuie ca:

$$\beta = \frac{\pi}{2}, \sin \beta = 1,$$

deci:

$$v_1 \sin \alpha = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos \alpha}.$$

Ridicînd la pătrat și grupînd, se obține:

$$v_1^2 \cos^2 \alpha + 2v_1v_2 \cos \alpha + v_2^2 = 0,$$

de unde:

$$\cos \alpha = -\frac{v_2}{v_1} \text{ și } v_a = \sqrt{v_1^2 - v_2^2}.$$

Cosinusul fiind negativ, $\alpha > \frac{\pi}{2}$, iar barca poate ajunge în B numai dacă $v_1 > v_2$.

Timpul de traversare a râului este:

$$t = \frac{AC}{v_a} = \frac{l}{\sin \beta v_a} = \frac{l}{v_1 \sin \alpha}.$$

Timpul minim se obține pentru:

$$\alpha_{max} = \frac{\pi}{2}.$$

Viteza absolută este, în acest caz:

$$v_a = \sqrt{v_1^2 + v_2^2},$$

iar unghiul β :

$$\sin \beta = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

11.B.2. Un disc de rază R se rotește cu viteza unghiulară constantă ω_0 în jurul unei axe perpendiculare în centrul O pe planul său. Pe periferia discului se deplasează un punct M cu viteza u constantă în modul. Să se determine viteza absolută și accelerația absolută a punctului M , la un moment dat (fig. 11.B.2).

Rezolvare. Viteza relativă: $v_r = u$.

Discul avînd o mișcare de rotație, viteza de transport a punctului M este:

$$v_t = \omega_0 R.$$

Viteza absolută:

$$|\bar{v}_a| = |\omega_0 R - u|.$$

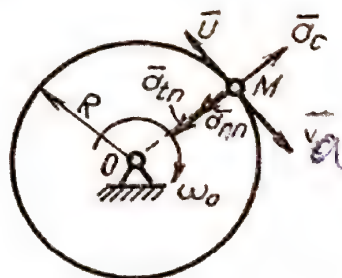


Fig. 11.B.2

Accelerația relativă a punctului are componentele:

$$a_{rt} = \dot{u} = 0, \text{ deoarece } |\bar{u}| \text{ este constant,}$$

$$a_{rn} = \frac{u^2}{R}.$$

Accelerația de transport are componentele:

$$a_{ut} = \dot{\omega}_0 R = 0 \text{ deoarece } \omega_0 \text{ este constant,}$$

$$a_{un} = \omega_0^2 R.$$

Accelerația Coriolis are direcția și sensul determinate de produsul vectorial $\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r$ (fig. 11.B.2), iar modulul:

$$|\bar{a}_c| = 2\omega_0 u \sin 90^\circ.$$

Accelerația absolută este:

$$|\bar{a}_a| = |\bar{a}_{rn} + \bar{a}_{un} - \bar{a}_c| = \left| \frac{u^2}{R} + \omega_0^2 R - 2\omega_0 u \right|.$$

11.B.3. Un tub se rotește în jurul unei axe verticale cu viteza unghiulară $\omega = 2t$. Tubul este înclinat cu un unghi de 30° , invariabil, față de axă (fig. 11.B.3, a).

Un punct mobil M se deplasează în interiorul tubului de la O spre A cu viteza \bar{u} constantă. Să se determine viteza și accelerația absolută a punctului mobil M la un moment dat.

Rezolvare. Mișcarea relativă a punctului M este rectilie, cu viteza relativă $v_r = u$ constantă, avînd direcția barei.

Bara OA avînd o mișcare de rotație în jurul axei $O'O$, viteza de transport a punctului M are direcția tangentei la cercul de rază $O'M$, sensul

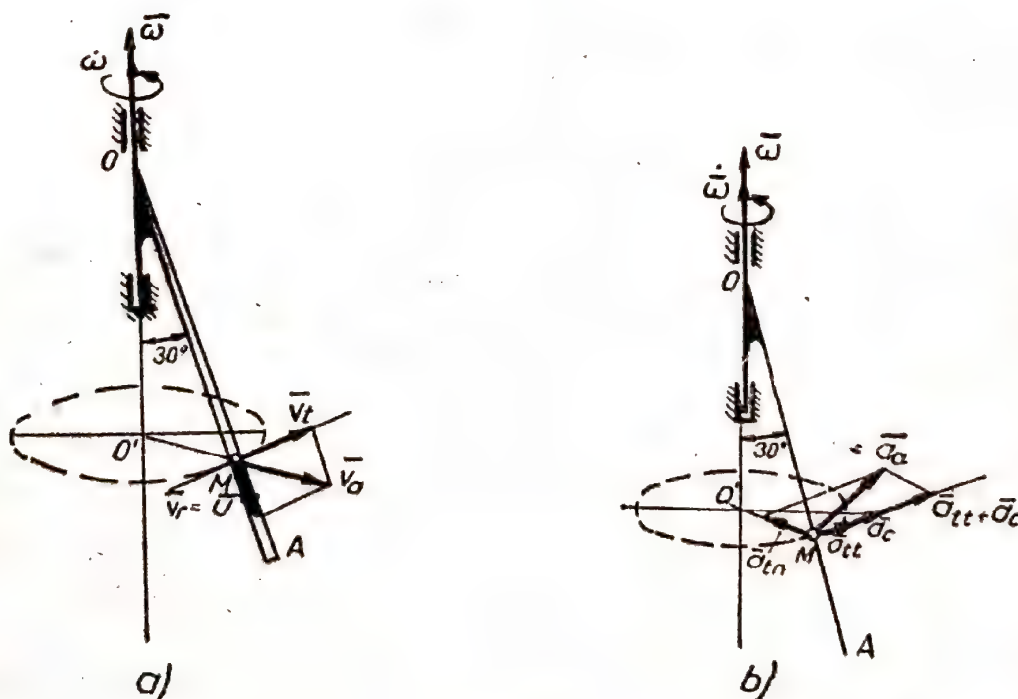


Fig. 11.B.3

dat de ω , iar modulul: $v_t = \omega O'M$; dar $O'M = OM \sin 30^\circ$, iar $OM = s_r = ut$, drumul parcurs în mișcarea relativă de mobilul M ;

deci

$$v_t = \omega \frac{ut}{2} = ut^2.$$

Viteza absolută a punctului M va avea direcția și sensul rezultate din compunerea vectorilor \vec{v}_r și \vec{v}_t (fig. 11.B.3, a), iar modulul:

$$|\vec{v}_a| = \sqrt{v_r^2 + v_t^2} = u \sqrt{1 + t^4}.$$

Accelerația relativă a punctului $a_r = \dot{v}_r = 0$.

Accelerația de transport a punctului M are componentele:

$$a_n = \dot{\omega} O'M,$$

cum $\dot{\omega} = 2$, iar $O'M = \frac{ut}{2}$, rezultă: $a_n = ut$, și $a_m = \omega^2 O'M = 2ut^3$.

Accelerația Coriolis are direcția și sensul dat de produsul vectorial $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$ (fig. 11.B.3, b), iar modulul:

$$|\vec{a}_c| = 2 \cdot 2ut \sin 150^\circ = 2ut.$$

Accelerația absolută rezultă din compunerea vectorilor \vec{a}_n , \vec{a}_m și \vec{a}_c (fig. 11.B.3, b), avînd modulul:

$$|\vec{a}_a| = \sqrt{(a_n + a_c)^2 + a_m^2} = ut \sqrt{9 + 4t^4}.$$

11.B.4. Se dă mecanismul din figura 11.B.4, a, format din trei bare articulate, în plan: $OA = AB = BC = OC = l$. Bara OA are o mișcare de rotație cu viteza unghiulară ω_0 constantă, în jurul unei axe perpendiculare în O pe planul mecanismului, O fiind o articulație fixă.

Pe bara AB se deplasează un punct mobil M după legea $AM = \frac{t^2}{2}$.

În momentul inițial bara OA ocupă poziția OC , iar punctul M se află în A . Să se determine viteza și accelerația absolută a punctului M la un moment dat.

Rezolvare. Viteza relativă a punctului M are direcția barei AM : $v_r = \dot{s}_r$; dar cum $s_r = AM = \frac{t^2}{2}$, rezultă: $v_r = t$.

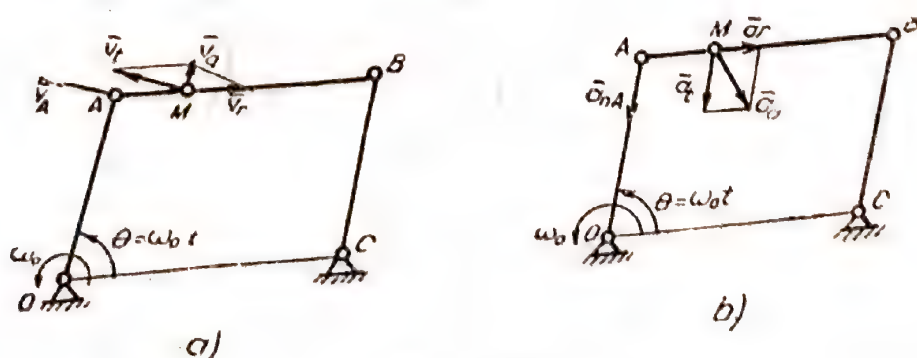


Fig. 11.B.4

Bara AB are o mișcare de translație circulară, viteza de transport a punctului M fiind egală cu viteza punctului A :

$$v_t = v_A = \omega_0 l,$$

unde v_A este perpendiculară pe OA , în sensul dat de ω_0 (fig. 11.B.4, a).

Viteza absolută a punctului M rezultă din compunerea lui \bar{v} , și \bar{v}_t (fig. 11.B.4, a), modulul fiind:

$$|\bar{v}_a| = \sqrt{v_r^2 + v_t^2 + 2v_r v_t \cos(90^\circ + \theta)} = \sqrt{l^2 + \omega_0^2 l^2 - 2\omega_0 l^2 \sin \omega_0 t}.$$

În figura 11.B.4, b s-a construit compunerea accelerațiilor.

Accelerația relativă $a_r = \dot{v}_r = 1$.

Accelerația de transport a punctului M este egală cu accelerația punctului A , mișcarea barei AB fiind de translație; punctul A are numai accelerație normală, ω_0 fiind constant:

$$a_t = a_{nA} = \omega_0^2 l.$$

Accelerația Coriolis: $\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r = 0$, bara AB avînd o mișcare de translație ($\omega = 0$).

Accelerația absolută este:

$$|\bar{a}_a| = \sqrt{a_r^2 + a_t^2 + 2a_r a_t \cos(180^\circ - \theta)} = \sqrt{1 + \omega_0^4 l^2 - 2\omega_0^2 l \cos \omega_0 t}.$$

11.B.5. Un cerc de rază R se rotește cu viteza unghiulară constantă $\omega_i = \omega_0$ în jurul unei axe orizontale, conținută în planul cercului și situată la distanța $2R$ de centrul C al acestuia (fig. 11.B.5, a). Un punct se deplasează pe circumferința cercului de rază R , avînd o mișcare circulară cu viteza unghiulară $\omega_{rel} = 2\omega_0$, constantă.

Să se determine vitezele și accelerațiile absolute ale mobilului punctual în pozițiile A , B și D .

Rezolvare. În mișcarea relativă pe cercul de rază R cu $\omega_{rel} = 2\omega_0$ vitezele liniare ale mobilului punctual sînt egale în modul pentru cele tre, poziții, direcțiile și sensurile acestora fiind indicate în figura 11.B.5, a :

$$|\bar{v}_{rA}| = |\bar{v}_{rB}| = |\bar{v}_{rD}| = \omega_{rel} R = 2\omega_0 R.$$

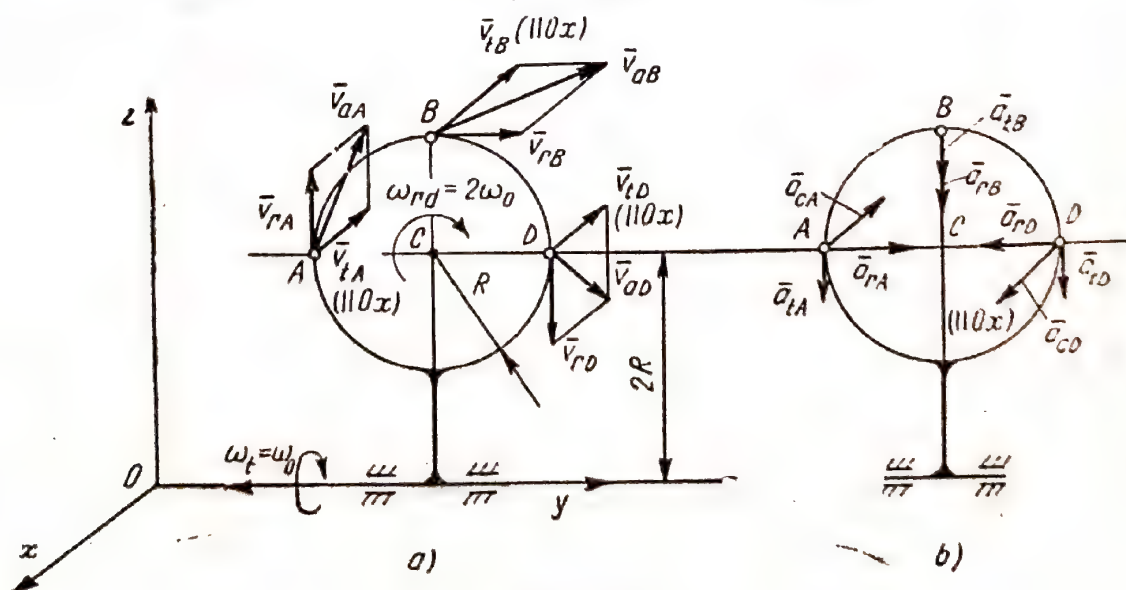


Fig. 11.B.5

Vitezele de transport ale punctelor A , B și D ale cercului sînt date de mișcarea de rotație a acestuia cu $\omega_i = \omega_0$:

$$|\vec{v}_{iA}| = |\vec{v}_{iD}| = \omega_i 2R = \omega_0 2R; \quad |\vec{v}_{iB}| = \omega_i \cdot 3R = \omega_0 3R.$$

Vitezele absolute ale mobilului punctual se obțin prin compunerea vectorilor \vec{v}_r și \vec{v}_i pentru fiecare poziție (fig. 11.B.5, a):

$$|\vec{v}_{aA}| = \sqrt{v_{rA}^2 + v_{iA}^2} = 2\sqrt{2}\omega_0^2 R;$$

$$|\vec{v}_{aB}| = \sqrt{v_{rB}^2 + v_{iB}^2} = \sqrt{13}\omega_0^2 R;$$

$$|\vec{v}_{aD}| = \sqrt{v_{rD}^2 + v_{iD}^2} = 2\sqrt{2}\omega_0^2 R.$$

Accelerațiile relative ale mobilului punctual au numai componente normale, $\omega_{rel} = 2\omega_0$ fiind constant, și sînt egale în modul pentru cele trei poziții, direcțiile și sensurile acestora fiind reprezentate în figura 11.B.5, b :

$$|\vec{a}_{rA}| = |\vec{a}_{rB}| = |\vec{a}_{rD}| = \omega_{rel}^2 R = 4\omega_0^2 R.$$

Accelerațiile de transport ale punctelor A , B și D ale cercului au de asemenea numai componente normale, $\omega_i = \omega_0$ fiind constant:

$$|\vec{a}_{iA}| = |\vec{a}_{iD}| = \omega_i^2 2R = \omega_0^2 2R; \quad |\vec{a}_{iB}| = \omega_i^2 3R = \omega_0^2 3R.$$

Accelerațiile Coriolis sînt egale în modul pentru pozițiile A și D , direcțiile și sensurile fiind reprezentate în figura 11.B.5, b , ca rezultat al produsului vectorial $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$:

$$|\vec{a}_{cA}| = |\vec{a}_{cD}| = 2\omega_0 2\omega_0 R \sin \frac{\pi}{2} = 4\omega_0^2 R.$$

Pentru poziția B , rezultă:

$$|\vec{a}_{cB}| = 2\omega_0 \cdot 2\omega_0 R \sin \pi = 0.$$

Accelerațiile absolute ale mobilului punctual se obțin prin compunerea vectorilor \vec{a}_r , \vec{a}_i și \vec{a}_c pentru fiecare poziție (fig. 11.B.5, b), modulele lor fiind:

$$|\vec{a}_{aA}| = \sqrt{a_{rA}^2 + a_{iA}^2 + a_{cA}^2} = 6\omega_0^2 R,$$

$$|\vec{a}_{aB}| = a_{rB} + a_{iB} = 7\omega_0^2 R,$$

$$|\vec{a}_{aD}| = \sqrt{a_{rD}^2 + a_{iD}^2 + a_{cD}^2} = 6\omega_0^2 R.$$

DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL LIBER ȘI CU LEGĂTURI

12.A. PREZENTARE TEORETICĂ

12.A.1. Generalități

În plus față de cinematică, în dinamica punctului material apar:

Masa punctului material m , *masă inertă* sau *masă gravifică*, independentă de mișcare (viteză), constantă sau variabilă:

$$m = m(t), \text{ în cazul rachetelor etc.}$$

Forța este o caracteristică instantanee a procesului complex de interacțiune, cauza modificării mișcării mecanice (adică a accelerației punctului material) și care face legătura dintre această formă și alte forme nemecanice de mișcare.

Observație

Un sistem material oarecare poate să acționeze un punct material. În dinamica punctului material se va reprezenta această acțiune printr-o forță fără a se lua în considerare și reacțiunea punctului material asupra sistemului¹.

Natura fizică a forței se poate reflecta uneori în expresia matematică a ei. După natura interacțiunii în expresia forței apar relații între mase, distanțe, unghiuri, timp, viteze etc. Astfel:

Greutatea unui corp la suprafața Pământului este o forță constantă în direcție, sens și modul (\vec{F}_0).

Forța de atracție newtoniană este funcție de mase și de distanțe:

$$f = -K \frac{mM}{r^2}.$$

Rezistența unui mediu la mișcarea unui solid, depinde de viteză și de alte caracteristici ale mediului și ale suprafeței de contact: $\vec{R} = kf(\vec{v})$.

Forțele electromagnetice depind între altele și de timp: $\vec{F} = \vec{F}(t)$.

Forțele elastice depind de deformarea sistemului elastic care acționează și au, potrivit legii lui Hooke, expresii de forma:

$$\vec{F} = -K\vec{r}; \quad K > 0.$$

Atenție. Constanta K nu este aceeași în expresiile precedente.

Expresia generală a forței care acționează punctul material se poate pune sub forma: $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v})$.

¹ Se știe că principiul egalității acțiunii și reacțiunii nu e valabil pentru orice forme de interacțiuni ale sistemelor materiale.

12.A.2. Problemele generale ale dinamicii punctului material liber

a) *Problema directă*. Cunoscându-se mișcarea punctului material liber, de masă constantă dată, să se determine rezultanta forțelor care acționează punctul.

Date : $m, \bar{r} = \bar{r}(t).$

Răspuns : $\bar{F} = m\ddot{\bar{r}}(t).$

Soluția, deși este unică din punct de vedere matematic, nu dă nici o indicație asupra naturii fizice a rezultantei, ceea ce este evident deoarece o aceeași expresie matematică poate corespunde la mai multe fenomene fizice.

b) *Problema inversă*. Cunoscându-se forțele care acționează punctul material liber, de masă constantă dată, să se determine mișcarea.

Date : $m, \bar{F} = \bar{F}(t, \dot{\bar{r}}, \bar{r})$ forța rezultantă.

Răspuns : Mișcarea se determină integrând ecuația diferențială vectorială de ordinul II :

$$m\ddot{\bar{r}} - \bar{F}(t, \dot{\bar{r}}, \bar{r}) = 0, \quad (12.1)$$

necunoscută fiind :

$$\bar{r} = \bar{r}(t),$$

sau prin integrarea sistemului de ecuații diferențiale scalare :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} - X(t, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z) &= 0; & m\ddot{y} - Y(t, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z) &= 0; \\ m\ddot{z} - Z(t, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z) &= 0 \end{aligned} \quad (12.2)$$

necunoscutele sînt :

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t),$$

coordonatele carteziene ale punctului material mobil.

12.A.3. Integrala generală a ecuațiilor diferențiale

Dacă sînt îndeplinite condițiile teoriei ecuațiilor diferențiale din (12.1) se poate ajunge la :

$$\bar{r} = \bar{r}(t, \bar{C}_1, \bar{C}_2), \quad (12.3)$$

iar din (12.2), la :

$$\begin{aligned} x &= x(t, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{21}, C_{22}, C_{23}); & y &= y(t, C_{11}, \dots, C_{23}); \\ z &= z(t, C_{11}, \dots, C_{23}), \end{aligned} \quad (12.4)$$

în care (12.3), respectiv (12.4) reprezintă integrala generală a mișcării, iar \bar{C}_1, \bar{C}_2 , respectiv $C_{11}, C_{12}, \dots, C_{23}$ sînt constantele de integrare.

Deoarece integrala generală, sub forma (12.3), respectiv sub forma (12.4), verifică ecuația (12.1), respectiv ecuațiile (12.2), indiferent care ar fi valorile constantelor de integrare, înseamnă că mișcarea unui punct material sub acțiunea unei anumite forțe date se poate produce într-o infinitate de moduri.

Pentru ca mișcarea punctului material să fie univocă se consideră că în momentul $t = 0$ punctul material trece prin poziția $M_0(\vec{r}_0)$, respectiv $M_0(x_0, y_0, z_0)$, cu viteza \vec{v}_0 , respectiv $(\dot{x})_0, (\dot{y})_0, (\dot{z})_0$, adică:

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(0, C_1, C_2) \quad \text{și} \quad \vec{v}_0 = \dot{\vec{r}}(0, C_1, C_2) \quad (12.5)$$

sau

$$\begin{aligned} x_0 &= x(0, C_{11}, \dots, C_{23}); & (\dot{x})_0 &= \dot{x}(0, C_{11}, \dots, C_{23}); \\ y_0 &= y(0, C_{11}, \dots, C_{23}); & (\dot{y})_0 &= \dot{y}(0, C_{11}, \dots, C_{23}); \\ z_0 &= z(0, C_{11}, \dots, C_{23}); & (\dot{z})_0 &= \dot{z}(0, C_{11}, \dots, C_{23}). \end{aligned} \quad (12.6)$$

Deci, pentru ecuația diferențială vectorială (12.1) condițiile inițiale ale mișcării (12.5) sînt condiții de unicitate ale soluției. În mod corespunzător pentru sistemul de ecuații diferențiale scalare (12.2), condițiile inițiale (12.6) fac ca soluția să fie unică.

În teoria ecuațiilor diferențiale se pun și condiții pentru existența soluției, însă, în problemele fizicii, ale mecanicii, nu se pun asemenea condiții deoarece așa după cum se poate constata din analiza de la punctul 1, expresiile matematice ale forțelor considerate reflectă natura fizică a fenomenelor care le produc. *Sînt forțe reale și nu funcțiuni matematice arbitrare.*

12.A.4. Ecuații diferențiale în alte sisteme de referințe

In raport cu triedrul natural (Frenet). Raportarea la axele triedrului natural a ecuației vectoriale (12.1) dă ecuațiile:

$$m\dot{v} - F_t = 0, \quad m \frac{v^2}{R} - F_n = 0 \quad \text{și} \quad 0 - F_b = 0,$$

unde F_t, F_n, F_b sînt scalarii proiecțiilor forței \vec{F} pe axele triedrului, iar celelalte notații sînt cunoscute de la cinematica punctului (Cap. 9).

In coordonate cilindrice, compuse din coordonate polare (r, θ) în plan și axa Oz pentru spațiu (fig. 12.A.1), ecuațiile diferențiale ale mișcării sînt:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) - F_\rho = 0; \quad \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) - F_v = 0$$

și

$$m\ddot{z} - Z = 0,$$

în care F_ρ și F_v sînt scalarii proiecției forței rezultante \vec{F} , aplicată punctului M de masă m , pe axele determinate de O și versorii $\vec{\rho}$ și \vec{v} , iar $Z = F_z$ este scalarul proiecției acestei forțe pe axa Oz .

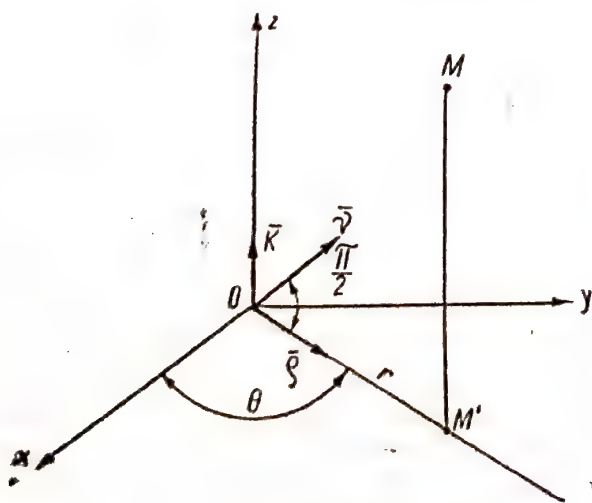


Fig. 12.A.1

12.A.5. Mișcarea punctului material pe o curbă dată

Dacă legătura este *reonomă*, ecuația vectorială a curbei se poate exprima prin: $\vec{r} = \vec{r}(s, t)$, în care s este

un parametru scalar, iar t , timpul. Parametrul s poate fi și coordonata curbilinie a punctului mobil M în raport cu originea arcelor. În cazul unei legături *scleronome*, ecuația nu depinde în mod explicit de timpul t , adică $\bar{r} = \bar{r}(s)$. Pentru determinarea mișcării punctului M este necesar să se exprime și ecuația $s = s(t)$.

Datele problemei, pentru o legătură scleronomă, sînt: ecuația curbei: $\bar{r} = \bar{r}(s)$, rezultanta forțelor date \bar{F} și condițiile inițiale: la $t = 0$, $\bar{r} = \bar{r}_0$ și $\bar{v} = \bar{v}_0$, evident \bar{v}_0 este tangentă în $M_0(\bar{r}_0)$ la curba dată.

Necunoscutele problemei sînt: legea mișcării $s = s(t)$ și forța de legătură \bar{R} care uneori, după natura legăturii, se poate exprima ca rezultanta componentei normale \bar{N} și a celei tangențiale \bar{T} .

Ecuația vectorială a mișcării punctului material eliberat de legătură este:

$$m\ddot{\bar{r}} - \bar{F} - \bar{N} - \bar{T} = 0. \quad (12.7)$$

Prin raportarea ecuației (12.7) la axele sistemului de referință se obțin ecuațiile scalare, mult mai comode pentru rezolvarea problemei.

Astfel, dacă \bar{T} este o forță rezistentă (de exemplu, dacă este datorită frecării) și se proiectează pe axele triedrului natural (Frenet) se obțin ecuațiile scalare ale problemei:

$$m\dot{v} - F_t + T = 0; \quad \frac{mv^2}{R} - F_n - N_n = 0; \quad 0 - F_b - N_b = 0.$$

În ipoteza neglijării forțelor de legătură tangențiale (de exemplu, în cazul legăturilor ideale), ecuațiile devin:

$$m\dot{v} - F_t = 0; \quad \frac{mv^2}{R} - F_n - N_n = 0; \quad F_b + N_b = 0.$$

Observație

După determinarea mișcării cu ajutorul primei ecuații, celelalte permit determinarea reacțiunii (normale) cu componentele:

$$N_n = \frac{mv^2}{R} - F_n; \quad N_b = -F_b.$$

De aici reiese că reacțiunile în dinamică, dacă legătura este după o curbă și nu după o linie dreaptă ($\frac{1}{R} = 0$), sînt diferite de cele din statică ($v = 0$).

12.A.6. Mișcarea punctului material pe o suprafață dată

Se va considera cazul legăturii *olonomă*¹, *scleronome*, *bilaterale* și *ideale* cu suprafața de ecuație:

$$f(x, y, z) = 0. \quad (12.8)$$

Forța de legătură fiind normală la suprafață, ecuația vectorială a mișcării punctului este:

$$m\ddot{\bar{r}} - \bar{F} - \lambda \text{ grad } f = 0. \quad (12.9)$$

¹ Se numește *neolonomă* legătura cu o suprafață în a cărei ecuație apar explicit și \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} , de exemplu: $f(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z) = 0$.

Raportată la axele triedrului fix $Oxyz$, se traduce prin sistemul de ecuații:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} - X - \lambda \frac{\partial f}{\partial x} &= 0; \quad m\ddot{y} - Y - \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0; \\ m\ddot{z} - Z - \lambda \frac{\partial f}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (12.10)$$

Eliminînd parametrul λ între ecuațiile (12.10), se obțin ecuațiile:

$$\frac{m\ddot{x} - X}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{m\ddot{y} - Y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{m\ddot{z} - Z}{\frac{\partial f}{\partial z}}, \quad (12.11)$$

care împreună cu (12.8) sînt suficiente pentru determinarea mișcării, adică pe $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

O dată mișcarea cunoscută din (12.11) se deduce λ și astfel și forța de legătură.

Observație

Rezolvarea unor asemenea probleme de dinamică este mult simplificată prin folosirea teoremelor generale.

Unele aplicații clasice

1. Punct material liber acționat de o forță constantă

a) Date: m , \vec{F}_0 și condițiile inițiale $M_0(\vec{r}_0)$ și \vec{v}_0 la $t = 0$.

Ecuația diferențială:

$$m\ddot{\vec{r}} - \vec{F}_0 = 0 \quad \text{sau} \quad \ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}_0}{m} = \vec{a}_0$$

adică problema s-a redus la mișcarea punctului cu accelerație constantă în direcție, sens și modul (v. Cinematica punctului).

Integrala generală: $\vec{r} = \vec{a}_0 \frac{t^2}{2} + \vec{C}_1 t + \vec{C}_2$.

Ecuația mișcării: $\vec{r} = \frac{\vec{a}_0}{2} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$.

b) Concluzii generale. Traiectoria este plană, în planul determinat de vectorii \vec{v}_0 și \vec{a}_0 din M_0 (fig. 12.A.2).

Traiectoria este o parabolă avînd axa paralelă cu \vec{a}_0 .

Caz particular: $\vec{F}_0 = m\vec{g}$, mișcarea punctului material în vid la suprafața Pămîntului.

2. Punct material liber acționat de o forță centrală

a) Date: m masa punctului material, O centrul fix, $\vec{F} = f\vec{\rho}$, $\vec{\rho}$, versorul cu originea în O care determină în orice moment direcția forței, f , o funcție scalară oarecare. Dacă f este negativă, forța \vec{F} este dirijată spre O , care este centru *atractiv*; dacă f este pozitivă, centrul O este *repulsiv*. Pentru a studia mișcarea mai trebuie date expresia funcției f și condițiile inițiale, adică \vec{r}_0 , \vec{v}_0 , α la $t = 0$ (fig. 12.A.3).

Ecuația diferențială a mișcării este:

$$m\ddot{\vec{r}} - f\vec{\rho} = 0. \quad (12.12)$$

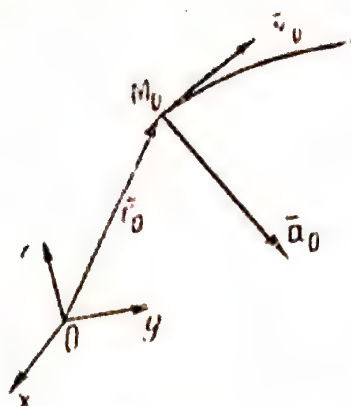


Fig. 12.A.2

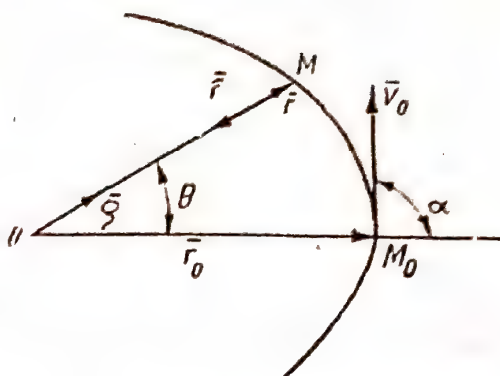


Fig. 12.A.3

b) *Concluzii generale.* Traectoria este plană, în planul determinat de vectorii \vec{r}_0 și \vec{v}_0 .

Viteza areolară a razei OM este constantă:

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{2} (\vec{r}_0 \times \vec{v}_0) = \frac{\bar{C}}{2}.$$

c) Problema este continuată în Cap. 13 (Forțe centrale).

3. *Punct material acționat de o forță elastică*

a) *Date:* m , masa punctului material; O , originea sistemului de referință cartezian fix $Oxyz$, $\vec{F} = -K\vec{r}$, forța elastică, $K > 0$, constanta elastică, în N/m , \vec{r} , vectorul de poziție al punctului mobil M , iar \vec{r}_0 , \vec{v}_0 și α sînt condițiile inițiale, la $t = 0$.

Ecuția diferențială este:

$$m\ddot{\vec{r}} + K\vec{r} = 0 \quad \text{sau} \quad \ddot{\vec{r}} + \omega^2\vec{r} = 0,$$

unde

$$\omega^2 = \frac{K}{m}.$$

Integrala generală este:

$$\vec{r} = \vec{C}_1 \cos \omega t + \vec{C}_2 \sin \omega t.$$

Ecuția mișcării:

$$\vec{r} = \vec{v}_0 \cos \omega t + \frac{\vec{r}_0}{\omega} \sin \omega t.$$

b) *Concluzii generale.* Deoarece $f = -K|r|$, forța elastică se poate exprima ca un caz particular al forței centrale $\vec{F} = f\vec{\rho}$. În consecință, ea este uneori denumită forță cvasi-centrală, poziția O de repaus fiind considerată ca și cum ar fi centrul atractiv.

Traectoria este o curbă plană cu centrul în O , de gen elipsă, iar viteza areolară a razei OM este constantă.

Mișcarea este periodică cu perioada $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$.

c) *Cazuri particulare:*

dacă $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$, $v_0 = \omega r_0 = r_0 \sqrt{\frac{K}{m}}$, traiectoria este un cerc de rază r ;

dacă $v_0 = 0$ traiectoria este o dreaptă Ox , iar ecuația mișcării oscilatorie armonică:

$$x = r_0 \cos \omega t;$$

dacă $v_0 \neq 0$, iar $\alpha = 0$ sau π , traiectoria este tot axa Ox , mișcarea tot oscilatorie armonică dar defazată față de prima și cu amplitudine diferită:

$$x = \sqrt{r_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \cos(\omega t \pm \varphi); \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{v_0}{r_0 \omega}.$$

d) *Studiul este continuat în Cap. 24 (Vibrații mecanice).*

12.B. APLICAȚII LA DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL

12.B.1. Un punct de masă m se mișcă sub acțiunea unei forțe constante \bar{F} , coliniară cu viteza inițială a punctului \bar{v}_0 . Să se determine timpul și drumul parcurs de punct pînă în momentul cînd are viteza v .

Rezolvare. Mișcarea va fi rectilie, cu condițiile inițiale: $t = 0$, $x = 0$, $\dot{x} = v_0$. Integrînd ecuația fundamentală a dinamicii $m\ddot{x} = F$ și ținînd seama de condițiile inițiale, rezultă:

$$x = \frac{F}{2m} t^2 + v_0 t; \quad v = \dot{x} = \frac{F}{m} t + v_0,$$

și datele cerute:

$$t = \frac{m}{F} (v - v_0); \quad x = \frac{m(v^2 - v_0^2)}{2F}.$$

12.B.2. Un ascensor de greutate G are o mișcare uniform variată cu accelerația a . Să se determine tensiunea T din cablul ascensorului, cînd acesta coboară.

Rezolvare. Scriind ecuația fundamentală a dinamicii pe direcția de mișcare a ascensorului se obține:

$$\frac{G}{g} a = G - T; \quad \left(m = \frac{G}{g}\right).$$

Deci:

$$T = G \left(1 - \frac{a}{g}\right).$$

12.B.3. Știind că un punct avînd masa $m = 2$ kg are o mișcare rectilie oscilatorie armonică după legea $x = A \cos \omega t$, unde $A = 12$ cm, iar $\omega = 14$ s⁻¹, să se determine forța F sub acțiunea căreia se mișcă punctul.

Rezolvare. Scriind ecuația de mișcare:

$$m\ddot{x} = F,$$

se obține:

$$\bar{F} = -m\omega^2 x \bar{i} = -F_0 \cos \omega t \bar{i},$$

unde:

$$F_0 = m\omega^2 A \approx 47 \text{ N}.$$

12.B.4. Un corp este lansat de la suprafața Pământului cu viteza inițială v_0 , pe verticală în sus. Să se studieze mișcarea corpului ținând seama de forța de atracție newtoniană a Pământului.

Rezolvare. Forța de atracție, alegând ca axă Ox verticala lui v_0 cu originea O în centrul Pământului, poate fi scrisă:

$$\bar{F} = -k \frac{mM}{x^2} \bar{i} = -\frac{mgR^2}{x^2} \bar{i}.$$

Din ecuația $m\ddot{x} = -\frac{mgR^2}{x^2}$, deoarece $\ddot{x} = v \frac{dv}{dx}$, rezultă:

$$v^2 = v_0^2 + 2gR \left(\frac{R}{x} - 1 \right).$$

În continuare, dacă $v_0^2 > 2gR$, se obține:

$$t = \frac{1}{v_0^2 - 2gR} \left[\sqrt{(v_0^2 - 2gR)x^2 + 2gR^2x - (Rv_0)^2} - \frac{gR^2}{v_0^2 - 2gR} \cdot \left(\arg \operatorname{ch} \frac{(v_0^2 - 2gR)x + gR^2}{gR^2} - \arg \operatorname{ch} \frac{v_0^2 - gR}{gR} \right) \right].$$

Corpul nu se va opri niciodată, părăsind sfera de atracție a Pământului. Valoarea acestei viteze este 11,18 km/s.

Dacă $v_0^2 < 2gR$, viteza se anulează într-un punct A_1 , avînd

$$x_1 = \frac{2gR^2}{2gR - v_0^2}.$$

Legea de mișcare va fi:

$$t = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{x_1}{2g}} \left[\sqrt{R(x_1 - R)} - \sqrt{x(x_1 - x)} + \frac{x_1}{2} \left(\arcsin \frac{2x - x_1}{x_1} - \arcsin \frac{2R - x_1}{x_1} \right) \right].$$

12.B.5. Un punct fix O atrage punctul A de masă m cu o forță $F = kx^n$, unde $x = OA$, iar k un coeficient constant. Punctul A pornește în momentul inițial de la $OA_0 = x_0$, cu viteza nulă. Să se studieze mișcarea punctului de la A_0 la O , determinîndu-se timpul după care ajunge și viteza cu care sosește mobilul în punctul O .

Rezolvare. Proiectînd pe axa Ox (dreapta OA_0) ecuația fundamentală a dinamicii, se obține:

$$m\ddot{x} = -kx^n,$$

și deoarece $\ddot{x} = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$, se obține:

$$\frac{m}{k} v dv = -x^n dx.$$

Integrând, se obține:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2k}{(n+1)m} (x_0^{n+1} - x^{n+1})}; \quad (n \neq -1).$$

Printr-o nouă integrare rezultă viteza și timpul în punctul O :

$$t_1 = \sqrt{\frac{(n+1)m}{2k}} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{x_0^{n+1} - x^{n+1}}}; \quad (n \neq -1)$$

$$v_1 = -\sqrt{\frac{2kx_0^{n+1}}{(n+1)m}}; \quad (n > -1).$$

12.B.6. Un punct material de masă m este aruncat cu viteza v_0 îndreptată sub un unghi α față de orizontală (fig. 12.B.6).

Să se studieze mișcarea punctului neglijând rezistența aerului. Se vor determina:

a) ecuațiile parametrice ale mișcării, traiectoria, înălțimea maximă, bătaia, viteza de cădere și unghiul de cădere;

b) domeniul punctelor care pot fi atinse de punctul lansat cu viteza v_0 îndreptată sub un unghi α variabil, neglijându-se rezistența aerului.

Rezolvare. a) Ecuația de mișcare este: $m\ddot{\vec{r}} = +m\vec{g}$, sau proiectând

$$m\ddot{x} = 0 \quad \text{și} \quad m\ddot{y} = -mg.$$

Ținând seama de condițiile inițiale $t = 0$; $x = 0$; $y = 0$, $\dot{x} = v_0 \cos \alpha$ și $\dot{y} = v_0 \sin \alpha$; integrând se obține:

$$x = v_0 t \cos \alpha;$$

$$x = v_0 t \cos \alpha;$$

$$y = -gt^2 + v_0 t \sin \alpha;$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin \alpha.$$

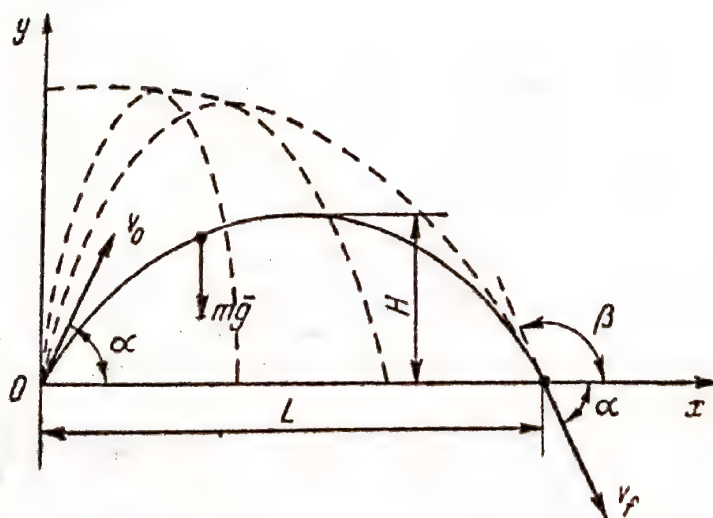


Fig. 12.B.6

Pentru ecuația traiectoriei se elimină parametrul t variabil și se obține parabola:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha),$$

pentru $y' = 0$, deci:

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g},$$

se obține înălțimea:

$$y_{\max} = H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Bătaia L se obține observând că $y = 0$ și deci:

$$t_2 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}; \text{ rezultă: } L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Se observă că timpul de ridicare este egal cu timpul de cădere.

Pentru viteza de cădere se introduce în x și y valoarea $t = t_2$ și se obține:

$$\dot{x} = v_0 \cos \alpha \text{ și } \dot{y} = -v_0 \sin \alpha,$$

deci: $v_{final} = v_0$

Unghiul de cădere este dat de relația $\tan \beta = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\tan \alpha$, deci:

$$\beta = 180^\circ - \alpha.$$

b) Domeniul cerut este determinat de înfășurătoarea familiei de traiectorii care au același v_0 și parametrul α variabil, care se obține eliminând parametrul variabil α între ecuația traiectoriei și a derivatei traiectoriei în raport cu parametrul variabil.

Se notează $\tan \alpha = \lambda$ și se poate scrie:

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + \lambda^2) + x\lambda.$$

$$y'(\lambda) = -\frac{gx^2}{v_0^2}\lambda + x.$$

Se elimină λ și se obține o parabolă care poartă numele de parabolă de siguranță:

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g}.$$

Această parabolă de siguranță cuprinde bătaia maximă și înălțimea maximă.

12.B.7. Să se determine viteza inițială v_0 și unghiul sub care trebuie lansată o minge din punctul O pentru a lovi normal la înălțimea $DC = h$ un perete vertical CD situat la distanța $OD = 2h$. Se neglijează rezistența aerului (fig. 12.B.7).

Rezolvare. Mingea va parcurge jumătate din parabolă între O și C . Din ecuația cunoscută se obține deci:

$$x_c = 2h = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}; \quad y_c = h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g};$$

de unde rezultă:

$$v_0 = 2\sqrt{hg}; \quad \alpha = 45^\circ.$$

12.B.8. Să se determine sub ce unghi α luat deasupra orizontalei trebuie aruncat din O un punct greu, astfel încât el să atingă dreapta (d) în timp minim (fig. 12.B.8).

Rezolvare. Ecuațiile parametrice ale traiectoriei sînt:

$$x = v_0 t \cos \alpha; \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2.$$

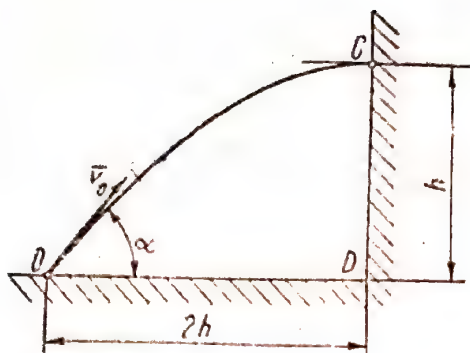


Fig. 12.B.7

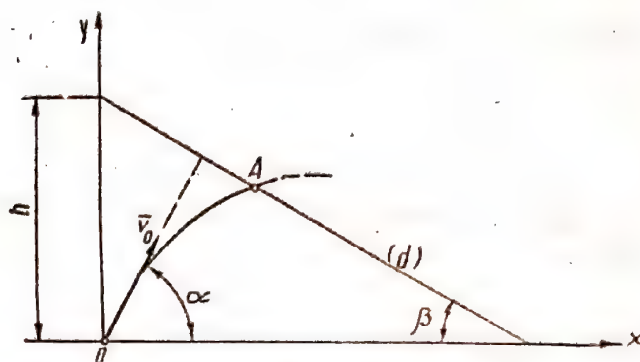


Fig. 12.B.8

Pentru a afla timpul după care punctul ajunge în A, se pune condiția ca traiectoria să întâlnească dreapta (d) care are ecuația:

$$y = h - x \operatorname{tg} \beta.$$

Se obține ecuația:

$$F(\alpha, t) \equiv gt^2 - 2v_0(\sin \alpha + \cos \alpha \operatorname{tg} \beta)t + 2h = 0$$

și condiția de minim:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} \equiv 2v_0(\cos \alpha - \sin \alpha \operatorname{tg} \beta)t = 0,$$

din care $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = 1$, sau $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Deci, punctul trebuie aruncat cu \bar{v}_0 perpendiculară pe dreapta (d).

12.B.9. Un punct material greu de masă m este aruncat cu viteza inițială \bar{v}_0 sub unghiul α în sus față de orizontală. Să se studieze mișcarea punctului, considerînd rezistența aerului proporțională cu viteza $\bar{R} = -h\bar{v}$.

Rezolvare. Ecuația mișcării devine:

$$\ddot{\bar{r}} + \frac{h}{m} \dot{\bar{r}} = \bar{g}.$$

Integrînd (se observă că $\bar{r}_0 = \frac{m\bar{g}}{h}t$ este o soluție particulară) se obține:

$$\bar{r} = \frac{m}{h} \left(\bar{v}_0 - \frac{m\bar{g}}{h} \right) \left(1 - e^{-\frac{h}{m}t} \right) + \frac{m\bar{g}}{h} t;$$

$$\bar{v} = \left(\bar{v}_0 - \frac{m\bar{g}}{h} \right) e^{-\frac{h}{m}t} + \frac{m\bar{g}}{h}.$$

Traectoria, care este o curbă verticală, are o asimptotă verticală:

$$x = \frac{mv_0 \cos \alpha}{h}.$$

Mișcarea tinde, pentru $t \rightarrow \infty$, spre o mișcare uniformă rectilinie cu viteza limită (verticală descendentă)

$$v_1 = \frac{mg}{h}.$$

12.B.10. Un punct material greu A de masă m este aruncat pe verticală în sus cu viteza v_0 . Știind că rezistența aerului este proporțională cu pătratul vitezei ($R = hv^2$), să se studieze mișcarea acestui punct.

Rezolvare: În mișcarea ascendentă asupra punctului acționează greutatea proprie mg și rezistența aerului dirijate în jos. Alegînd drept sistem de referință verticala punctului de lansare cu originea pe sol și reprezentînd forțele (fig. 12.B.10, a), ecuația de mișcare va fi:

$$m\ddot{x} = -mg - hv^2.$$

Folosim notația:

$$h = \frac{mg}{v_1^2}, \quad (a)$$

v_1 fiind o viteză constantă a cărei semnificație va rezulta ulterior. Ecuația (a) se mai poate scrie:

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - \frac{mg}{v_1^2} v^2. \quad (b)$$

Separînd variabilele și integrînd, se obține:

$$t = \int \frac{dv}{g \left(1 + \frac{v^2}{v_1^2} \right)} + C_1 = \frac{v_1}{g} \arctg \frac{v}{v_1} + C_1.$$

Condițiile inițiale sînt:

$$t = 0; \quad x = 0; \quad \dot{x} = v = v_0 \quad (c)$$

și rezultă constanta de integrare:

$$C_1 = \frac{v_1}{g} \arctg \frac{v_0}{v_1},$$

astfel că se obține:

$$t = \frac{v_1}{g} \left(\arctg \frac{v_0}{v_1} - \arctg \frac{v}{v_1} \right). \quad (d)$$

Explicitînd expresia vitezei din această relație, se obține:

$$v = \frac{dx}{dt} = v_1 \frac{v_0 - v_1 \operatorname{tg} \frac{gt}{v_1}}{v_1 + v_0 \operatorname{tg} \frac{gt}{v_1}}. \quad (e)$$

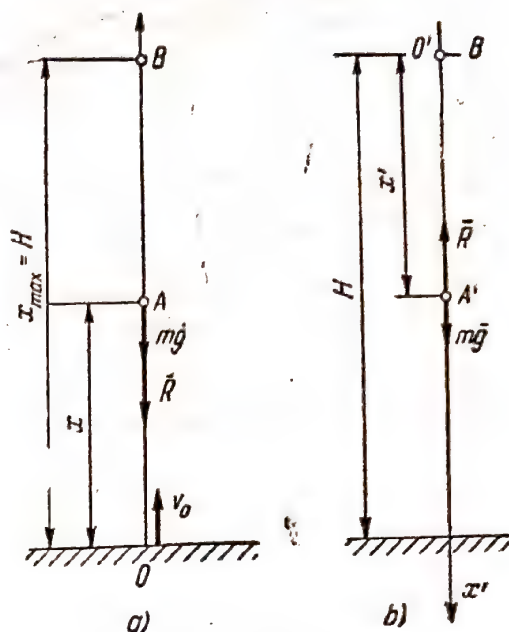


Fig. 12.B.10

Integrând se obține legea de mișcare :

$$x = \frac{v_1^2}{g} \ln \left[\cos \frac{gt}{v_1} + \frac{v_0}{v_1} \sin \frac{gt}{v_1} \right], \quad (f)$$

condițiile inițiale fiind cele menționate.

Pornind de la ecuația mișcării (a) se poate stabili legătura dintre viteza v și abscisa x a punctului :

$$m\ddot{x} = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = mv \frac{dv}{dx}.$$

Integrând și avînd în vedere condițiile inițiale (c) se obține :

$$x = \frac{v_1^2}{2g} \ln \frac{v_0^2 + v_1^2}{v^2 + v_1^2} \text{ și } v = \sqrt{(v_0^2 + v_1^2) e^{-\frac{2gx}{v_1^2}} - v_1^2}.$$

În punctul B , de înălțime maximă, $v = 0$ și rezultă :

$$t_B = \frac{v_1}{g} \operatorname{arc\,tg} \frac{v_0}{v_1} \text{ și } x_{\max} \equiv H = \frac{v_1^2}{2g} \ln \left(1 + \frac{v_0^2}{v_1^2} \right). \quad (g)$$

În mișcarea descendentă punctul începe să coboare pornind din B pe verticală în jos. Pentru simplificare este utilă o schimbare de axă și se alege originea în $B = O'$, sensul axei $O'x'$ luîndu-se pozitiv în jos. Ecuația de mișcare este :

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2 = mg - \frac{mgv^2}{v_1^2}.$$

Separînd variabilele se obține :

$$dt = \frac{v_1^2}{g} \frac{dv}{v_1^2 - v^2},$$

și :

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{v_1}{2g} \ln \frac{v_1 + v}{v_1 - v} + C_2; \text{ pentru } v < v_1; \\ t &= \frac{v_1}{2g} \ln \frac{v_1 + v}{v - v_1} - C_2; \text{ pentru } v > v_1. \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

Pentru a considera problema într-o situație mai generală, se va presupune că mobilul are o viteză inițială v'_0 dirijată în jos.

Deci : $t = 0$; $x' = 0$; $v = v'_0$.

Pentru determinarea constantei C_2 se au în vedere două posibilități : $v'_0 < v_1$ și $v'_0 > v_1$.

Se obțin valorile :

$$C_2' = - \frac{v_1}{2g} \ln \frac{v_1 + v'_0}{v_1 - v'_0}; \text{ pentru } v'_0 < v_1;$$

$$C_2'' = - \frac{v_1}{2g} \ln \frac{v'_0 + v_1}{v' - v_1}; \text{ pentru } v'_0 > v_1,$$

de unde introducând în expresia lui $t(h)$ se poate scrie:

$$\text{și } \left. \begin{aligned} t &= \frac{v_1}{2g} \ln \frac{(v_1 + v)(v_1 - v'_0)}{(v_1 - v_1)(v_1 + v'_0)}; \text{ pentru } v'_0 < v < v_1; \\ t &= \frac{v_1}{2g} \ln \frac{(v_1 + v)(v'_0 - v_1)}{(v - v_1)(v'_0 + v_1)}; \text{ pentru } v'_0 > v_1 > v. \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

Pentru cazul particular considerat $v'_0 = 0$, aceste relații devin:

$$t = \frac{v_1}{2g} \ln \frac{v_1 + v}{v_1 - v} = \frac{v_1}{g} \operatorname{argth} \frac{v}{v_1}. \quad (j)$$

Expresia vitezei se obține explicitând relațiile (i) și (j):

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{dx'}{dt} = v_1 \frac{(v_1 + v'_0) e^{\frac{gt}{v_1}} - (v_1 - v'_0) e^{-\frac{gt}{v_1}}}{(v_1 + v'_0) + (v_1 - v'_0) e^{-\frac{gt}{v_1}}}; \text{ pentru } v'_0 < v_1; \text{ și } v < v_1; \\ v &= \frac{dx'}{dt} = v_1 \frac{(v'_0 + v_1) e^{\frac{gt}{v_1}} + (v'_0 - v_1) e^{-\frac{gt}{v_1}}}{(v'_0 + v_1) e^{\frac{gt}{v_1}} - (v'_0 - v_1) e^{-\frac{gt}{v_1}}}; \text{ pentru } v'_0 > v_1; \text{ și } v > v_1; \\ v &= \frac{dx'}{dt} = v_1 \frac{e^{\frac{gt}{v_1}} - e^{-\frac{gt}{v_1}}}{e^{\frac{gt}{v_1}} + e^{-\frac{gt}{v_1}}} = v_1 \operatorname{th} \frac{gt}{v_1}; \text{ pentru } v'_0 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

Legea de mișcare se obține integrând aceste relații:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{v_1^2}{g} \ln \frac{(v_1 + v'_0) e^{\frac{gt}{v_1}} + (v_1 - v'_0) e^{-\frac{gt}{v_1}}}{2v_1}; \text{ pentru } v'_0 > v_1; \\ x' &= \frac{v_1^2}{g} \ln \frac{(v'_0 + v_1) e^{\frac{gt}{v_1}} - (v'_0 - v_1) e^{-\frac{gt}{v_1}}}{2v_1}; \text{ pentru } v'_0 < v_1; \\ x' &= \frac{v_1^2}{g} \ln \frac{e^{\frac{gt}{v_1}} + e^{-\frac{gt}{v_1}}}{2} = \frac{v_1^2}{g} \ln \left(\operatorname{ch} \frac{gt}{v_1} \right); \text{ pentru } v'_0 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (l)$$

Pentru a determina și în cazul mișcării descendente relația $x' = x'(v)$, se integrează ecuația diferențială de mișcare observând că:

$$\frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{dx'},$$

și se obține:

$$x' = \frac{v_1^2}{2g} \ln \frac{v_1^2 - v_0'^2}{v_1^2 - v^2}; \quad v = \sqrt{v_1^2 - (v_1^2 - v_0'^2) e^{-\frac{2gx'}{v_1^2}}}; \quad \text{pentru } v_0' < v_1;$$

$$x' = \frac{v_1^2}{2g} \ln \frac{v_0'^2 - v_1^2}{v^2 - v_1^2}; \quad v = \sqrt{v_1^2 + (v_0'^2 - v_1^2) e^{-\frac{2gx'}{v_1^2}}}; \quad \text{pentru } v_0' > v_1;$$

$$x' = \frac{v_1^2}{2g} \ln \frac{v_1^2}{v_1^2 - v^2}; \quad v = v_1 \sqrt{1 - e^{-\frac{2gx'}{v_1^2}}}; \quad \text{pentru } v_0' = 0.$$

Analizând expresiile obținute pentru viteze și legea mișcării se pot trage următoarele concluzii. Dacă viteza inițială $v_0' < v_1$ viteza punctului crește și pentru $t \rightarrow \infty$ atinge valoarea v_1 . Dacă viteza inițială $v_0' > v_1$ viteza punctului scade și pentru $t \rightarrow \infty$ atinge valoarea v_1 .

Independent de condițiile inițiale ale problemei, există o viteză limită

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v = v_1 = \sqrt{\frac{mg}{h}}$$

astfel că mișcarea descendentă tinde către o mișcare uniformă cu viteza

$$v_1 = \sqrt{\frac{mg}{h}}.$$

Se poate observa că pentru viteza limită rezistența aerului este egală cu greutatea punctului:

$$R = hv_1^2 = mg.$$

12.B.11. Un punct material de masă m cade pe verticală fără viteză inițială. Știind că punctul întâmpină o rezistență a aerului dată de $R = mg(2v_1^2 - v^2)v^2/v_1^4$, unde $v_1 = \text{const.}$ iar v este viteza de cădere, să se determine legea de mișcare.

R e z o l v a r e. Alegînd axa Ox verticală în jos, cu originea în punctul de plecare, ecuația mișcării este:

$$m\dot{v} = mg - \frac{mg}{v_1^4} (2v_1^2 - v^2)v^2,$$

adică:

$$\frac{dv}{(v_1^2 - v^2)^2} = \frac{gdt}{v_1^4}.$$

Integrînd după amplificare cu v , se obține:

$$x = \frac{v_1^2 v^2}{2g(v_1^2 - v^2)} \quad \text{sau} \quad v = v_1 \sqrt{\frac{x}{x + \frac{v_1^2}{2g}}}.$$

Viteza tinde deci asimptotic către v_1 .

Relația timp-viteză este:

$$t = \frac{v_1^2 v}{2g(v_1^2 - v^2)} + \frac{v_1}{4g} \ln \frac{v_1 + v}{v_1 - v}.$$

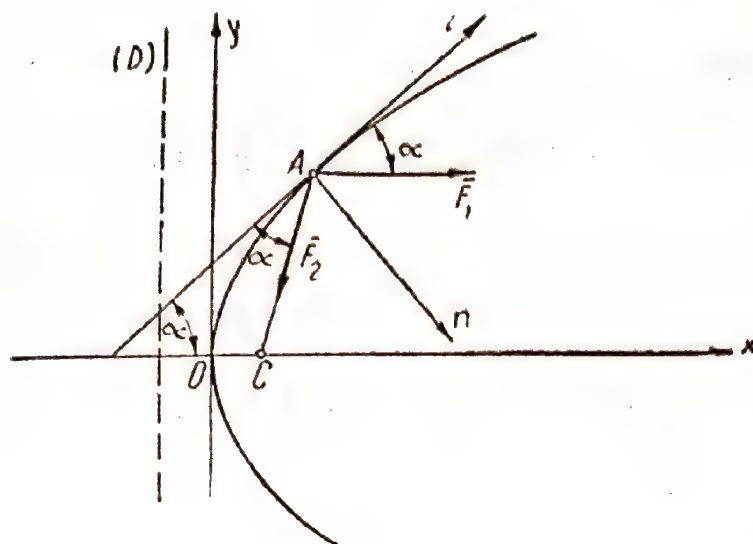


Fig. 12.B.12

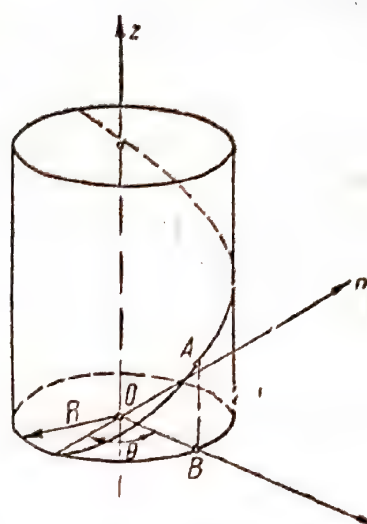


Fig. 12.B.13

12.B.12. Un punct A de masă m , acționat de două forțe, se mișcă uniform cu viteza v_0 pe parabola $y^2 = 2px$. Forța \vec{F}_1 este paralelă cu axa parabolei, iar \vec{F}_2 este dirijată spre focarul C al parabolei. Să se determine mărimile acestor forțe (fig. 12.B.12).

Rezolvare. Traiectoria și legea de mișcare fiind cunoscute, se întrebuintează comod coordonatele intrinseci:

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2; \text{ devine: } m\vec{s} = F_1 \cos \alpha - F_2 \cos \alpha,$$

$$m \frac{\dot{s}^2}{R} = F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \alpha.$$

Cum $\dot{s} = v_0 = \text{constant}$, $\ddot{s} = 0$, iar $R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}$, se obține:

$$F_1 = F_2 = \frac{mv_0^2}{4} \frac{1}{x + \frac{p}{2}}.$$

12.B.13. Un punct A de masă m acționat de o forță, descrie elicea $r = R$, $z = R\theta \operatorname{tg} \alpha$ cu viteza constantă v_0 . Să se determine forța \vec{F} care acționează asupra punctului (fig. 12.B.13).

Rezolvare. Se proiectează ecuația dinamicii în coordonate cilindrice:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r; \quad -mR\dot{\theta}^2 = F_r;$$

$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = F_\theta; \quad mR\ddot{\theta} = F_\theta;$$

$$m\ddot{z} = F_z; \quad mR\ddot{\theta} \operatorname{tg} \alpha = F_z.$$

Din expresia vitezei,

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2} = \frac{R\dot{\theta}}{\cos \alpha} = v_0.$$

rezultă θ și deci:

$$F_p = -\frac{mv_0^2 \cos^2 \alpha}{R}; \quad F_y = 0; \quad F_z = 0.$$

Forța este orientată normal pe suprafața cilindrică și dirijată spre interior.

12.B.14. Un corp de masă m este atârnat de un arc cu constanta elastică k . Să se arate că mișcarea este aceeași dacă corpul se deplasează pe un plan orizontal fără frecare, iar arcul e așezat orizontal. Se consideră o deplasare inițială x_0 .

Rezolvare. În cele două cazuri, schemele forțelor sînt arătate în figura 12.B.14. În ambele cazuri ecuația de mișcare este:

$$m\ddot{x} + kx = 0.$$

Pulsatia fiind $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, legea de mișcare obținută prin integrare este:

$$x = x_0 \cos \omega t.$$

12.B.15. Un punct A de masă m este acționat de o forță constantă \vec{F}_0 și de o forță elastică, centrul atractiv C și constanta elastică k fiind cunoscute. Să se determine poziția de echilibru O a punctului și să se studieze mișcarea în cazul unor condiții inițiale oarecare, \vec{r}_0, \vec{v}_0 , (fig. 12.B.15).

Rezolvare. Forța elastică este $\vec{F} = -k\vec{CO}$.

La echilibru $\vec{F} = -\vec{F}_0$, deci: $\vec{CO} = \frac{\vec{F}_0}{k}$.

În sistemul $Oxyz$ ecuația de mișcare este:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_0 + \vec{F} \text{ sau } m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r},$$

deoarece $\vec{F}_0 - k\vec{CO} = 0$. Cu notația $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ devine

$$\ddot{\vec{r}} + \omega^2 \vec{r} = 0.$$

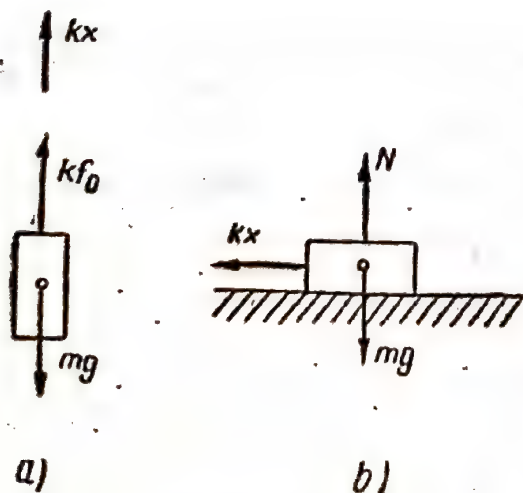


Fig. 12.B.14

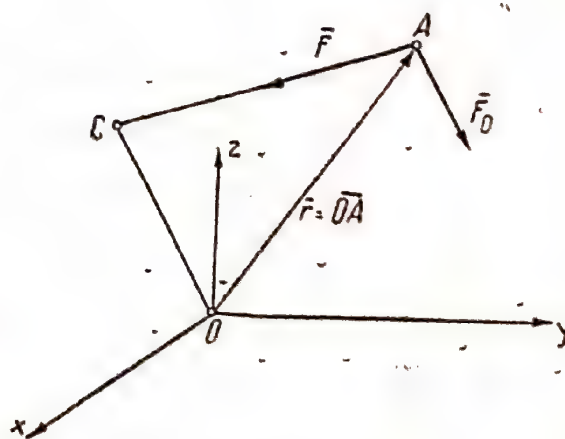


Fig. 12.B.15

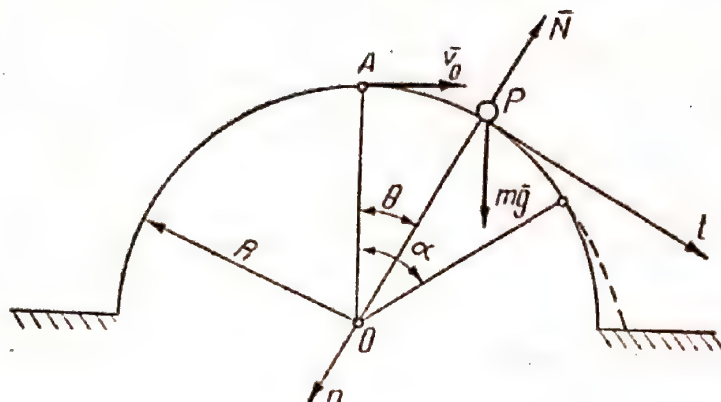


Fig. 12.B.16

Pentru condițiile inițiale $t = 0$, $\bar{r} = \bar{r}_0$, $\dot{\bar{r}} = \bar{v}_0$ se obține soluția :

$$\bar{r} = \bar{r}_0 \cos \omega t + \frac{\bar{v}_0}{\omega} \sin \omega t.$$

12.B.16. Pe exteriorul unei emisfere lucioase de rază R se lansează din punctul cel mai înalt A , un punct material greu P de masă m cu viteza \bar{v}_0 orizontală. Să se studieze mișcarea punctului (fig. 12.B.16).

Rezolvare. Ecuația fundamentală a dinamicii, scrisă în coordonate $t\theta n$ este :

$$m\ddot{\theta} = mg \sin \theta; \quad m \frac{v^2}{R} = mg \cos \theta - N.$$

Din prima, amplificând cu $d\theta$ și integrând ($t = 0$, $\theta = 0$, $v = v_0$), se obține :

$$v^2 = 2gR(1 - \cos \theta) + v_0^2,$$

și reacțiunea :

$$N = mg(3 \cos \theta - 2) - \frac{mv_0^2}{R}.$$

Punctul părăsește sfera când $\theta = \alpha$, $N = 0$:

$$\cos \alpha = \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}, \text{ cu condiția } v_0^2 \leq gR, \text{ (} \cos \alpha \leq 1 \text{)}$$

FORȚE CENTRALE

13.A. PREZENTARE TEORETICĂ

Se definește forță centrală o forță al cărei suport trece printr-un punct fix O denumit pol. Expresia ei este:

$$\vec{F} = F\vec{\rho}, \quad (13.1)$$

unde F este scalarul forței centrale care acționează asupra punctului M (fig. 13.A.1) și $\vec{\rho}$ versorul direcției OM . Dacă $F > 0$, forța este repulsivă și dacă $F < 0$ forța este atractivă.

Dacă un punct material se mișcă sub acțiunea unei forțe centrale, traiectoria punctului este plană și mișcarea se face cu viteză areolară constantă:

$$\Omega = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \text{const.} \quad (13.2)$$

Mișcarea punctului se poate studia:

a) cu ajutorul ecuației fundamentale a dinamicii $m\vec{a} = \vec{F}$, ale cărei proiecții în coordonate polare (fig. 13.A.1) sînt:

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= F_{\rho} = F; \\ m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) &= \frac{m}{r} \cdot \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = F_{\theta} = 0; \end{aligned} \quad (13.3)$$

b) cu ajutorul ecuației lui Binet:

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = -\frac{Fr^2}{mc^2}, \quad (13.4)$$

în care:

$r; \theta$ sînt coordonatele polare ale punctului;

m — masa punctului;

$c = r^2\dot{\theta} = rv_n = r_0v_0 \sin \kappa (\vec{r}_0, \vec{v}_0)$ — constanta ariilor (dublul vitezei areolare $c = 2\Omega$).

Punînd $\frac{1}{r} = u$, ecuația lui Binet poate fi scrisă sub forma:

$$mcu^2 \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right) = -F, \quad (13.6)$$

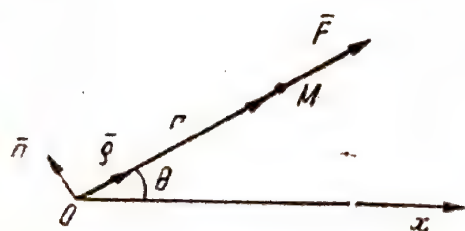


Fig. 13.A.1

iar viteza $v = \sqrt{v_p^2 + v_n^2}$ a punctului material.

$$v = c \sqrt{\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2}. \quad (13.7)$$

Cu ajutorul ecuației lui Binet se poate determina forța F , dacă se cunoaște traiectoria $r = f(\theta)$, iar dacă se cunoaște F , prin integrare se determină ecuația traiectoriei $r = r(\theta, C_1, C_2)$, constantele de integrare determinându-se cu ajutorul condițiilor inițiale care se pun în ecuația precedentă și în ecuația obținută prin derivarea ei în raport cu θ sau cu timpul t .

Ecuațiile parametrice ale traiectoriei $r = r(t)$ și $\theta = \theta(t)$ se obțin din prima ecuație de proiecție (13.3) și ecuația (13.5).

În cazul forței de atracție newtoniană

$$F = -f \frac{mM}{r^2}, \text{ unde:}$$

$f = 6,664 \times 10^{-8}$ CGS este constanta atracției universale;

m, M — masele corpurilor care se atrag;

r — distanța dintre cele două corpuri.

Traectoria este o conică a cărei ecuație în coordonate polare, raportată la focarul O în care se găsește corpul de masă M , este:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}, \quad (13.8)$$

unde:

$$p = \frac{c^2}{fM}; \quad e = 1 + \frac{r_0 v_0^2 \sin \alpha_0 (r_0 v_0^2 - 2fM)}{f^2 M^2}, \quad (13.9)$$

α_0 fiind unghiul dintre raza vectorie $\vec{r}_0 = \overline{OM}_0$ și viteza \vec{v}_0 din momentul inițial (fig. 13.A.2).

Dacă excentricitatea

$e < 1, v_0^2 < \frac{2fM}{r_0}$, traiectoria este o elipsă;

$e = 1, v_0^2 = \frac{2fM}{r_0}$, traiectoria este o parabolă; (13.10)

$e > 1, v_0^2 > \frac{2fM}{r_0}$, traiectoria este o hiperbolă.

În cazul sateliților Pământului:

$$fM = gR^2, \quad (13.11)$$

unde M este masa, iar $R = 6370$ km, raza Pământului.

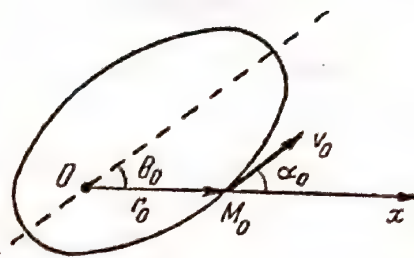


Fig. 13.A.2

13.B. APLICAȚII LA FORȚE CENTRALE

13.B.1. Un punct material de masă m este atras de un centru fix cu forța $F = \frac{10m}{r^3}$, unde r este distanța punctului la acest centru. În momentul inițial unghiul polar $\theta_0 = 0$, $r_0 = 1$ și $v_0 = 2$, iar unghiul α_0 dintre viteza inițială și raza vectoare a punctului este de 45° .

Să se afle ecuațiile parametrice ale traiectoriei punctului în coordonate polare și să se determine ecuația implicită a traiectoriei lui.

Rezolvare. Pentru obținerea ecuațiilor parametrice ale traiectoriei se folosesc relațiile:

$$ma_p = F_p; \quad r^2\dot{\theta} = c,$$

unde:

$$F_p = -\frac{10m}{r^3} \text{ și } c = r_0 v_0 \sin \alpha_0 = 1 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}, \text{ adică:}$$

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{10m}{r^3}; \quad r^2\dot{\theta} = \sqrt{2}. \quad (a)$$

Înlocuind pe $\dot{\theta}$ din a doua relație în prima, rezultă:

$$\ddot{r} = -\frac{8}{r^3}. \quad (b)$$

Multiplicând această ecuație cu \dot{r} și integrând, se deduce succesiv:

$$\begin{aligned} \dot{r}\ddot{r} &= -\frac{8}{r^3} \dot{r}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{r}^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{r^2} \right); \\ \frac{\dot{r}^2}{2} &= \frac{4}{r^2} + c_1. \end{aligned}$$

Ținând seama de condițiile inițiale $t = 0$, $\dot{r}_0 = (v_p)_0 = v_0 \cos \alpha_0 = \sqrt{2}$, se deduce $c_1 = -3$, de unde

$$\dot{r}^2 = \frac{8}{r^2} - 6 \quad \text{sau} \quad \frac{dr}{d\theta} = \frac{8 - 6r^2}{r}.$$

Separând variabilele și integrând încă odată, rezultă:

$$\frac{r \, dr}{\sqrt{8 - 6r^2}} = dt; \quad t = \int \frac{r \, dr}{\sqrt{8 - 6r^2}} + c_2 = -\frac{1}{6} \sqrt{8 - 6r^2} + c_2.$$

Constanta de integrare c_2 se determină din condițiile inițiale $t = 0$, $r_0 = 1$, de unde rezultă $c_2 = \frac{\sqrt{2}}{6}$, iar după înlocuirea acesteia în expresia lui t , se obține prima ecuație parametrică a mișcării $r = r(t)$:

$$t = -\frac{1}{6} \sqrt{8 - 6r^2} + \frac{\sqrt{2}}{6},$$

sau

$$r = \sqrt{1 + 2\sqrt{2}t - 6t^2}. \quad (c)$$

Reluând a doua ecuație din (a) și ținând seama de (c), se obține:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}t - 6t^2}.$$

Separând variabilele și integrând, se obține:

$$d\theta = \frac{\sqrt{2} dt}{1 + 2\sqrt{2}t - 6t^2}; \quad \theta = \int \frac{\sqrt{2} dt}{1 + 2\sqrt{2}t - 6t^2} + c_3.$$

Pentru integrare se descompune fracția în factori; rădăcinile ecuației $1 + 2\sqrt{2}t - 6t^2 = 0$ sînt: $t_1 = -\frac{\sqrt{2}}{6}$ și $t_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ și se obține:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}t - 6t^2} &= \frac{\sqrt{2}}{-6\left(t + \frac{\sqrt{2}}{6}\right)\left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{6\left(t + \frac{\sqrt{2}}{6}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - t\right)} = \\ &= \frac{A}{6} + \frac{B}{t + \frac{\sqrt{2}}{6}} + \frac{C}{\frac{\sqrt{2}}{2} - t}. \end{aligned}$$

Făcînd calculele, rezultă:

$$A = 0; \quad B = \frac{1}{4}; \quad C = \frac{1}{4};$$

$$\theta = \int \frac{\frac{1}{4} dt}{t + \frac{\sqrt{2}}{6}} + \int \frac{\frac{1}{4} dt}{\frac{\sqrt{2}}{2} - t} + c_3 = \frac{1}{4} \ln(6t + \sqrt{2}) - \frac{1}{4} \ln(\sqrt{2} - 2t) + c_3;$$

$$\theta = \frac{1}{4} \ln \frac{6t + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 2t} + c_3.$$

Constanta de integrare c_3 se determină din condițiile inițiale $t = 0$, $\theta = 0$; rezultă: $c_3 = 0$, iar după înlocuirea acesteia în relația precedentă se obține cea de a doua ecuație parametrică $\theta = \theta(t)$:

$$\theta = \frac{1}{4} \ln \frac{6t + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 2t} = \frac{1}{4} \ln \frac{1 + 3\sqrt{2}t}{1 - \sqrt{2}t}. \quad (d)$$

Pentru aflarea ecuației implicite a traiectoriei în coordonate polare, se scrie ecuația lui Binet. Dacă se notează $\frac{1}{r} = u$, se înlocuiește scalarul forței F cu expresia $F = -\frac{10m}{r^3} = -10mu^3$ și $c = \sqrt{2}$, se obține ecuația diferențială a traiectoriei în variabilele u și θ sub forma:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} - 4u = 0. \quad (e)$$

Ecuația caracteristică $\lambda^2 - 4 = 0$ are rădăcinile $\lambda_{1,2} = \pm 2$. Integrînd, se obține soluția generală:

$$\frac{1}{r} = c_1 e^{2\theta} + c_2 e^{-2\theta}. \quad (f)$$

Pentru determinarea constantelor c_1 și c_2 se face derivata soluției generale (f) în raport cu θ :

$$-\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = 2c_1 e^{2\theta} - 2c_2 e^{-2\theta}. \quad (g)$$

Ținând seama de condițiile inițiale $t = 0$, $\theta_0 = 0$, $r_0 = 1$, $\left(\frac{dr}{d\theta}\right) = \frac{r_0}{\tan \alpha_0} = \frac{1}{1} = 1$, se deduc din (f) și (g) valorile constantelor c_1 și c_2 :

$$c_1 = \frac{1}{4}; \quad c_2 = \frac{3}{4},$$

iar după înlocuirea lor în (f), va rezulta ecuația traiectoriei în variabilele $\frac{1}{r}$ și θ :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{4} e^{2\theta} + \frac{3}{4} e^{-2\theta};$$

sau încă

$$r(e^{2\theta} + 3e^{-2\theta}) = 4. \quad (h)$$

13.B.2. Un punct material M de masă m , descrie o circumferință de rază a , sub acțiunea unei forțe centrale, polul O al forței fiind situat pe arc. Cunoscând constanta ariilor c , să se determine scalarul F al forței și viteza v a punctului material în funcție de poziția acestuia.

Rezolvare. Din triunghiul OMA (fig. 13.B.2), rezultă ecuația cercului în coordonate polare:

$$r = 2a \sin \theta. \quad (a)$$

Traectoria fiind cunoscută, se scrie ecuația lui Binet (13.6). Deoarece:

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{2a \sin \theta}; \quad \frac{du}{d\theta} = \frac{-\cos \theta}{2a \sin^2 \theta}; \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{\sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta}{2a \sin^3 \theta},$$

rezultă:

$$F = -mc^2 u^2 \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right) = -\frac{mc^2}{r^2} \left(\frac{\sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta}{2a \sin^3 \theta} + \frac{1}{2a \sin \theta} \right) = -\frac{mc^2}{r^2} \frac{2}{2a \sin^3 \theta}.$$

Înlocuind $\sin \theta = \frac{r}{2a}$ se deduce pentru F expresia:

$$F = -\frac{8m c^2 a^2}{r^5}. \quad (b)$$

Forța centrală este deci o forță atractivă invers proporțională cu puterea a cincea a razei vectoare.

Expresia vitezei se obține din formula (13.7):

$$\begin{aligned} v &= c \sqrt{\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2} = \\ &= c \sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{4a^2 \sin^4 \theta} + \frac{1}{4a^2 \sin^2 \theta}} = \frac{c}{2a^2 \sin^3 \theta}. \end{aligned}$$

Înlocuind $\sin \theta = \frac{r}{2a}$, rezultă pentru v expresia:

$$v = \frac{2ac}{r^3}. \quad (c)$$

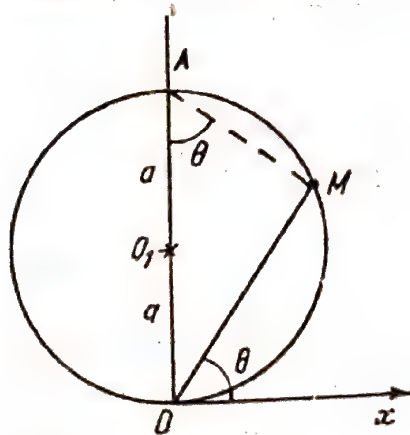


Fig. 13.B.2

DINAMICA MIȘCĂRII RELATIVE A PUNCTULUI MATERIAL. REPAUSUL RELATIV

14.A. PREZENTARE TEORETICĂ

14.A.1. Ecuația fundamentală a mișcării relative

Principiile mecanicii newtoniene sînt enunțate pe conceptele spațiului absolut și al reperului fix. În consecință:

$$m\vec{a}_a - \vec{F} = 0 \quad (14.1)$$

este ecuația fundamentală a mișcării *absolute*. Pentru studiul unor mișcări mecanice, cum sînt mișcările planetelor sistemului solar în raport cu reperul heliocentric, această ecuație a dat rezultate foarte bune.

Studierea unor mișcări mecanice la suprafața pămîntului în raport cu Pămîntul ca reper a dus la rezultate bune, în general, însă în unele probleme rezultatele nu au fost satisfăcătoare. Concluzia: ecuația (14.1) nu poate fi aplicată în raport cu orice fel de reper.

Știind că mișcarea studiată și observată din reperul mobil este o mișcare relativă și nu absolută, primul termen al ecuației trebuie să fie $m\vec{a}_r$, și nu $m\vec{a}_a$. Se ajunge la ecuația:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} - m\vec{a}_1 - m\vec{a}_2, \quad (14.2)$$

în care se notează cu:

$$\vec{F}_1 = -m\vec{a}_1 \text{ denumită forță de transport;}$$

$$\vec{F}_2 = -m\vec{a}_2 \text{ denumită forță Coriolis,}$$

rezultă:

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (14.3)$$

care este *ecuația fundamentală a mișcării relative a punctului material*.

În concluzie, ori de cîte ori se studiază mișcarea mecanică în raport cu un reper mobil, pentru ca rezultatul studiului să corespundă cu experimentul, este necesar să se introducă în ecuația fundamentală și forțele complementare $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$, pe lîngă forțele date și de legătură, efectiv aplicate punctului material.

O întrebare importantă: Cum trebuie să fie mișcarea reperului mobil $Oxyz$ în raport cu $O'x'y'z'$, presupus fix, pentru ca ecuația fundamentală a mișcării relative să fie identică cu ecuația fundamentală (14.1), așa cum a stabilit-o Newton?

¹ Forțele complementare mai primesc și alte denumiri: \vec{F}_1 (forța centrifugă propriu-zisă), iar \vec{F}_2 (forța centrifugă compusă).

Condițiile necesare și suficiente deduse din anularea sumei $\vec{F}_i + \vec{F}_e$, respectiv a expresiei

$$\vec{a}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r = 0$$

sînt :

$$\vec{\omega} = 0 \text{ și } \vec{a}_0 = 0,$$

adică reperul mobil trebuie să aibă, în raport cu reperul presupus fix, o *mișcare de translație rectilinie și uniformă, adică să fie un reper inerțial*.

Însă, reper fix nu există în natură, în consecință calitatea unui reper de a fi inerțial se poate verifica numai experimental. Astfel, dacă studiul unei mișcări mecanice, în raport cu un anumit reper, cu ajutorul ecuației fundamentale ($m\vec{a} - \vec{F} = 0$) ar da exact aceleași rezultate ca și experimental, atunci reperul considerat ar fi un reper perfect inerțial. Cum în general nu există decît o corespondență aproximativă între rezultatele teoriei și ale experiențelor, se consideră că reperele sînt de un grad cu atît mai mare de *inerțialitate*, cu cît aproximația este mai bună. Pînă acum, *reperul heliocentric* este cel care are cel mai mare grad de *inerțialitate*. Pentru anumite mișcări mecanice pentru care sînt satisfăcătoare aproximații de ordinul celei de-a treia cifre semnificative și Pămîntul poate fi acceptat ca un reper *inerțial*.

14.A.2. Principiul relativității al mecanicii newtoniene

Toate sistemele de referință în mișcare de translație rectilinie și uniformă în raport cu un sistem inerțial sînt de asemenea sisteme inerțiale.

Legile mecanicii newtoniene sînt identice în toate sistemele inerțiale, deoarece toate aceste sisteme sînt *echivalente*.

Galileo Galilei a enunțat principiul relativității astfel: *nici o experiență mecanică efectuată într-un sistem inerțial nu poate să pună în evidență mișcarea sistemului, după cum nici o experiență mecanică nu poate fi influențată de mișcarea sistemului inerțial.*

14.A.3. Repausul relativ

Dacă punctul material trebuie să se găsească în repaus relativ față de reperul mobil, \vec{v}_r , trebuie să fie nul și în consecință, $\vec{a}_r = 0$ și $\vec{a}_e = 0$. Din ecuația (14.3) a mișcării relative nu mai rămîne decît condiția *necesară și suficientă a repausului relativ* :

$$\vec{F} + \vec{F}_t = 0, \quad (14.4)$$

adică: *sistemul de forțe date și de legătură, efectiv aplicate punctului material, la care se adaugă forțele de transport, să formeze un sistem de forțe care se echilibrează.*

Forța de transport \vec{F}_t , nu este ca \vec{F} , rezultanta forțelor date și de legătură, efectiv aplicată punctului material. Ea se datorește inerției punctului material și se aplică efectiv asupra *agenților* care modifică sau tind să modifice mișcarea punctului material. Condiția (14.4) este una de *echilibru dinamic, echilibru fictiv* care ar fi fost de *echilibru real* numai dacă și \vec{F}_t ar fi fost aplicată efectiv punctului material. Cum nu este cazul, metoda folosirii forțelor cu caracter inerțial, adică a echilibrului fictiv, este un mod de a rezolva problemele dinamicii cu mijloacele staticii. De aceea, metoda se numește *cinetostatică*.

14.B. APLICAȚII LA DINAMICA MIȘCĂRII RELATIVE ȘI LA REPAUSUL RELATIV ALE PUNCTULUI MATERIAL

14.B.1. Un tub OB se rotește în planul orizontal, în jurul unei axe verticale ce trece prin extremitatea O , cu viteza unghiulară constantă ω_0 . În interiorul tubului se deplasează de la A spre B un punct material M de masă m . În momentul inițial punctul se află în A ($OA = b$), viteza sa în raport cu tubul fiind nulă. Să se determine legea de mișcare a punctului, precum și reacțiunea tubului (fig. 14.B.1).

Rezolvare. Ecuația fundamentală a mișcării relative este:

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{F}_t + \bar{F}_c.$$

Utilizând sistemul de referință $Oxyz$ (fig. 14.B.1), \bar{F} va avea expresia:

$$\bar{F} = N_x \bar{i} + (N_z - mg) \bar{k}.$$

Pentru determinarea lui \bar{F}_t , se calculează accelerația de transport a punctului M , care are doar o componentă normală, cea tangențială fiind nulă, deoarece ω_0 este constant:

$$a_{tn} = \omega_0^2 OM = \omega_0^2 y \text{ și este îndreptată de la } M \text{ spre } O, \text{ deci:}$$

$$\bar{F}_t = m\omega_0^2 y \bar{j}.$$

Pentru determinarea lui \bar{F}_c se calculează accelerația Coriolis. Direcția și sensul lui \bar{a}_c rezultă din produsul vectorial:

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r \text{ (fig. 14.B.1), iar modulul: } a_c = 2\omega_0 \dot{y}.$$

Rezultă: $\bar{F}_c = -2m\omega_0 \dot{y} \bar{i}$.

Proiectând ecuația de mișcare pe axele triedrului $Oxyz$, se obține:

$$(x) 0 = N_x - 2m\omega_0 \dot{y}; \quad (y) m\ddot{y} = m\omega_0^2 y; \quad (z) 0 = N_z - mg;$$

de unde $N_x = 2m\omega_0 \dot{y}$; $\ddot{y} - \omega_0^2 y = 0$; $N_z = mg$.

Legea de mișcare se obține rezolvând ecuația diferențială:

$$\ddot{y} - \omega_0^2 y = 0.$$

Soluția ecuației este de forma:

$$y = C_1 e^{\omega_0 t} + C_2 e^{-\omega_0 t},$$

respectiv:

$$\dot{y} = \omega_0 C_1 e^{\omega_0 t} - \omega_0 C_2 e^{-\omega_0 t}.$$

Se determină constantele de integrare punând condițiile inițiale: la $t = 0$:

$$y_0 = b; \quad \dot{y}_0 = 0.$$

Rezultă:

$$C_1 = C_2 = \frac{b}{2}.$$

Deci:

$$y = \frac{b}{2} (e^{\omega_0 t} + e^{-\omega_0 t}) = b \operatorname{ch} \omega_0 t,$$

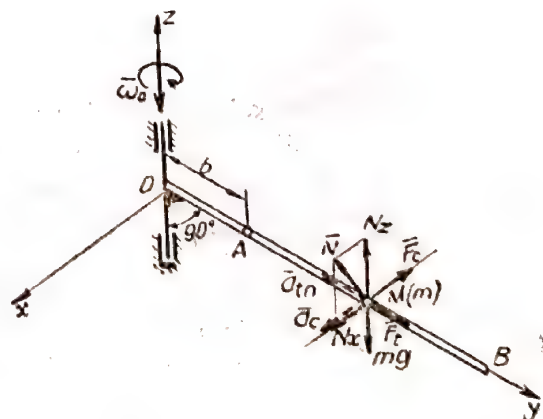


Fig. 14.B.1

respectiv :

$$\dot{y} = \omega_0 \frac{b}{2} (e^{\omega_0 t} - e^{-\omega_0 t}).$$

Componentele reacțiunii N sînt :

$$N_x = m\omega_0^2 b (e^{\omega_0 t} - e^{-\omega_0 t}); \quad N_z = mg.$$

Rezultă N :

$$N = m\sqrt{b^2\omega_0^4(e^{\omega_0 t} - e^{-\omega_0 t})^2 + g^2}.$$

14.B.2. Un punct material M de masă m se poate mișca fără frecare în planul xOz , care se rotește cu viteza unghiulară ω_0 constantă în jurul axei verticale Oz . Să se studieze mișcarea relativă a acestui punct, știind că în momentul inițial se află în $M_0(x_0 = b, y_0 = 0, z_0 = 0)$, avînd viteza relativă inițială egală cu zero și să se determine reacțiunea planului (fig. 14.B.2).

Rezolvare. Se calculează forțele care intervin în ecuația fundamentală a mișcării relative :

$$\vec{F} = N\vec{j} + mg\vec{k}.$$

Pentru determinarea forței de transport, se calculează accelerația de transport a punctului M ; avînd în vedere rotația uniformă a plăcii (ω_0 constant), componenta tangențială a accelerației este nulă, rămînînd componenta normală :

$$a_{in} = \omega_0^2 x, \quad \text{respectiv} \quad \vec{a}_{in} = -\omega_0^2 x\vec{i}.$$

Deci :

$$\vec{F}_t = m\omega_0^2 x\vec{i}.$$

Pentru determinarea forței Coriolis se calculează accelerația Coriolis :

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r = 2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_0 \\ \dot{x} & 0 & \dot{z} \end{vmatrix} = 2\omega_0 \dot{x}\vec{j}.$$

Rezultă :

$$\vec{F}_c = -2m\omega_0 \dot{x}\vec{j}.$$

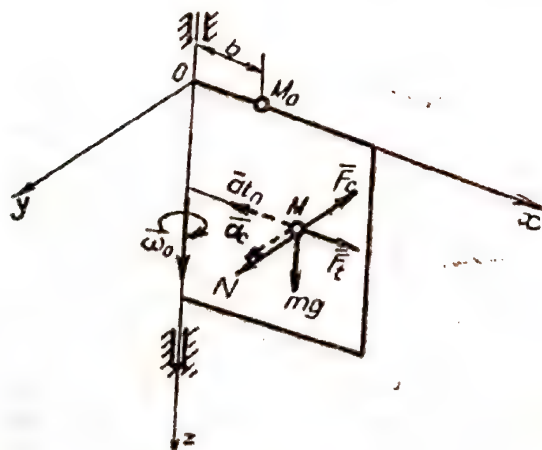


Fig. 14.B.2

Se proiectează ecuația fundamentală a mișcării relative a punctului material, pe cele trei axe :

$$(x) \quad m\ddot{x} = m\omega_0^2 x; \quad (y) \quad 0 = N - 2m\omega_0 \dot{x};$$

$$(z) \quad m\ddot{z} = mg.$$

Integrînd prima și ultima ecuație și ținînd seama de condițiile inițiale : $t = 0$

$$x_0 = b; \quad \dot{x}_0 = 0;$$

$$y_0 = 0; \quad \dot{y}_0 = 0;$$

$$z_0 = 0; \quad \dot{z}_0 = 0;$$

rezultă ecuațiile parametrice de mișcare:

$$x = \frac{b}{2} (e^{\omega_0 t} + e^{-\omega_0 t}) = b \operatorname{ch} \omega_0 t;$$

$$z = \frac{1}{2} g t^2.$$

Traectoria relativă este:

$$x = b \operatorname{ch} \left(\omega_0 \sqrt{\frac{2z}{g}} \right),$$

iar reacțiunea normală:

$$N = 2m\omega_0^2 b \operatorname{ch} \omega_0 t.$$

14.B.3. O pană ABC de greutate G , avînd forma unui triunghi dreptunghic cu unghiul $ACB = \alpha$ dat (fig. 14.B.3, *a*), se reazemă fără frecare pe un plan orizontal. Pe fața BC a penei se găsește un punct material M de greutate P , care poate aluneca fără frecare în raport cu pana. Să se determine accelerația penei și a punctului material, precum și reacțiunile, știind că sistemul se află inițial în repaus.

Rezolvare. Se izolează punctul material (fig. 14.B.3, *b*). Asupra sa acționează forțele:

P — greutatea proprie;

N_1 — reacțiunea feței înclinate a penei;

$\bar{F}_t = -\frac{P}{g} \bar{a}_t$ — forța de transport, îndreptată în sens invers lui \bar{a}_t .

Se scrie ecuația mișcării relative a punctului material, proiectată pe axele alese în figura 14.B.3, *b*:

$$(Bx) \quad \frac{P}{g} a_r = F_t \cos \alpha + P \sin \alpha;$$

$$(By) \quad 0 = N_1 - P \cos \alpha + F_t \sin \alpha.$$

Se izolează pana, asupra căreia acționează forțele (fig. 14.B.3, *c*):

G — greutatea proprie;

N_1 — acțiunea punctului material M asupra feței BC ;

N_2 — reacțiunea planului orizontal.

Mișcarea de translație a penei are ecuațiile:

$$\frac{G}{g} a_t = N_1 \sin \alpha$$

$$0 = N_2 - G - N_1 \cos \alpha$$

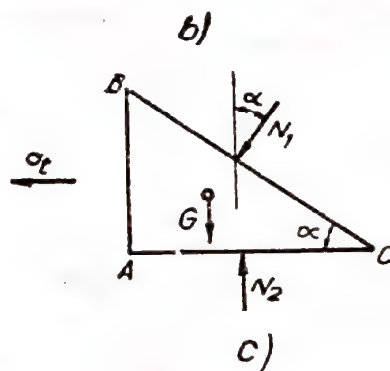
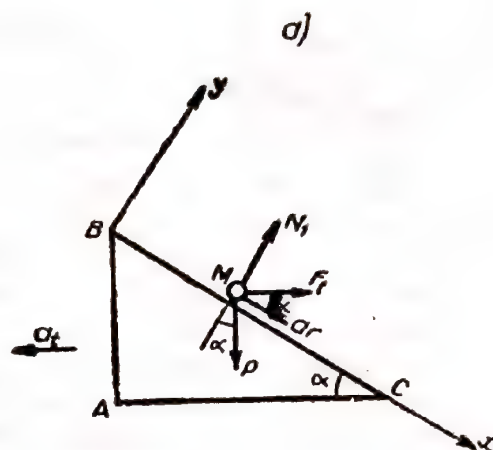
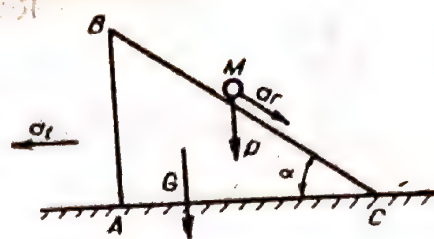


Fig. 14.B.3

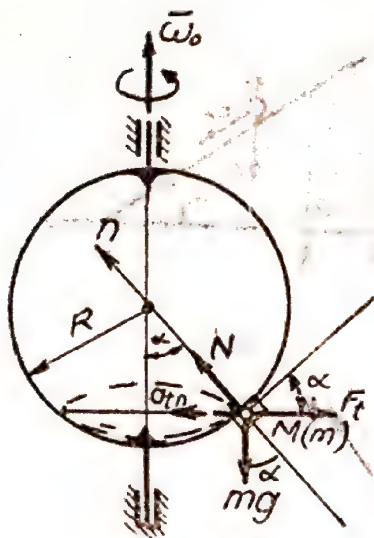


Fig. 14.B.4

Rezolvînd sistemul de ecuații, rezultă:

$$a_r = \frac{(G + P) \sin \alpha}{G + P \sin^2 \alpha} g; \quad a_t = \frac{P \sin 2\alpha}{2(G + P \sin^2 \alpha)} g;$$

$$N_1 = \frac{GP \cos \alpha}{G + P \sin^2 \alpha}; \quad N_2 = \frac{G + P}{1 + \frac{P}{G} \sin^2 \alpha}.$$

14.B.4. Un cerc de sîrmă cu raza R are o mișcare de rotație în jurul diametrului său vertical, cu viteza unghiulară constantă ω_0 . Pe cerc se poate deplasa fără frecare un cursor M de masă m . Să se determine pozițiile de repaus relativ ale cursorului (fig. 14.B.4), precum și valoarea reacțiunii cercului.

Rezolvare. Asupra cursorului M acționează următoarele forțe:

- greutatea proprie mg ;
- reacțiunea cercului N ;
- forța de transport F_t , pentru determinarea căreia se calculează accelerația de transport a punctului M , aflat pe cercul de rază R în mișcare de rotație; ω_0 fiind constant, componenta tangențială a accelerației este nulă, rămînînd doar componenta normală (fig. 14.B.4):

$$a_n = \omega_0^2 R \sin \alpha.$$

Rezultă:

$$F_t = m\omega_0^2 R \sin \alpha.$$

Se proiectează condiția vectorială de repaus relativ pe axele triedrului $Mtnb$:

$$(Mt); \quad -mg \sin \alpha + F_t \cos \alpha = 0;$$

$$(Mn); \quad N - mg \cos \alpha - F_t \sin \alpha = 0.$$

Înlocuind F_t în prima ecuație, rezultă:

$$\sin \alpha (-mg + m\omega_0^2 R \cos \alpha) = 0.$$

Soluțiile acestei ecuații sînt:

$$\sin \alpha = 0; \quad \alpha = 0; \quad \alpha = \pi.$$

$$\cos \alpha = \frac{g}{\omega_0^2 R}; \quad \alpha = \pm \arccos \frac{g}{\omega_0^2 R}.$$

Reacțiunea cercului pentru $\alpha = 0, \pi$, $N = mg$;

$$\text{pentru } \alpha = \pm \arccos \frac{g}{\omega_0^2 R}; \quad N = m\omega_0^2 R.$$

INTRODUCERE ÎN DINAMICA SISTEMELOR MATERIALE. MĂRIMI DINAMICE

15.A. PREZENTARE TEORETICA

15.A.1. Sisteme materiale

În stadiul actual al științelor naturii, materia are o structură duală: *substanța*, discontinuă, concentrată și *cîmpul*, continuu, extins în spațiu.

În mecanica newtoniană se studiază numai *mișcarea mecanică a modelului* de sistem material, corpul constituit numai din substanță, adică făcîndu-se abstracție de *cîmpul propriu* al acestor corpuri. Influența acestui cîmp asupra mișcării mecanice a corpurilor de pe suprafața pămîntului este cu totul neglijabilă în comparație cu acțiunea cîmpului gravitațional al pămîntului, cu aceea a unui cîmp electromagnetic sau cu alte acțiuni, cum sînt acțiunile de contact dintre corpuri.

Pentru corpul constituit numai din substanță, oglindită prin masa sa inertă sau gravifică, mecanica folosește o serie de modele definite la pct. I,A: punct material, sistem de puncte materiale, continuu material deformabil, sau nedeformabil (solidul rigid) etc.

În mecanica newtoniană, o caracteristică importantă a interacțiunii este forța, iar aceasta poate fi reprezentată printr-un *vector legat* de punctul de aplicație, originea acestui vector. Ca urmare, folosirea modelelor de punct material și de sistem discret de puncte materiale prezintă importante simplificări în studiul matematic al mișcării mecanice a acestor modele. Astfel, în problema mișcării unui sistem de n (finit) puncte materiale M_i , de mase m_i , acționate de *forțe exterioare*, date și de legătură \bar{F} ($i = 1, 2, 3 \dots n - 1, n$) și de *forțe interioare* \bar{F}_{ij} (fig. 15.A.1), care ascultă și de principiul egalității acțiunii și reacțiunii, unde $j = 1, 2, 3 \dots n - 1, n$, cu condiția $j \neq i$, se poate ajunge mai ușor la unele rezultate decît în cazul problemei mișcării unui continuu.

Așa după cum s-a procedat la pct. III.7, folosirea rezultatelor stabilite asupra unui sistem discret de puncte materiale, la un continuu material, are un caracter axiomatic.

Precizări

În general, sistemele materiale discrete sau continue sînt considerate, la stabilirea rezultatelor, ca *deformabile*. În consecință, forțele sînt reprezentabile *numai prin vectori legați de punct*. În aceste condiții rezultatele devin utile și altor mecanici (Hidraulica, Mecanica fluidelor, Rezistența materialelor etc.).

Forțele interioare nu se echilibrează, deși, fiind două cite două egale și direct opuse, ele au o *sumă nulă*. Aceasta deoarece ele nu acționează asupra aceluiași punct material. Forțele

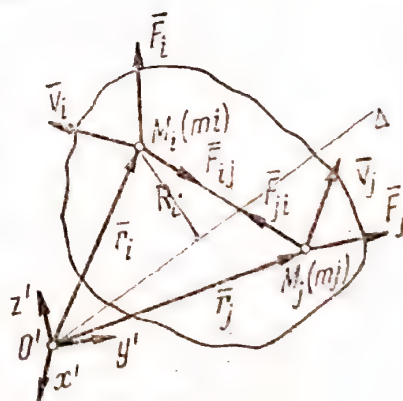


Fig. 15.A.1

interioare apar numai în cazul unor sisteme deformabile și, în consecință, ele *nu pot fi reprezentate prin vectori alunecători*. De pildă, forțele de interacțiune dintre moleculele unui gaz închis în cilindru unei mașini nu se echilibrează.

Un sistem de puncte materiale care nu are legături exterioare, sau nu este acționat de forțe dinafara lui, se numește *sistem izolat*.

Cu toate că în natură nu există sisteme izolate, totuși unele sisteme materiale pot fi, cu o foarte bună aproximație, asimilate cu un sistem izolat. Exemplu: sistemul solar.

15.A.2. Problema fundamentală

Mărimi de stare. În mecanică, mărimile care determină, la momentul t , starea unui punct material M_i sînt: \vec{r}_i = vectorul de poziție, m_i = masa inertă sau gravifică a punctului și \vec{v}_i = viteza punctului.

Mărimile de stare mecanică la un anumit moment $t = t_1$, de obicei $t = 0$, adică \vec{r}_{i0} și \vec{v}_{i0} , m_i fiind invariabil, sînt *condițiile inițiale* ale mișcării punctului material M_i .

Enunțul problemei: Se cunosc mărimile de stare, la momentul inițial, al unui sistem de n puncte materiale $M_i (i = 1, 2, 3 \dots n - 1, n)$, asupra cărora acționează forțe exterioare date și de legătură, reprezentate pentru M_i prin \vec{F}_i și forțe interioare $\vec{F}_{ij} (j = 1, 2, 3 \dots n - 1, n)$, cu specificarea că $\vec{F}_{ij} \neq 0$.

În ipoteza că atît forțele exterioare \vec{F}_i , cît și cele interioare \vec{F}_{ij} sînt funcții vectoriale cunoscute de timpul t , de vectorul de poziție \vec{r}_i și de viteza \vec{v}_i a punctului de aplicație, se cere să se determine mișcarea sistemului de puncte materiale M_i .

Pentru rezolvarea problemei este necesar ca, în primul rînd, să se rezolve sistemul de n ecuații diferențiale vectoriale, de ordinul 2, cu n necunoscute $\vec{r}_i (i = 1, 2, 3 \dots n - 1, n)$:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij}, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (15.1)$$

în care $\vec{F}_{ii} = 0$.

Soluțiile sistemului (15.1), cînd există integralele generale au forma:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t, \vec{C}_1, \vec{C}_2, \dots, \vec{C}_{2n}), \quad (15.2)$$

unde $\vec{C}_1, \vec{C}_2, \dots, \vec{C}_{2n}$ sînt $2n$ constante vectoriale, independente între ele. Aceste constante pot fi determinate folosindu-se condițiile inițiale, cu ajutorul ecuațiilor:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{i0} &= \vec{r}_i(0, \vec{C}_1, \vec{C}_2, \dots, \vec{C}_{2n}) \\ \vec{v}_{i0} &= \dot{\vec{r}}_i(0, \vec{C}_1, \vec{C}_2, \dots, \vec{C}_{2n}). \end{aligned} \quad (15.3)$$

Un exemplu clasic este „*problema celor n corpuri*”, cum este denumită problema mișcării sistemului solar, considerat, ca un sistem de n puncte materiale, *izolat*, cu forțe interioare *gravitaționale atractive*. Pentru $n = 2$, problema se poate rezolva destul de ușor, însă dificultățile matematice cresc foarte mult pentru $n \geq 3$.

În cazul în care nici nu se cunosc expresiile forțelor interioare, problema, așa cum este ea pusă, este insolubilă, deoarece nu se poate rezolva sistemul celor n ecuații diferențiale vectoriale (15.1).

15.A.3. Teoremele generale

Totuși, cu ajutorul mărimilor de stare m_i , \bar{r}_i și \bar{v}_i , s-au format alte mărimi: $m_i \bar{v}_i$; $\bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i$; $\frac{1}{2} m_i v_i^2$, denumite, respectiv: *cantitatea de mișcare* a punctului M_i , *momentul cinetic* al punctului M_i față de O , *energia cinetică* a punctului M_i , toate calculate pentru momentul t și în raport cu reperul fix $Oxyz$. Scriind cele n ecuații diferențiale (15.1), în ipoteza maselor m_i independente de mișcare, sub forma:

$$\frac{d}{dt} (m_i \bar{v}_i) = \bar{F}_i + \sum_{j=1}^n \bar{F}_{ij}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad j \neq i, \quad (15.4)$$

se poate ajunge pentru sistemul de puncte materiale la expresii în care nu mai apar forțele interioare. Ele exprimă, sub denumirea de *teoreme generale*, variația unor mărimi care caracterizează în fiecare moment mișcarea sistemului de puncte materiale. Mai mult, în anumite condiții, ecuațiile rezultate din (15.1) se pot integra o dată. Aceste *integrale prime* ale sistemului de ecuații diferențiale exprimă *conservarea* aceluiași mărimi.

15.A.4. Noțiuni, mărimi, unități de măsură

Mecanica fiind prima parte a științelor naturii, este și prima care folosește o serie de noțiuni și mărimi care apoi sînt reluate și dezvoltate în cadrul altor discipline. De aici și obligația mecanicii să fie prima care să-și prezinte aceste noțiuni și mărimi. Evident, această prezentare se poate face în multe moduri: fie formal matematic prin expresia mărimii, ignorînd cu totul noțiunea, de pildă: „masa este un scalar pozitiv m care se măsoară în kg” sau, „forța este egală cu produsul dintre masă și accelerație și se măsoară în N ”, fie confundîndu-se noțiunea cu mărimea, de pildă, cînd se spune: se aplică un moment \bar{M} , în loc de: se aplică un cuplu de moment \bar{M} . Alte ori, pornind de la faptul că ecuațiile mecanicii newtoniene sînt de obicei omogene, se confundă termenul din stînga al ecuației cu cel din dreapta, pe motiv că au aceleași expresii de dimensiuni. Astfel multă vreme definiția forței a fost aceea din rîndurile precedente, apoi, pînă nu de mult se confunda *lucrul mecanic* cu *energia*, iar nici acum nu se face distincție dintre *impuls* și *cantitatea de mișcare*.

Justificarea care se dă uneori este următoarea: „O definiție dată la mecanică nu poate fi folosită întotdeauna și în alte domenii”. Nici nu ar fi corect, deoarece definițiile date la mecanică oglindesc realitățile din această disciplină. Cînd se trece la o altă disciplină, se păstrează tot ceea ce corespunde și se dezvoltă definiția potrivit fenomenelor studiate în această disciplină.

În consecință, în acest manual se va continua să se definească noțiunile și mărimile, în lumina materialismului dialectic și strict în limitele mecanicii newtoniene.

Astfel, la Capitolul 1, după definiția dată de Lenin noțiunii de materie, s-au prezentat două din însușirile materiei întîlnite în mecanică: *gravitația* și *inerția*, oglindite, respectiv, în mărimile de *masă gravifică* și de *masă inertă* și apoi s-a dat definiția masei inerte etc.

De asemenea, s-au definit noțiunea și mărimea de forță în cadrul mișcării mecanice a materiei și a legăturii acestei mișcări cu alte forme, mecanice, de mișcare.

La Capitolul 2, s-au definit: noțiunea de cuplu de forțe și mărimea de moment, măsura cuplului, noțiunea de torsesor al unui sistem de forțe, măsura torsesorului, noțiunea și mărimea de moment static etc.

15.A.5. Modele teoretice

Pornind de la unele experiențe, de pildă, de la ciocnirea solidelor, se pot deduce modele teoretice care să permită atât studiul fenomenului, cât și definirea unor mărimi. Asemenea modele se pot deduce și din mișcările rachetelor cosmice, a sateliților artificiali sau naturali, a planetelor etc. De pildă, se presupune existența unui solid rigid S , de masă M , izolat în spațiu, care se mișcă astfel încât triedrul $Oxyz$, invariabil legat de solid, să fie un reper inerțial. Se consideră un punct material P de masă m , cu totul neglijabilă față de M , astfel încât P să nu influențeze în nici un moment mișcarea lui S .

Dacă P este extrem de departe de S , izolat, el se mișcă în virtutea inerției. Dacă în această mișcare S și P se apropie, la un moment dat S și P se interacționează. Din acest moment, se poate analiza mișcarea relativă a lui P în raport cu S , presupus fix. Se notează cu \vec{F} forța de interacțiune cu caracter gravitațional. \vec{F} este o funcție vectorială variabilă.

În funcție de condițiile de mișcare, la un moment t , considerat inițial, adică în funcție de \vec{r}_0 , \vec{v}_0 și $\alpha = \angle(\vec{r}_0, \vec{v}_0)$, mișcarea poate continua în diferite moduri. Se rețin numai condițiile în care S captează pe P transformându-l în satelit.

În general, P descrie o elipsă cu unul din focare în O (fig. 15.A.2, a).

În cazul special¹, când $|\vec{v}_0| = \sqrt{\frac{KM}{r_0}}$ și $\alpha = \frac{\pi}{2}$, P descrie un cerc cu centrul în O care este și centrul de masă atractiv al lui S (fig. 15.A.2, b). În cazul când P descrie o elipsă, în afară de aspectul mecanic al interacțiunii, care se traduce prin modificarea mișcării mecanice adică prin accelerația mobilului, mai există și un aspect² nemecanic, tradus prin deformarea sistemului de puncte materiale ($S.P.$).

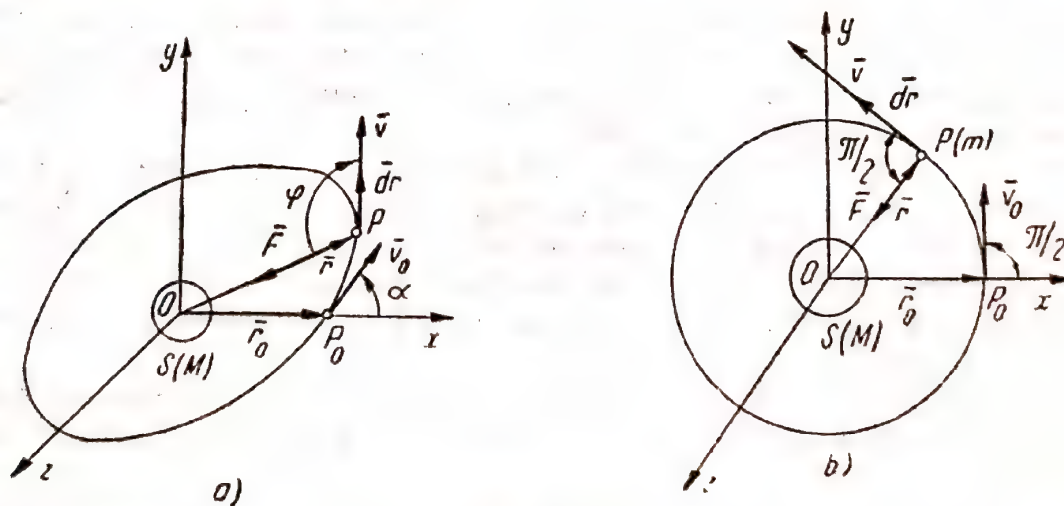


Fig. 15.A.2

¹ Evident, se mai admite că S este sferic și omogen, iar P nu mai este acționat de alte forțe în mișcarea lui, de pildă de rezistența mediului, ceea ce este realizabil cu o bună aproximație.

² Deși interacțiunea în general este un proces extrem de complex, aici se iau în considerare numai două din aspectele ei.

În cazul special cînd P descrie un cerc cu centrul în O , nu există decît aspectul mecanic al interacțiunii, exprimat prin: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m}$. Dacă m nu variază în timp, relația se scrie sub forma (15.5) apoi, integrată în intervalul de timp $t' - t$, sub forma (15.6)

$$\vec{F}dt = d(m\vec{v}), \quad (15.5)$$

$$\int_t^{t'} \vec{F}dt = m\vec{v}' - m\vec{v}. \quad (15.6)$$

Înmulțind $\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$ scalar cu $d\vec{r}$, se ajunge la

$$\vec{F}d\vec{r} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \quad (15.7)$$

și

$$\int_t^{t'} \vec{F}d\vec{r} = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv^2. \quad (15.8)$$

Aceste relații, două din consecințele ecuației fundamentale a mecanicii newtoniene, sînt două din *teoremele importante ale mișcării punctului material*. Ele leagă mărimi care măsoară interacțiunea și mișcarea mecanică a punctului material, *legături de cauză și efect*. Se introduc denumirile acestor mărimi:

$\vec{F}dt$ = impulsul elementar al interacțiunii;

$m\vec{v}$ = cantitatea de mișcare a punctului P ;

$\vec{F}d\vec{r}$ = lucrul mecanic elementar al interacțiunii;

$\frac{1}{2}mv^2$ = energia cinetică a punctului P .

15.A.6. Analiza relațiilor

Chiar din punct de vedere matematic reiese că partea întâia a ecuației (15.5) nu este, în general, o diferențială exactă, pe cînd partea a doua este. La fel și pentru relația (15.7). Deci, nu se va identifica *impulsul cu cantitatea de mișcare*, așa după cum azi nu se mai identifică lucrul mecanic cu energia.

Din (15.7) aplicată modelului special (fig. 15.A.2, b), rezultă că nu în orice condiții forța poate furniza un lucru mecanic.

Lucrul mecanic *nu este o mărime derivată din forță*. Analizînd modelul general (fig. 15.A.2, a) rezultă că lucrul mecanic apare numai dacă în procesul de interacțiune apare și *deformația*, considerată ca o *formă nemecanică* de mișcare. În general, condiția apariției lucrului mecanic este schimbarea calitativă a *mișcării*, adică trecerea de la o formă la o altă formă de mișcare¹.

Cantitatea de mișcare $m\vec{v}$ și energia cinetică $\frac{1}{2}mv^2$ sînt cele două măsuri ale *mișcării mecanice*. În modelul special (fig. 15.A.2, b) cantitatea de

¹ Fr. Engels, *Dialectica naturii*, pp. 88–89. E.S.P.I.A. 1950.

mişcare variază datorită impulsului, iar energia cinetică nu variază, neexistând deformare și deci nici lucru mecanic.

În modelul general (fig. 15.A.2, a) există atât impuls, cât și lucru mecanic, astfel că variază ambele măsuri ale mișcării mecanice.

Impulsul și lucrul mecanic sînt două din măsurile interacțiunii.

Lucrul mecanic elementar $\vec{F}d\vec{r} = |\vec{F}| |d\vec{r}| \cos \varphi$, poate fi pozitiv, în care caz energia cinetică a punctului material crește, poate fi nul, cînd nu variază energia cinetică a punctului material, poate fi negativ, cînd energia cinetică a punctului se micșorează. Deoarece solidul S este presupus fix, aceasta este și variația energiei cinetice a sistemului (S, P) . Dar sistemul (S, P) este izolat, astfel că se pune întrebarea: de unde vine plusul de energie cinetică și ce devine partea de energie cinetică a sistemului, cînd acesta este în mișcare?

Răspunsul este: sistemul (S, P) mai posedă în afară de energia cinetică a lui P și o energie potențială. În mecanica newtoniană această energie depinde numai de poziția în spațiu a punctelor materiale ale sistemului, aici de poziția relativă dintre S și P . Dacă prin mișcare P se apropie de S , energia lui cinetică crește și scade energia potențială a sistemului; dacă P se depărtează de S , scade energia cinetică a lui P și crește energia potențială a sistemului, iar dacă P descrie un cerc cu centrul în O , atât energia cinetică a lui P cât și energia potențială a sistemului (S, P) nu variază. Energia potențială se mai numește energie de poziție.

15.A.7. Definiții

Cantitatea de mișcare măsoară capacitatea mișcării mecanice de a se transmite de la un corp la altul tot sub formă de mișcare mecanică. Expresia matematică este $m\vec{v}$. Este considerată în fizică drept una din mărimile de stare. Unitatea de măsură în sistemul SI este $\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Impulsul măsoară transmiterea mișcării mecanice, de la un corp la altul în intervalul de timp de la t la t' .

Expresia matematică este: $\int_t^{t'} \vec{F} dt$. Unitatea de măsură în sistemul SI este Ns .

Energia cinetică măsoară capacitatea mișcării mecanice de a trece într-o altă formă, nemecanică, de mișcare. Expresia matematică este $\frac{1}{2}mv^2$. Unitatea de măsură este aceeași ca pentru orice formă de energie; în SI este joule.

Lucrul mecanic măsoară trecerea unei forme de mișcare în altă formă de mișcare, în intervalul de timp de la t la t' . Expresia matematică este

$\int_t^{t'} \vec{F} d\vec{r}$. În toate sistemele se folosesc aceleași unități ca pentru energie: joule, pentru a nu se confunda lucrul mecanic cu momentul unei forțe sau cu momentul unui cuplu, care au în sistemul SI unitatea Nm .

Energia. Engels a definit-o ca măsura generală a mișcării sub toate formele și în toate transformările.

Energia potențială este măsura *mișcării nemecanice* a unui sistem material, *capabilă de a trece și în forma mecanică de mișcare*. În mecanica newtoniană energia potențială (E_p) depinde numai de poziția în spațiu a particulelor sistemului material, concepute ca puncte materiale.

Observație.

Uneori se mai definește energia sub forma: capacitatea unui sistem de a produce un lucru mecanic, în sensul de a furniza un travaliu.

15.A.8. Mărimi dinamice la sisteme

Folosind notațiile de la Capitolul 15 (fig. 15.A.1) pentru sistemul discret de puncte materiale, sau cele de la Capitolul 3 (fig. 3.A.3) pentru sistemele continue, se pot determina expresiile unor mărimi și ale unor importante teoreme folosite în dinamică.

Cantitatea de mișcare a unui sistem în raport cu un reper fix. Notăție \bar{H} .

$$\text{Sistem de puncte materiale: } \bar{H} = \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i. \quad (15.9, a)$$

$$\text{Sistem continuu material: } \bar{H} = \int_D \bar{v} dm. \quad (15.9, b)$$

Sistem nedeformabil în mișcare de translație, cu viteza \bar{v} :

$$\bar{H} = \sum_{i=1}^n (m_i) \bar{v} = m \bar{v} \text{ sau } \bar{H} = \bar{v} \int_D dm = m \bar{v}.$$

Unități de măsură în SI: $\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (kilogram metru pe secundă).

Momentul cinetic. Cantitatea de mișcare fiind o mărime vectorială are nevoie pentru determinarea ei pozițională și de *momentul cinetic* care este momentul în raport cu un punct fix O , sau în raport cu o axă fixă (Δ), a cantității de mișcare. Pentru un punct material de masă m_i și viteză \bar{v}_i , momentul cinetic în raport cu O este: $\bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i$, unde \bar{r}_i este vectorul de poziție al punctului M_i (fig. 15.A.1). Momentul cinetic în raport cu axa (Δ) este proiecția ortogonală a lui $\bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i$ pe axa (Δ). Dacă \bar{u} este versorul axei, produsul mixt $(\bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i) \bar{u}$ este *scalarul momentului cinetic* al punctului M_i în raport cu axa (Δ).

Notății: Momentul cinetic al unui sistem în raport cu O : \bar{K}_O , în raport cu (Δ): \bar{K}_Δ , cu scalarul față de axa (Δ): K_Δ .

Sistem de puncte materiale:

$$\bar{K}_O = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i, \quad K_\Delta = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i) \bar{u}, \quad (15.10, a)$$

iar dacă este nevoie de o exprimare vectorială $\bar{K}_\Delta = K_\Delta \bar{u}$.

Sistem continuu material:

$$\bar{K}_O = \int_D \bar{r} \times \bar{v} dm; \quad K_\Delta = \bar{K}_O \bar{u}, \text{ etc.} \quad (15.10, b)$$

Sistem nedeformabil în mișcare de rotație în jurul axei (Δ) cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$:

$$\bar{K}_0 = \left(\sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \right) \bar{\omega} - \sum_{i=1}^n m_i (\bar{r}_i \bar{\omega}) \bar{r}_i; \quad K_\Delta = \bar{K}_0 \frac{\bar{\omega}}{|\bar{\omega}|} = \frac{\bar{\omega}^2}{|\bar{\omega}|} \sum m_i R_i^2$$

$\bar{K}_\Delta = \left(\sum_{i=1}^n m_i R_i^2 \right) \bar{\omega}$, unde R_i este distanța punctului M_i față de axa de rotație (Δ) . În aceste expresii $\sum_{i=1}^n m_i r_i^2$ este momentul de inerție al sistemului

lui în raport cu O și se notează cu J_0 , iar $\sum_{i=1}^n m_i R_i^2$ este momentul de inerție al sistemului în raport cu axa (Δ) și se notează cu J_Δ . În aceste condiții, momentul cinetic al sistemului nedeformabil, în mișcare de rotație reprezentată prin $(\bar{\omega})$, în raport cu axa de rotație (Δ) , se poate scrie vectorial:

$$\bar{K}_\Delta = J_\Delta \bar{\omega} \quad (15.11, a)$$

sau scalar

$$K_\Delta = J_\Delta \omega, \quad (15.11, b)$$

deoarece $\bar{\omega}$ este un vector situat pe axa (Δ) , iar ω este valoarea scalară a lui $\bar{\omega}$ în raport cu versorul \bar{u} al axei (Δ) .

Unitățile de măsură, în sistemul SI, pentru momentele cinetice sînt: kgm^2/s iar pentru momentele de inerție, kgm^2 etc.

Momentul de inerție împreună cu momentul static sînt două mărimi care dau indicații asupra modului în care este distribuită, permanent sau la un moment dat, masa într-un sistem, în raport cu un anumit reper. Reperul poate fi originea unui triedru de obicei ortogonal, oricare din *axe* sau *planele* acestui triedru.

Momentele de inerție pot fi: *polare* J_0 , *axiale* (J_x , J_y sau J_z) sau *planare*, de pildă $J_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i z_i^2$ pentru un sistem discret de puncte materiale sau $J_{xy} = \int_{(D)} z^2 dm$ pentru un continuu material. Mai există și *produse de inerție*

de pildă $J_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i$ sau $J_{xy} = \int_{(D)} xy dm$.

Definiții. Momentul de inerție J_Δ , al unui solid rigid în raport cu o axă (Δ) , este *măsura inerției solidului rigid în mișcarea de rotație uniformă în jurul axei (Δ) .*

Raza de inerție i a unui sistem material de masă totală m , în raport cu un punct, o axă sau un plan, este distanța i a unui punct pînă la reperul considerat, astfel că, dacă în acest punct s-ar concentra masa m , momentul de inerție să fie egal cu momentul de inerție al sistemului material în raport cu reperul considerat, adică $mi^2 = J$, sau $i = \sqrt{\frac{J}{m}}$.

Variația momentelor de inerție în raport cu axe paralele

Teoremele lui Steiner sînt enunțate pentru un sistem nedeformabil de n puncte materiale M_i , de mase m_i , determinate, în raport cu reperul cu

originea în O , prin vectorii \bar{r}_i , iar în raport cu reperul din O' , prin \bar{r}'_i ; poziția lui O în raport cu O' este dat de \bar{r}_0 (fig. 15.A.3). Prin teorema lui Steiner se exprimă relația:

$$J'_0 = m\bar{r}_0^2 + 2\bar{r}_0\bar{S}_0 + J_0, \quad (15.12, a)$$

unde: J'_0 și J_0 sînt momentele de inerție în raport cu originaile O' și O ale sistemului, $m = \sum_{i=1}^n m_i$, masa sistemului, $\bar{S}_0 = m\bar{r}_0$ = momentul static al sistemului în raport cu O , \bar{r}_0 = vectorul de poziție al centrului de masă C , în raport cu reperul cu originea în O .

Dacă O coincide cu C , $\bar{r}_0 = 0$ și $\bar{S}_0 = 0$, iar relația devine:

$$J'_0 = m\bar{r}_0^2 + J_0, \quad (15.12, b)$$

adică: *momentul de inerție al unui sistem de puncte materiale în raport cu un punct oarecare este egal cu momentul de inerție al sistemului în raport cu centrul său de masă, adunat cu produsul dintre masa sistemului și pătratul distanței dintre centrul de masă și punctul oarecare considerat.*

Expresia matematică a celei de a doua teoreme este:

$$J_{\Delta'} = md^2 + 2\bar{r}_0\bar{S}_0 + J_{\Delta}, \quad (15.13, a)$$

în care notații noi sînt: $J_{\Delta'}$, J_{Δ} adică momentele de inerție ale sistemului în raport cu două axe paralele (Δ') și (Δ), iar d = distanța dintre axele paralele (fig. 15.A.3). Dacă O coincide cu C , adică (Δ) trece prin centrul de masă, $\bar{S}_0 = 0$, iar relația devine:

$$J_{\Delta'} = md^2 + J_{\Delta}, \quad (15.13, b)$$

adică: *momentul de inerție al unui sistem de puncte materiale în raport cu o axă oarecare este egal cu momentul de inerție al sistemului în raport cu o axă care trece prin centrul de masă al sistemului și este paralelă cu axa considerată, adunat cu produsul dintre masa sistemului și pătratul distanței dintre cele două axe.*

O a treia teoremă a lui Steiner privește produsele de inerție: *produsul de inerție al unui sistem de puncte materiale, în raport cu planele unui diedru dreptunghic, este egal cu produsul de inerție al sistemului în raport cu planele unui diedru paralel, la fel orientat cu primul și a cărui muchie trece prin centrul de masă al sistemului, adunat cu produsul de inerție, în raport cu planele primului diedru, al centrului de masă în care s-ar presupune concentrată masa sistemului.*

Observații.

Dacă sistemul de puncte materiale este plan, enunțurile teoremelor lui Steiner rămîn neschimbate, cu excepția teoremei pentru produsele de inerție care devine:

Produsul de inerție în raport cu o pereche de axe rectangulare este egal cu produsul de inerție în raport cu axele paralele, la fel orientate cu primele, dar care trec prin centrul de masă al sistemului, adunat cu produsul de inerție în raport cu primele axe, ale centrului de masă în care s-ar presupune concentrată masa sistemului.

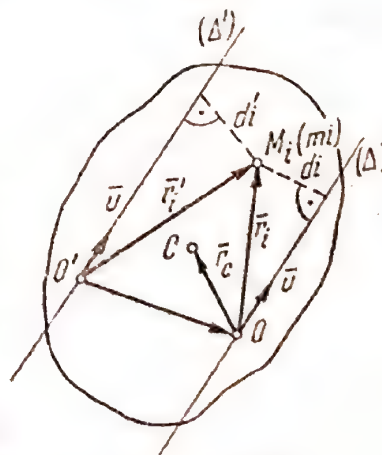


Fig. 15.A.3

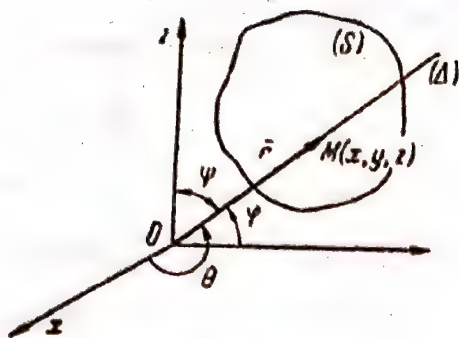


Fig. 15.A.4

formează cu axele Ox , Oy , Oz unghiurile θ , φ și ψ , ale căror cosinusuri directori sînt α , β și γ , este:

$$J_{\Delta} = J_x \alpha^2 + J_y \beta^2 + J_z \gamma^2 - 2J_{xy} \alpha \beta - 2J_{yz} \beta \gamma - 2J_{zx} \gamma \alpha. \quad (15.14)$$

Variația lui J_{Δ} depinde de α , β și γ . O imagine a variației lui J_{Δ} o poate da suprafața descrisă de un punct $M(x, y, z)$ al axei (Δ) determinat prin \bar{r} astfel ca $|\bar{r}| = \frac{k}{\sqrt{J_{\Delta}}}$, ($J_{\Delta} \neq 0$), adică rezultată din eliminarea parametrilor α , β și γ între:

$$x = \frac{k\alpha}{\sqrt{J_{\Delta}}}; \quad y = \frac{k\beta}{\sqrt{J_{\Delta}}}; \quad z = \frac{k\gamma}{\sqrt{J_{\Delta}}}$$

și (15.14), adică:

$$J_x \cdot x^2 + J_y \cdot y^2 + J_z \cdot z^2 - 2J_{xy}xy - 2J_{yz}yz - 2J_{zx}zx = k^2, \quad (15.15)$$

unde k este o constantă avînd expresia de dimensiuni $[L^2 M^{1/2}]$. Ecuația (15.15) reprezintă o cuadrică închisă cu centrul în O . În general, este un elipsoid cu excepția cazului în care sistemul material s-ar reduce la o bară rigidă dreaptă care coincide cu axa (Δ) . Acesta este *elipsoidul de inerție* al sistemului material rigid, în raport cu punctul O . Pentru determinarea lui trebuie calculați în prealabil, în raport cu axele și planele reperului $Oxyz$, termenii J_x , J_y , J_z , J_{xy} , J_{yz} , J_{zx} și constanta k . Apoi cu $J_{\Delta} = \frac{k^2}{r^2}$ se poate determina J_{Δ} pentru orice direcție, folosind numai distanța $OM = r$ între O și unul din punctele de intersecție a elipsoidului de inerție cu axa (Δ) .

Observații.

Oricărui punct O îi corespunde, pentru un același sistem material rigid, un anumit elipsoid de inerție.

Dacă O trece în centrul de masă C al sistemului material, elipsoidul de inerție se numește *central*.

Dacă se raportează elipsoidul la triedrul $CXYZ$ determinat de axele sale de simetrie, ecuația elipsoidului central de inerție devine:

$$J_x X^2 + J_y Y^2 + J_z Z^2 = k^2, \quad (15.15, a)$$

unde J_x , J_y , J_z sînt *momentele principale de inerție* în raport cu noile axe iar produsele de inerție sînt nule: $J_{xy} = 0$, $J_{yz} = 0$, $J_{zx} = 0$, care sînt și *condițiile necesare și suficiente* pentru ca axele și planele triedrului, $CXYZ$ să fie axe și plane principale de inerție.

Momentul de inerție al sistemului rigid în raport cu axa mare a elipsoidului central de inerție este cel mai mic dintre toate momentele de inerție posibile, în raport cu orice axă a sistemului material rigid considerat.

Energia cinetică a unui sistem. Se notează cu E_o energia cinetică în raport cu reperul fix, O fiind originea reperului fix $Ox'y'z'$, cu E_c energia cinetică în raport cu reperul mobil, C fiind centrul de masă considerat ca originea reperului mobil $Cxyz$.

Pentru un sistem oarecare de puncte materiale :

$$E_o = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2. \quad (15.16, a)$$

Pentru un sistem nedeformabil discret sau continuu în mișcare de *translație* :

$$E_o = \frac{1}{2} m v_c^2, \quad (15.16, b)$$

unde : $m = \sum_{i=1}^n m_i$ sau $m = \int_{(D)} dm$, iar \bar{v}_c este viteza centrului de masă.

Pentru un sistem nedeformabil, discret sau continuu, în mișcare de *rotație* în jurul unei axe fixe (Δ) :

$$E_o = \frac{1}{2} J \omega^2, \quad (15.16, c)$$

unde : $J_\Delta = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2$ sau $J_\Delta = \int_{(D)} R^2 dm$, R_i sau R fiind distanțele punctelor la axa fixă, iar $\bar{\omega}$ = vectorul viteză unghiulară, coliniar cu axa (Δ).

Teorema II-a a lui Koenig. Energia cinetică a unui sistem oarecare¹ de puncte materiale, în raport cu un reper fix, este egală cu energia cinetică a centrului de masă, în care se presupune concentrată întreaga masă ($m = \sum_{i=1}^n m_i$) a sistemului, adunată cu energia cinetică a sistemului în raport cu reperul care are originea în C , centrul de masă al sistemului, și cu axele paralele cu cele fixe (fig. 15.A.5), adică :

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + E_c. \quad (15.16, d)$$

Ca aplicație, energia cinetică a unui solid rigid în mișcare plan-paralelă se calculează cu relația :

$$E_o = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2, \quad (15.16, e)$$

unde J_c este momentul de inerție al solidului în raport cu axa care trece prin C , paralelă cu axa instantanee de rotație (Δ , $\bar{\omega}$) din momentul considerat.

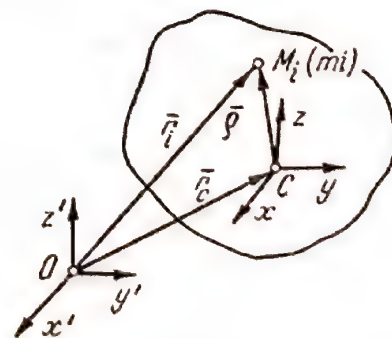


Fig. 15.A.5

¹ chiar deformabil.

Caz particular (fig. 15.A.6): energia cinetică a unui disc circular omogen de rază R și masă M care se rostogolește fără să alunece pe o dreaptă, este egală cu:

$$E_c = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2,$$

unde: $J_c = \frac{1}{2} M R^2$ iar $v_c = R\omega$ (condiția de rostogolire fără alunecare).

Rezultatul final este:

$$E = \frac{3}{4} M v_c^2 = \frac{3}{4} M R^2 \omega^2 = \frac{1}{2} J_c \omega^2, \quad (15.17)$$

unde $J_c = \frac{3}{2} M R^2$ = momentul de inerție al discului în raport cu I , centrul instantaneu de rotație.

Lucrul mecanic al forțelor.

În general, lucrul mecanic elementar al unei forțe $\vec{F}(X, Y, Z)$ pentru deplasarea punctului ei de aplicație M , reprezentată prin $d\vec{r}(dx, dy, dz)$, adică:

$$L = \vec{F} d\vec{r} = Xdx + Ydy + Zdz \quad (15.18)$$

nu este o diferențială exactă.

Condițiile necesare și suficiente pentru ca (15.18) să fie o diferențială exactă sînt:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}; \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}; \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}. \quad (15.19)$$

Se poate găsi o funcție $U(x, y, z)$ depinzînd explicit numai de coordonatele punctului M , astfel ca:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (15.20)$$

$$\vec{F} = \text{grad } U(x, y, z). \quad (15.21)$$

Funcția $U(x, y, z)$ din care derivă \vec{F} se numește funcție de forță, iar

$$\vec{F} d\vec{r} = dU(x, y, z).$$

Lucrul mecanic total al forței \vec{F} pentru deplasarea finită a punctului de aplicație M , între $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și $M_1(x_1, y_1, z_1)$, este

$$L_{0-1} = \int_{M_0}^{M_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{M_0}^{M_1} dU = U(x_1, y_1, z_1) - U(x_0, y_0, z_0) = U_1 - U_0. \quad (15.22)$$

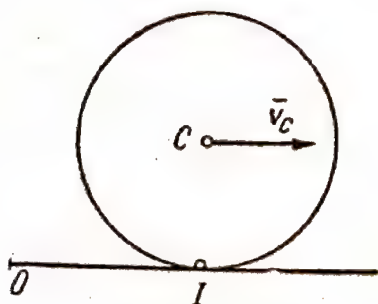


Fig. 15.A.6

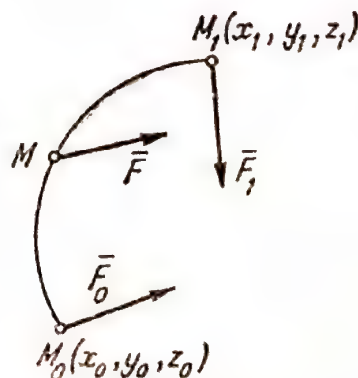


Fig. 15.A.7

și nu depinde de drumul parcurs și nici de legea după care se mișcă punctul de aplicare al forței, ci depinde numai de punctele extreme ale traiectoriei (fig. 15.A.7).

Caz particular: lucrul mecanic al greutateii nu depinde de drumul parcurs de un punct material sau de centrul de masă al unui solid rigid în care se presupune concentrată toată masa solidului, nici de legea mișcării și este egală cu produsul *greutății* și diferența de nivel h dintre poziția inițială și cea finală a punctului sau centrului de masă.

Observații.

Lucrul mecanic al greutateii este *pozitiv* dacă poziția inițială este la un nivel superior poziției finale, este *negativ* dacă poziția inițială este la un nivel inferior și este nulă dacă poziția inițială se află la același nivel cu poziția finală.

Lucrul mecanic pozitiv se numește *motor*, lucrul mecanic negativ se numește *rezistent*.

Lucrul mecanic elementar al unei forțe aplicată într-un punct al unui solid rigid în mișcare de rotație cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$ în jurul axei fixe (Δ) este:

$$\Delta L = \bar{M}_0 \frac{\bar{\omega}}{|\bar{\omega}|} d\theta = M_{\Delta} d\theta, \quad (15.23)$$

unde \bar{M}_0 este momentul forței în raport cu un punct O al axei, M_{Δ} este scalarul momentului forței în raport cu axa, pozitiv dacă \bar{M}_{Δ} are același sens cu axa și negativ dacă \bar{M}_{Δ} este de sens contrar cu axa, iar $d\theta =$ unghiul elementar de rotație.

Lucrul mecanic al unui cuplu de forțe cu momentul \bar{M} care acționează un solid rigid în mișcare de rotație cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$ în jurul unei axe fixe (Δ) este:

$$\Delta L = \bar{M} \frac{\bar{\omega}}{|\bar{\omega}|} d\theta = M_{\Delta} d\theta = \bar{M} \bar{\omega} dt, \quad (15.23, b)$$

unde M_{Δ} este scalarul proiecției momentului cuplului pe direcția axei.

Puterea unui agent

Un sistem material oarecare poate acționa asupra unui punct material printr-o forță rezultantă \bar{F} , iar asupra unui solid rigid printr-un torsesor, adică printr-o forță \bar{R} și printr-un cuplu de moment \bar{M} .

Sistemul material care acționează se numește agent. Un agent este cu atât mai puternic, cu cât produce în *unitatea de timp* un lucru mecanic mai mare.

Prin definiție, puterea agentului notată cu P este:

$$P = \frac{\Delta L}{dt}.$$

Agentul acționează prin forța \bar{F} ; puterea este:

$$P = \frac{F d\bar{r}}{dt} = \bar{F} \cdot \bar{v}, \quad (15.24)$$

unde \bar{v} este viteza în momentul t al punctului acționat.

Agentul acționează asupra unui solid rigid, în mișcare de rotație în jurul unei axe fixe (Δ), cu viteza unghiulară $\bar{\omega}$, printr-un cuplu de moment \bar{M} ; expresia puterii agentului este:

$$P = \bar{M} \cdot \bar{\omega}. \quad (15.25)$$

Unitatea de putere în sistemul SI este: $\frac{1\text{J}}{\text{s}} = 1\text{W}$ (watt).

15.B. APLICAȚII LA CALCULUL MĂRIMILOR DINAMICE

15.B.1. Să se calculeze momentul de inerție al unei bare drepte în raport cu extremitatea O și în raport cu centrul de greutate C , dacă densitatea are o variație liniară în lungul axei Ox (fig. 15.B.1). Se cunoaște că $\rho(0) = \rho_1$ și $\rho(l) = \rho_2$, l fiind lungimea barei. Se va considera cazul particular al barei omogene $\rho(x) = \rho = \text{const.}$

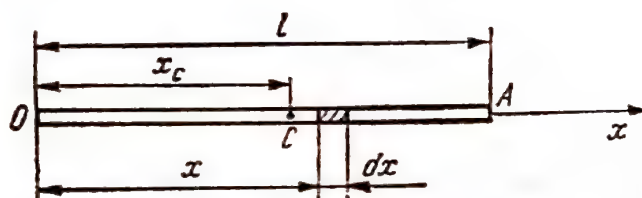


Fig. 15.B.1

Rezolvare. Prin definiție $J_0 = \int_0^l x^2 dm$.

Din figură rezultă: $dm = \rho(x)dx$,

unde: $\rho_x = \rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{l} x$, reprezintă densitatea liniară într-un punct al barei. Cu aceste notații rezultă:

$$J_0 = \int_0^l \left(\rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{l} x \right) x^2 dx = \frac{l^3}{12} (\rho_1 + 3\rho_2).$$

Introducând masa barei $m = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} l$, se obține:

$$J_0 = \frac{ml^2}{6} \frac{\rho_1 + 3\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}.$$

Pentru calculul momentului de inerție față de centrul maselor se aplică teorema lui Steiner:

$$J_C = J_0 - mx_C^2,$$

unde distanța de la O la centrul maselor C al barei este dată de:

$$x_C = l \frac{\rho_1 + 2\rho_2}{3(\rho_1 + \rho_2)}.$$

Astfel, se obține:

$$J_c = \frac{ml^2[(\rho_1 + \rho_2)^2 + 2\rho_1\rho_2]}{18(\rho_1 + \rho_2)^2}.$$

Pentru cazul particular al barei omogene ($\rho_1 = \rho_2 = \rho$), rezultă:

$$J_0 = \frac{ml^2}{3}; \quad x_e = \frac{l}{2} \quad \text{și} \quad J_c = \frac{ml^2}{12}.$$

15.B.2. Să se determine momentul de inerție polar față de O al barei omogene de masă m din figura 15.B.2.

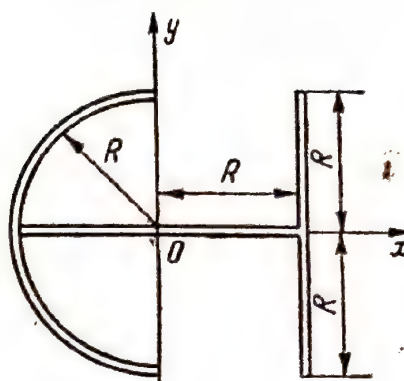
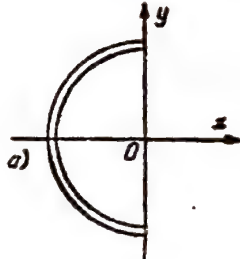
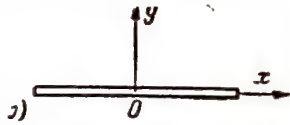
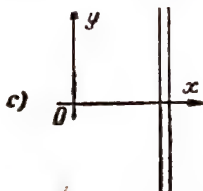


Fig. 15.B.2

Rezolvare. Se împarte figura în trei părți distincte. Calculele sînt date sub formă de tabel.

Fig. 15.B.2, a		$J_{10} = m_1 R^2 = \frac{\pi m}{4 + \pi} R^2$
Fig. 15.B.2, b		$J_{20} = m_2 \frac{4R^2}{12} = \frac{2m}{4 + \pi} \frac{4R^2}{12}$
Fig. 15.B.2, c		$J_{30} = m_2 \frac{4R^2}{12} + m_2 R^2 = \frac{2m}{4 + \pi} \frac{4R^2}{3}$

Momentul de inerție al corpului, obținut prin însumarea celor trei momente parțiale, este:

$$J_0 = \frac{mR^2(10 + 3\pi)}{3(4 + \pi)}.$$

15.B.3. Să se calculeze momentele de inerție axiale pentru o placă triunghiulară omogenă de bază b și înălțime h . Să se determine momentele de inerție centrale față de axele cu originea în C , paralele cu cele date (fig. 15.B.3). Se vor aplica rezultatele obținute la un triunghi isoscel ($OB = BA$).

Rezolvare.

$$J_x = \int_{(c)} y^2 dm, \text{ unde } dm = b_1 dy \rho.$$

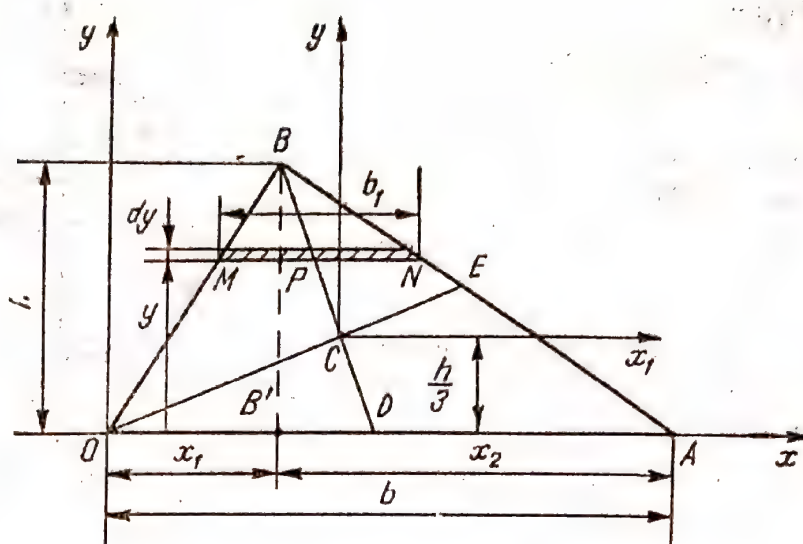


Fig. 15.B.3

Din asemănarea triunghiurilor OAB și MNB rezultă :

$$MN = OA \frac{BP}{BB'} = b \frac{h-y}{h}.$$

De aici

$$dm = \rho b \frac{h-y}{h} dy.$$

Rezultă :

$$J_x = \int_0^h \rho b \frac{h-y}{h} y^2 dy = \frac{bh^3}{12} \rho = m \frac{h^2}{6},$$

unde $m = \rho \frac{bh}{2}$ reprezintă masa plăcii.

Aplicînd formula lui Steiner, rezultă :

$$J_y = J_x - m \left(\frac{h}{3} \right)^2 = \frac{mh^2}{18}.$$

Pentru obținerea lui J_y se calculează momentele de inerție ale porțiunilor OBB' și BAB' ale triunghiului, utilizînd pentru fiecare în parte formula lui Steiner, prin considerarea în fiecare centru de greutate parțial a unei axe paralele cu Oy . S-au notat : $OB' = x_1$ și $B'A = x_2$. Rezultă :

$$J_y = \left[m_1 \frac{x_1^2}{18} + m_1 \left(\frac{2x_1}{3} \right)^2 \right] + \left[m_2 \frac{x_2^2}{18} + m_2 \left(x_1 + \frac{x_2}{3} \right)^2 \right];$$

$$J_{y_1} = J_y - m \left(\frac{b+x_1}{3} \right)^2; \quad m = m_1 + m_2.$$

Dacă triunghiul este isoscel, $x_1 = x_2 = \frac{b}{2}$; $m_1 = m_2 = \frac{m}{2}$ și rezultă :

$$J_y = \frac{7mb}{24}, \quad J_{y_1} = \frac{mb^3}{24}.$$

15.B.4. Să se determine momentele de inerție ale unei plăci circulare omogene de masă m și rază R în raport cu sistemul de axe dat în figura 15.B.4.

Rezolvare. Se calculează J_0 , a cărei expresie este :

$$J_0 = \int_{(e)} r^2 dm = \int_0^R 2\pi r^3 \rho dr = \frac{\pi R^4 \rho}{2} = \frac{mR^2}{2},$$

în care: $dm = 2\pi r dr \rho$; $m = \pi R^2 \rho$,
 ρ fiind densitatea de suprafață a plăcii.

Deoarece :

$$J_0 = J_z + J_y; \quad J_z = J_y,$$

rezultă :

$$J_z = J_y = \frac{mR^2}{4}.$$

Produsul de inerție $J_{xy} = 0$, axele alese fiind axe de simetrie ale plăcii.

15.B.5. Fiind dată piesa din figura 15.B.5, confecționată dintr-un material omogen de densitate ρ , să se determine momentul de inerție în raport cu axa Ox . Se dau valorile numerice: $a = 2$ cm, $b = 6$ cm, $c = 10$ cm, $l = 13$ cm, $d = 4$ cm, $\rho = 7,8$ kg/dm³.

Rezolvare. Se consideră figura formată din părți simple — paralelipiped și cilindri — care prin adaus sau extragere conduc la forma resultantă.

Calculul se efectuează în tabelul următor pentru cele patru corpuri ce compun piesa considerată: 1 — paralelipiped; 2 — semicilindru; 3 — cilindru gol; 4 — cilindru plin.

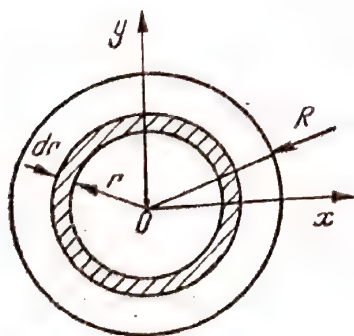


Fig. 15.B.4

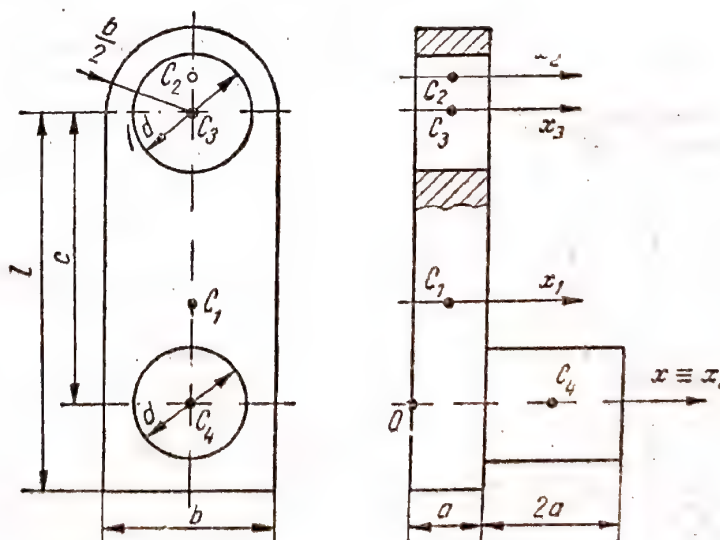


Fig. 15.B.5

Nr. i	J_{x_i}	J_x
1	$\frac{\rho a b l}{12} (b^2 + l^2)$	$J_{x_1} + \rho a b l \left(c - \frac{l}{2} \right)^2$
2	$\frac{1}{4} \frac{\pi b^3}{4} a \rho \left(\frac{b}{2} \right)^2 - \frac{\pi b^3}{4} a \rho \left(\frac{2b}{3} \right)^2$	$J_{x_2} + \frac{\pi b^3}{4} a \rho \left(c + \frac{2b}{3\pi} \right)^2$
3	$-\frac{\pi d^2}{4} a \rho \frac{d^2}{8}$	$-\left[J_{x_3} + \frac{\pi d^2}{4} a \rho c^2 \right]$
4	$\frac{\pi d^2}{4} 2a \rho \frac{d^2}{8}$	J_{x_4}

$$J_x = \sum_{i=1}^4 J_{x_i} = \frac{a b l \rho}{12} (b^2 + 4l^2 + 12c^2 - 12cl) +$$

$$+ \frac{\pi a b^3}{4} \rho \left(\frac{b^2}{16} + c^2 + \frac{4bc}{3\pi} \right) - \frac{\pi d^2 a \rho}{32} (8c^2 - d^2).$$

Cu valorile numerice rezultă: $J_x = 7,28 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

15.B.6. Să se determine momentul de inerție axial al unui disc de masă m , rază R și înălțime h în raport cu o axă care face unghiul θ în raport cu axa sa de simetrie (fig. 15.B.6).

Rezolvare: Fie axa de simetrie Oz ; axa față de care momentul de inerție trebuie calculat s-a notat $O\zeta$, fiind cuprinsă în planul yOz .

Cosinusurile directe ale axei $O\zeta$ față de sistemul $Oxyz$ sînt: $\cos \alpha = 0$, $\cos \beta = \sin \theta$, $\cos \gamma = \cos \theta$.

Expresia lui J_ζ este:

$$J_\zeta = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma - 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta -$$

$$- 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2J_{zx} \cos \gamma \cos \alpha.$$

Se consideră cunoscute momentele și produsele de inerție față de axele $Oxyz$:

$$J_x = J_y = \frac{m}{12} (3R^2 + 4h^2); \quad J_z = \frac{mR^2}{2};$$

$$J_{xu} = J_{yz} = J_{zx} = 0.$$

Făcînd înlocuirile, rezultă:

$$J = \frac{m}{12} (3R^2 + 4h^2) \sin^2 \theta + \frac{mR^2}{2} \cos^2 \theta.$$

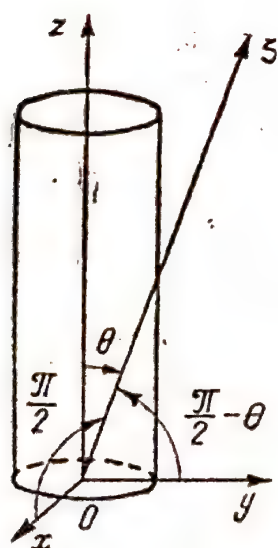


Fig. 15.B.6

15.B.7. O placă plană, omogenă, de greutate G , avînd forma unui triunghi echilateral de latură l (fig. 15.B.7) se rotește în jurul unei axe fixe, perpendiculară în O pe planul plăcii.

Se cer \bar{H} , \bar{K}_0 și E în mișcarea acestei plăci.

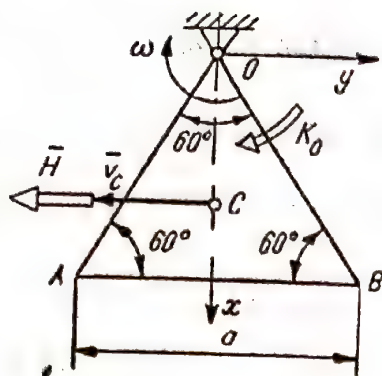


Fig. 15.B.7

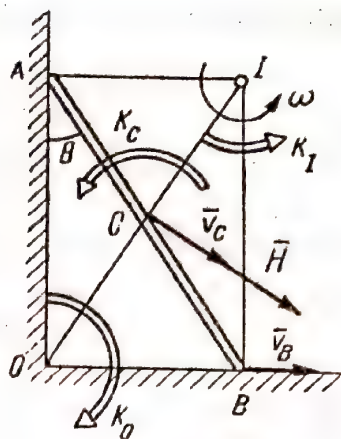


Fig. 15.B.8

Rezolvare. Centrul de greutate C este situat pe axa Ox de simetrie a plăcii, la distanța $OC = \frac{l\sqrt{3}}{3}$. Deci :

$$v_c = \frac{l\sqrt{3}}{3} \omega; \quad H = \frac{Gl\sqrt{3}}{3g} \omega;$$

$$J_0 = J_x + J_y; \quad J_x = \frac{Gl^2}{24g}; \quad J_y = \frac{3Gl^2}{8g}; \quad J_0 = \frac{5Gl^2}{12g}.$$

$$K_0 = \frac{5Gl^2}{12g} \omega; \quad E = \frac{5Gl^2}{24g} \omega^2.$$

15.B.8. O bară $AB = l$, omogenă, de greutate G se deplasează într-un plan vertical, extremitățile A și B mișcându-se de-a lungul a doi pereți ortogonali.

Cunoscându-se la un moment dat viteza capătului B , \bar{v}_B , să se determine cantitatea de mișcare, momentul cinetic în raport cu C , I și O și energia cinetică în mișcarea barei (v. fig. 15.B.8).

Rezolvare. Cunoscând \bar{v}_B , rezultă ω la un moment dat :

$$\omega = \frac{v_B}{IB} = \frac{v_B}{l \cos \theta}.$$

$$v_c = \omega IC = \frac{v_B}{2 \cos \theta}; \quad H = \frac{Gv_B}{2g \cos \theta}.$$

Vectorul \bar{K}_c este perpendicular pe planul mișcării și are valoarea :

$$K_c = J_c \omega = \frac{Gl^2}{12g} \frac{v_B}{l \cos \theta} = \frac{Gl v_B}{12g \cos \theta}.$$

Momentele cinetice în raport cu punctele I și O se calculează aplicând teorema I-a a lui Koenig între axe paralele :

$$\bar{K}_0 = \bar{K}_c + \overline{OC} \times M\bar{v}_c;$$

$$\bar{K}_I = \bar{K}_c + \overline{IC} \times M\bar{v}_c.$$

Făcînd calculele, rezultă modulele celor doi vectori:

$$K_0 = \frac{Gv_B}{6g \cos \theta}, \text{ în sens contrar lui } \vec{\omega};$$

$$K_1 = \frac{Gv_B}{3g \cos \theta}, \text{ în același sens cu } \vec{\omega}.$$

Pentru calculul energiei cinetice se utilizează teorema a II-a a lui Koenig:

$$E = \frac{1}{2} mv_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2 = \frac{Gv_B^2}{6g \cos^2 \theta}.$$

15.B.9. Berbecul unui ciocan cu aer comprimat cîntărind $Q = 1\,500\text{ N}$ este ridicat la înălțimea $h = 0,75\text{ m}$ de $n = 84$ ori pe minut. Să se calculeze puterea mașinii, dacă randamentul său este $\eta = 0,65$.

Rezolvare. Lucrul mecanic necesar pentru o ridicare este $L_1 = Qh = 1\,125\text{ J}$. Lucrul mecanic efectuat timp de un minut este $L = nL_1 = 94\,500\text{ J}$.

Puterea utilă a mașinii este $P_u = \frac{L}{60} = 1\,575\text{ W}$.

Puterea consumată de mașină este: $P_c = \frac{P_u}{\eta} = \frac{1\,575}{0,65} \approx 2,423\text{ kW}$.

15.B.10. Să se calculeze energia absorbită de la rețea timp de o oră și jumătate și valoarea cuplului la axul unui motor electric cu puterea utilă $P_u = 30\text{ kW}$, la turația $n = 900\text{ t/min}$ și randamentul $\eta = 0,8$.

Rezolvare. Puterea consumată este $P_c = \frac{P_u}{\eta} = 37\,500\text{ W}$. Energia absorbită în timpul $t = 5\,400\text{ s}$ este:

$$L_c = tP_c = 2,025 \cdot 10^8\text{ J} = 56,25\text{ kWR}$$

Momentul cuplului:

$$M = \frac{P_u}{\omega} = \frac{30P_u}{\pi n} = 318,5\text{ N.m.}$$

15.B.11. Un șurub cu pasul p , asimilat cu un cilindru plin de masă m și rază R are la un moment dat turația n rot/min. Să se calculeze energia cinetică a șurubului în momentul respectiv.

Rezolvare. În momentul considerat vectorii caracteristici ai mișcării, $\vec{\omega}$ și \vec{v}_0 , au următoarele mărimi:

$$\omega = \frac{\pi n}{30}; \quad v_0 = \frac{p}{2\pi} \omega = \frac{pn}{60}.$$

Aplicînd teorema lui Koenig referitoare la energia cinetică se obține expresia:

$$E = \frac{1}{2} mv_0^2 + \frac{1}{2} J_A \omega^2.$$

Prin înlocuirea lui v_0 și ω aceasta devine:

$$E = \frac{mn^2(p^2 + 2\pi^2 R^2)}{7\,200}.$$

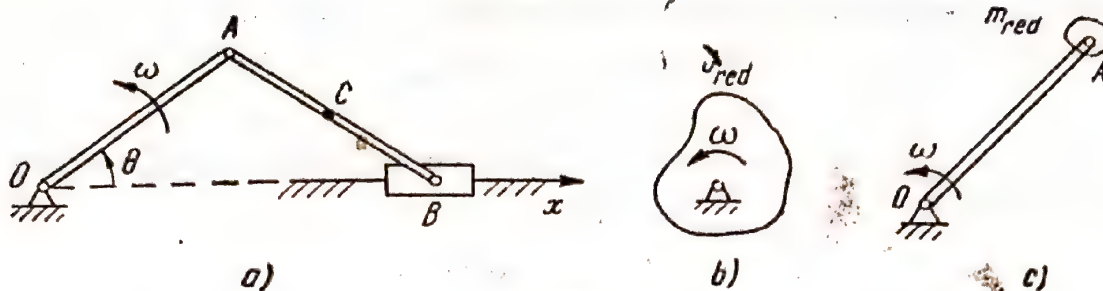


Fig. 15.B.12

15.B.12. Să se determine momentul de inerție redus la axa de rotație ce trece prin O (J_{red}) și masa redusă în articulația A a manivelei OA (m_{red}) pentru mecanismul bielă-manivelă-culisă din figura 15.B.12. Se cunosc dimensiunile $OA = AB = l$, masele fiecărei bare m , masa culisei M și poziția momentană a manivelei θ .

Rezolvare. Pentru anumite sisteme de corpuri mai complicate, studiul dinamic s-ar simplifica, dacă în locul sistemului dat s-ar considera un solid care să aibă aceeași energie cinetică și deci aceeași stare de mișcare cu întregul sistem de corpuri (mecanism sau mașină).

Se va considera că acest corp, numit element de reducere, este plasat pe axul unui element al mecanismului, are aceeași viteză unghiulară cu acesta și se caracterizează printr-un „moment de inerție redus”, notat J_{red} .

În majoritatea cazurilor reducerea se face pe axul elementului conducător al mecanismului. În figura 15.B.12b este reprezentat corpul cu J_{red} , plasat în punctul O .

De asemenea, poate fi introdusă în mod asemănător noțiunea de „masă redusă”, considerînd în articulația A a manivelei OA un punct material de masă m_{red} , a cărui energie cinetică în rotație față de O este aceeași cu energia cinetică a sistemului (fig. 15.B.12, b).

Noțiunile J_{red} și m_{red} au o largă aplicabilitate în dinamica mecanismelor și a mașinilor.

Pentru calculul energiei cinetice a sistemului din figura 15.B.12, a este necesar calculul prealabil al vitezelor punctelor C și B . Astfel:

$$x_c = \frac{3}{2}l \cos \theta; \quad \dot{x}_c = -\frac{3}{2}l\dot{\theta} \sin \theta = -\frac{3}{2}l\omega \sin \theta;$$

$$y_c = \frac{1}{2}l \sin \theta; \quad \dot{y}_c = \frac{1}{2}l\dot{\theta} \cos \theta = \frac{1}{2}l\omega \cos \theta;$$

$$x_B = 2l \cos \theta; \quad \dot{x}_B = -2l\dot{\theta} \sin \theta = -2l\omega \sin \theta.$$

Energiile cinetice ale celor trei corpuri componente — OA , AB și culisa din B — rezultă în ordine:

$$E_1 = \frac{1}{2} \frac{ml^2}{3} \omega^2;$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \frac{ml^2}{12} \omega^2 + \frac{1}{2} m \frac{l^2 \omega^2}{4} (1 + 8 \sin^2 \theta);$$

$$E_3 = \frac{1}{2} M 4l^2 \omega^2 \sin^2 \theta.$$

Energia cinetică totală a sistemului rezultă prin însumare:

$$E = \frac{1}{8} ml^2 \omega^2 (3 + 8 \sin^2 \theta).$$

Energia cinetică a sistemului calculată cu ajutorul lui J_{red} , plasat în O și avînd viteza unghiulară ω , este:

$$E' = \frac{1}{2} J_{red} \omega^2.$$

Egalînd E cu E' , rezultă:

$$J_{red} = \frac{ml^2}{4} (3 + 8 \sin^2 \theta).$$

Dacă se calculează energia cinetică a sistemului cu ajutorul lui m_{red} , plasat în punctul A , rezultă:

$$E'' = \frac{1}{2} m_{red} v_A^2 = \frac{1}{2} m (l\omega)^2.$$

Din egalitatea $E'' = E$, se obține:

$$m_{red} = \frac{m}{4} (3 + 8 \sin^2 \theta).$$

Relația dintre cele două mărimi reduse se obține cu ușurință din egalitatea $E' = E''$:

$$J_{red} = m_{red} (OA)^2.$$

15.B.13. Să se calculeze forța redusă la articulația A și momentul redus la axul O al elementului conducător, pentru mecanismul bielă-manivelă-culisă din figura 15.B.13, *a*. Asupra sistemului acționează momentul M și forța F ; se cunosc dimensiunile $OA = AB = l$, viteza unghiulară ω și poziția dată de unghiul θ .

R e z o l v a r e. Noțiunea de „forță redusă”, F_{red} , este utilizată în teoria mecanismelor și a mașinilor (15.B.13, *b*) și reprezintă forța de înlocuire în articulația A a elementului conducător, perpendiculară pe bara OA , a întregului sistem de forțe efectiv aplicate sistemului, astfel încît puterea momentană dată de sarcinile active și puterea forței reduse să fie egale.

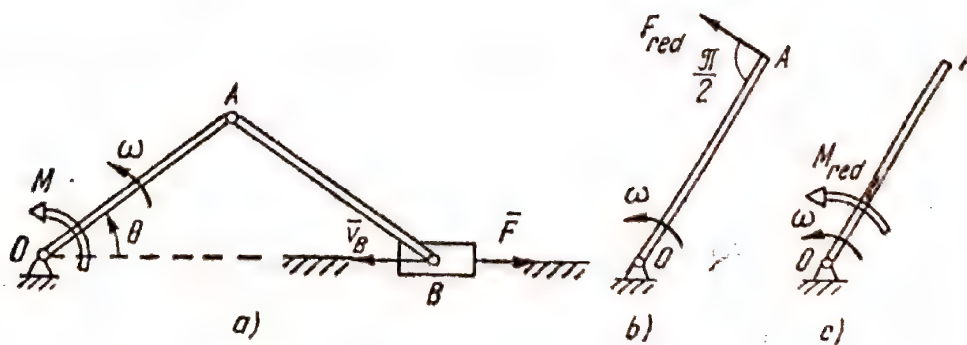


Fig. 15.B.13

În, mod similar se introduce noțiunea de „moment redus”, M_{red} (fig. 15.B.13, c), acesta fiind momentul de înlocuire la axul O , astfel ca puterea momentană dată de întregul sistem de sarcini active să fie egală cu puterea dată de momentul redus.

Puterea dezvoltată la un moment dat de sarcinile active care acționează asupra sistemului este :

$$P = M\omega - Fv_B = \omega(M - F2l \sin \theta).$$

$$P' = F_{red}v_A = F_{red}l\omega; \quad P'' = M_{red}\omega.$$

Din egalitățile $P' = P$ și $P'' = P$, rezultă :

$$F_{red} = \frac{1}{l} (M - 2Fl \sin \theta);$$

$$M_{red} = M - 2Fl \sin \theta.$$

TEOREMELE CANTITĂȚII DE MIȘCARE ȘI MOMENTULUI CINETIC

16.A. PREZENTARE TEORETICĂ

16.A.1. Teorema de variație a cantității de mișcare

Folosind aceleași notații de la Capitolul 15 (fig. 15.A.1) pentru sistemele de puncte materiale și cele de la Capitolul 3 (fig. 3.A.3) pentru sistemele continue, se poate stabili următoarea teoremă:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i, \quad \text{sau} \quad \dot{\bar{H}} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i, \quad (16.1)$$

sau:

$$d \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i dt. \quad (16.2)$$

Sub forma (16.1) teorema se enunță astfel:

derivata în raport cu timpul a cantității de mișcare a unui sistem de puncte materiale este egală cu suma vectorială a forțelor exterioare care acționează, în momentul considerat, asupra sistemului.

Sub forma (16.2) enunțul teoremei este:

diferențiala cantității de mișcare a unui sistem de puncte materiale, acționat de forțe un timp dt este egală cu suma vectorială a impulsurilor elementare ale forțelor exterioare aplicate sistemului.

Observații.

Teorema stabilită pentru un sistem de puncte materiale se extinde și asupra unui continuu material.

Deoarece nu se folosește, în demonstrația teoremei, de operația de alunecare a forțelor pe suporturile respective, adică, deoarece în demonstrație forțele sînt reprezentate prin vectori legați, teorema este aplicabilă și sistemelor materiale deformabile.

Forțele interioare nu influențează asupra cantității de mișcare totale a unui sistem material.

Dacă se proiectează cantitățile de mișcare și forțele exterioare pe cele trei axe ale triedrului $Oxyz$, se ajunge la ecuațiile scalare:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i v_{ix} &= \sum_{i=1}^n X_i = X; & \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i v_{iy} &= Y; \\ \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i v_{iz} &= Z \end{aligned} \quad (16.3)$$

ale teoremei de variație a cantității de mișcare.

16.A.2. Teorema de conservare a cantităţii de mişcare

Dacă sistemul de puncte materiale este izolat (forţele exterioare sînt nule) sau dacă suma vectorială a forţelor exterioare este nulă, rezultă:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i = \bar{c}, \quad (16.4)$$

deci, cantitatea de mişcare a sistemului se conservă.

Observaţii.

Această teoremă exprimă faptul că ecuaţia (16.4) este o integrală a sistemului de ecuaţii diferenţiale (15.1) privind mişcarea sistemului de puncte materiale.

Dacă sistemul de forţe exterioare, fără a avea o sumă nulă, are proiecţia vectorului sumă, pe una din cele trei axe, nulă, de pildă Ox , atunci proiecţia cantităţii de mişcare pe această axă se conservă, adică dacă:

$$\sum_{i=1}^n X_i = X = 0, \text{ atunci } H_x = \sum_{i=1}^n m_i v_{ix} = c. \quad (16.5)$$

Teorema conservării cantităţii de mişcare aplicată unui sistem izolat de două puncte materiale, cu masele m_1 şi m_2 , vitezele în momentul t : \bar{v}_1 şi \bar{v}_2 iar în momentul $t' > t$: \bar{v}'_1 şi \bar{v}'_2 , se exprimă prin:

$$m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 = m_1 \bar{v}'_1 + m_2 \bar{v}'_2,$$

adică:

$$m_2(\bar{v}'_2 - \bar{v}_2) = -m_1(\bar{v}'_1 - \bar{v}_1),$$

ecuaţie care se interpretează astfel:

modificarea într-un sens a cantităţii de mişcare a unui punct material este egală cu modificarea în sens opus a cantităţii de mişcare a celuilalt punct material. Aceasta justifică definiţia dată de Engels cantităţii de mişcare.

16.A.3. Teorema mişcării centrului de masă

Se ştie că poziţia centrului de masă al unui sistem de n puncte materiale $M_i(m_i)$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, în raport cu un reper cu originea O (în fig. 16.A.1) este dată de:

$$m \bar{r}_c = \sum_{i=1}^n m_i \bar{r}_i.$$

Prin două derivări succesive în raport cu timpul se obţin ecuaţiile:

$$m \bar{v}_c = \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i = \bar{H}. \quad (16.6)$$

şi

$$m \bar{a}_c = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i. \quad (16.7)$$

Prima ecuaţie are ca interpretare:

cantitatea de mişcare a unui sistem de puncte materiale este egală cu cantitatea de mişcare a

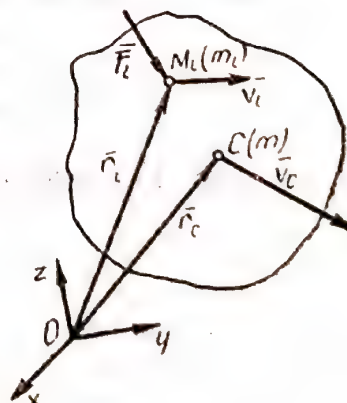


Fig. 16.A.1

centrului de masă al sistemului, dacă se presupune că în acest punct ar fi concentrată masa sistemului.

Cea de a doua ecuație reprezintă chiar teorema mișcării centrului de masă :

centrul de masă al unui sistem de puncte materiale se mișcă întocmai ca un punct material care ar avea masa sistemului și asupra căruia ar acționa toate forțele exterioare aplicate sistemului.

Observații.

Rezultatele se consideră aplicabile și sistemelor materiale continue și deformabile.

Forțele interioare nu influențează mișcarea centrului de masă.

Dacă sistemul material este izolat sau dacă forțele exterioare au o sumă nulă, centrul de masă al sistemului are o mișcare uniformă în raport cu un reper inerțial (mișcarea centrului de masă al sistemului solar).

16.A.4. Teorema de variație a momentului cinetic al unui punct material

Se demonstrează relația :

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{F} \quad (16.8)$$

care exprimă teorema de variație, adică :

derivata în raport cu timpul a momentului cinetic al unui punct material față de un punct fix este egală cu momentul față de același punct al rezultantei forțelor aplicate punctului.

Din (16.8), înmulțind scalar cu \vec{u} , versorul unei axe (Δ) care trece prin punctul fix O , se obține :

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{v})\vec{u} = (\vec{r} \times \vec{F})\vec{u}$$

și se deduce teorema de variație a momentului cinetic în raport cu o axă fixă.

16.A.5. Teorema de variație a momentului cinetic al unui sistem de puncte materiale

Se demonstrează următoarele :

$$\dot{\vec{K}}_0 = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{M}_0 \quad (16.9)$$

și pe baza notațiilor cunoscute :

$$\dot{\vec{K}}_0 = \vec{M}_0, \text{ respectiv } \dot{K}_\Delta = M_\Delta,$$

adică : derivata, în raport cu timpul, a momentului cinetic al unui sistem de puncte materiale, față de un punct fix sau față de o axă fixă, este egală cu momentul resultant, față de punct sau axă, al forțelor exterioare aplicate sistemului de puncte materiale.

Observații.

Se consideră extinsă aplicabilitatea teoremei și asupra unui sistem material continuu.

Forțele interioare nu influențează asupra variației momentului cinetic.

Teorema momentului cinetic în raport cu o axă fixă are și o expresie scalară preferabilă în aplicații.

Dacă sistemul material este nedeformabil și are o mișcare de rotație în jurul axei fixe și dacă J_{Δ} este momentul de inerție al sistemului în raport cu axa, $\dot{\omega}$ cu scalarul ω reprezintă viteza unghiulară, iar \bar{M}_{Δ} cu scalarul M_{Δ} este momentul resultant față de axă al forțelor, relația:

$$J_{\Delta} \cdot \dot{\omega} = M_{\Delta} \quad (16.10)$$

rezultată din aplicarea teoremei este ecuația fundamentală a mișcării unui solid rigid cu o axă fixă (Δ).

Ea îndeplinește același rol ca și ecuația $m\bar{a} = \bar{F}$ în mișcarea de translație a solidului rigid.

Scriind (16.10) sub forma:

$$\dot{\omega} = \frac{M_{\Delta}}{J_{\Delta}},$$

se găsește justificarea definiției date momentului de inerție în raport cu axa (Δ) ca: *măsura inerției solidului rigid în mișcarea de rotație în jurul axei (Δ).*

16.A.6. Teorema momentului cinetic în raport cu centrul de masă

Se demonstrează următoarea teoremă auxiliară¹:

momentul cinetic al unui sistem de puncte materiale față de un punct fix este egal cu momentul cinetic al centrului de masă în care ar fi concentrată masa sistemului, adunat cu momentul cinetic al sistemului în mișcarea sa în raport cu un reper cu originea în centrul de masă și cu axele paralele cu cele ale reperului fix, adică:

$$\bar{K}_0 = \bar{r} \times m\bar{v}_c + \bar{K}_c; \quad (16.11)$$

din aceasta se deduce:

$$\dot{\bar{K}}_c = \Sigma \bar{p}_i \times \bar{F}_i = \bar{M}_c \quad (16.12)$$

unde \bar{p}_i este vectorul de poziție al punctului de masă m_i în raport cu reperul cu originea în centrul de masă.

Ecuația (16.12) extinde valabilitatea teoremei momentului cinetic și față de centrul de masă al sistemului.

16.A.7. Teorema de conservare a momentului cinetic

Dacă sistemul de puncte materiale este izolat sau este astfel acționat încît momentul resultant, față de punctul fix O, al forțelor exterioare aplicate sistemului este tot timpul nul,

$$\bar{K}_0 = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i = \bar{C}, \quad (16.13)$$

momentul cinetic față de O se conservă.

¹ Este teorema I a lui Koenig (1712–1757) matematician olandez.

Observație.

Această teoremă exprimă faptul că ecuația (16.13) este încă o *integrală primă* a sistemului de ecuații diferențiale (15.1) privind mișcarea sistemului de puncte materiale.

Dacă momentul resultant al forțelor exterioare aplicat unui sistem de puncte materiale, față de axa fixă (Δ), este nul, momentul cinetic al sistemului în raport cu axa (Δ) se conservă.

Dacă se alege ca reper una din axele sistemului $Oxyz$, de pildă Oz , conservarea momentului cinetic față de această axă se exprimă prin relația:

$$K_z = \sum_{i=1}^n (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) m_i = 2 \sum_{i=1}^n m_i \Omega_i = C, \quad (16.14)$$

adică *legea ariilor*. Dacă în timpul mișcării unui sistem de puncte materiale, momentul resultant al forțelor exterioare față de o axă fixă este nul, proiecțiile punctelor sistemului pe un plan perpendicular pe axa fixă se mișcă astfel încît suma produselor maselor punctelor cu vitezele areolare ale proiecțiilor lor, în raport cu intersecția axei cu planul, este constantă.

Observație.

Un caz particular al acestei legi se întâlnește la mișcarea punctului material acționat de o forță centrală.

16.B. APLICAȚII LA TEOREMELE CANTITĂȚII DE MIȘCARE ȘI MOMENTULUI CINETIC

16.B.1. Să se determine traiectoria unui punct material de greutate \bar{G} , aruncat din vârful unei clădiri de înălțime h cu viteza \bar{v}_0 orizontală (fig. 16.B.1).

Rezolvare. Asupra punctului material în mișcare, neglijînd rezistența aerului, acționează o singură forță: greutatea \bar{G} . Cu teorema cantității de mișcare se obține pentru un moment oarecare t al mișcării:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \bar{G} \quad \text{sau} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\bar{G}}{g} \bar{v} \right) = \bar{G}.$$

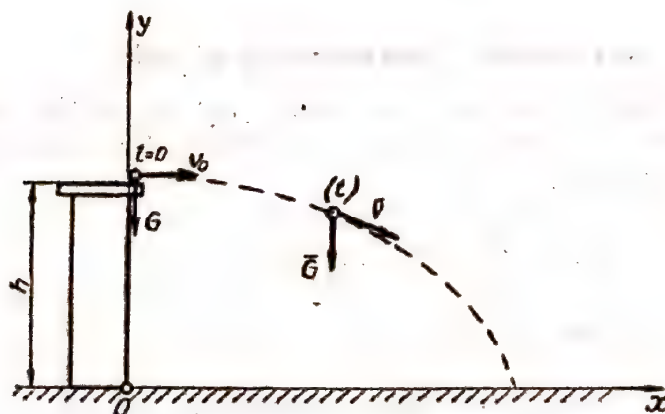


Fig. 16.B.1

Proiectind pe axele xOy , rezultă :

$$\begin{aligned}\dot{H}_x &= \frac{d}{dt} \left(\frac{G}{g} \dot{x} \right) = 0; \quad \frac{G}{g} \ddot{x} = 0; \\ \dot{H}_y &= \frac{d}{dt} \left(\frac{G}{g} \dot{y} \right) = -G; \quad \frac{G}{g} \ddot{y} = -G.\end{aligned}$$

Prin integrare :

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 0; \quad \dot{x} = C_1; \quad x = C_1 t + C_2, \\ \ddot{y} &= -g; \quad \dot{y} = -gt + C_3; \quad y = -g \frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4.\end{aligned}$$

Determinarea constantelor de integrare se face cu ajutorul condițiilor inițiale :

la :

$$\begin{aligned}t &= 0; \quad x = 0; \quad v_x = \dot{x} = v_0; \\ y &= h; \quad v_y = \dot{y} = 0.\end{aligned}$$

Deci :

$$\begin{aligned}C_2 &= 0; \quad C_1 = v_0; \\ C_4 &= h; \quad C_3 = 0.\end{aligned}$$

Înlocuind în expresiile lui x și y , se găsesc ecuațiile parametrice ale traiectoriei :

$$x = v_0 t; \quad y = -g \frac{t^2}{2} + h.$$

Eliminând parametrul t se obține ecuația traiectoriei :

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2} + h.$$

16.B.2. Două corpuri A și B de greutate \bar{P} și \bar{Q} legate printr-un fir, care trece peste un scripete fără greutate, pot aluneca pe fețele unei prisme fixe, coeficientul de frecare fiind μ . Să se afle accelerația a , cu care se mișcă sarcinile, dacă se cunosc unghiurile α și β (fig. 16.B.2).

R e z o l v a r e. Se izolează corpurile de legături. Asupra lui A acționează : greutatea \bar{P} , reacțiunea normală \bar{N}_1 , tensiunea din fir \bar{S}_1 și forța de frecare \bar{T}_1 . Se presupune că A urcă pe plan cu viteza v . Asupra lui B

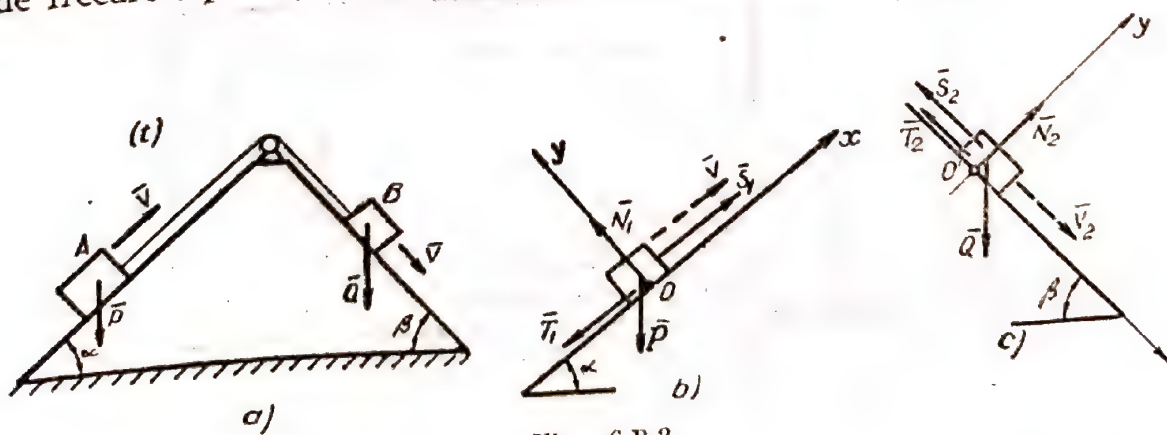


Fig. 16.B.2

acționează: greutatea \bar{Q} , tensiunea din fir \bar{S}_2 egală în modul cu \bar{S}_1 , forța de frecare \bar{T}_2 și reacțiunea normală \bar{N}_2 . B coboară cu viteza \bar{v}_2 egală în modul cu \bar{v}_1 , datorită legăturii cu fir. Aplicând corpurilor teorema cantității de mișcare, se obține:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{P}{g} \bar{v}_1 \right) = \bar{P} + \bar{S}_1 + \bar{N}_1 + \bar{T}_1, \text{ unde: } |\bar{v}_1| = |\bar{v}_2| = v;$$

$$|\bar{S}_1| = |\bar{S}_2| = S;$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{Q}{g} \bar{v}_2 \right) = \bar{Q} + \bar{S}_2 + \bar{N}_2 + \bar{T}_2.$$

Proiectând ecuațiile pe axele xOy , rezultă:

$$\frac{P}{g} a = -P \sin \alpha + S - T_1; \quad \frac{Q}{g} a = Q \sin \beta - T_2 - S;$$

$$0 = N_1 - P \cos \alpha; \quad 0 = N_2 - Q \cos \beta;$$

$$T_1 = \mu N_1; \quad T_2 = \mu N_2.$$

Scoțind S din fiecare sistem și egalând cele două relații, se obține:

$$a = g \frac{Q(\sin \beta - \mu \cos \beta) - P(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{P + Q}.$$

16.B.3. La capetele unei grinzi drepte omogene, de lungime l și greutate \bar{G} , care se mișcă pe un plan orizontal, neted, acționează de-a lungul axei sale două forțe \bar{P} și \bar{Q} . Să se afle accelerația grinzii și tensiunea într-o secțiune transversală oarecare, dacă $P > Q$ (fig. 16.B.3).

R e z o l v a r e. Asupra grinzii acționează greutatea \bar{G} , forțele \bar{P} și \bar{Q} date și reacțiunea normală \bar{N} a planului, necunoscută. Grinda se va deplasa în sensul lui \bar{P} , cu accelerația \bar{a} . Se aplică teorema cantității de mișcare:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \bar{P} + \bar{Q} + \bar{G} + \bar{N}.$$

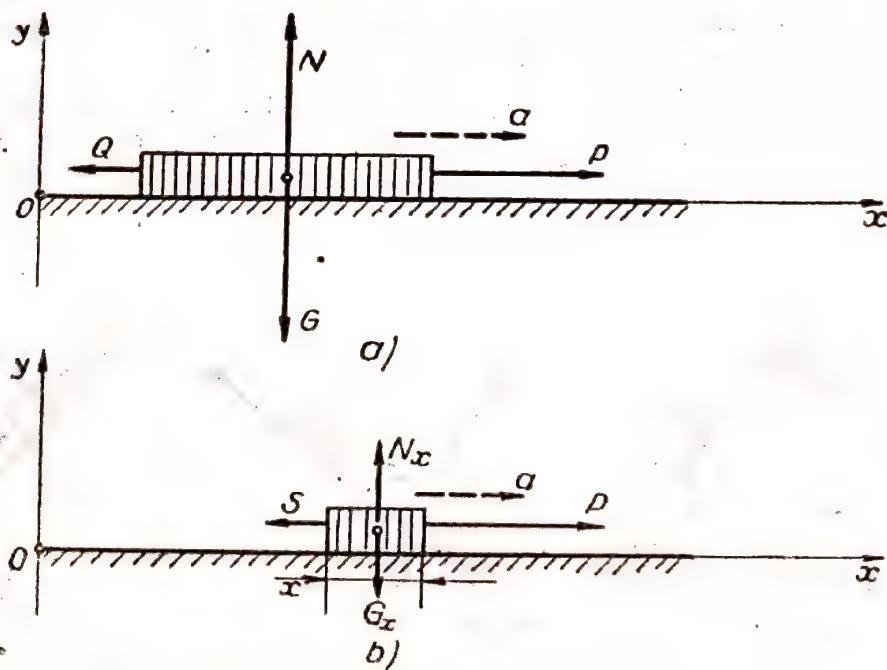


Fig. 16.B.3

Proiectând pe axele xOy ecuația vectorială, se obține :

$$\frac{G}{g} \cdot a = P - Q,$$

$$0 = N - G,$$

de unde :

$$N = G, \quad a = g \frac{P - Q}{G}.$$

Tensiunea, în secțiunea aflată la distanța x de punctul de aplicație al forței P , se determină izolând porțiunea de grindă de lungime x , deci de greutate $G_x = G \frac{x}{l}$ care se mișcă cu accelerația a , determinată. Aplicând teorema cantității de mișcare aici, rezultă :

$$\frac{d\bar{H}_1}{dt} = \bar{P} + \bar{S} + \bar{G}_x + \bar{N}_x.$$

Pe axele xOy se obține :

$$\frac{G}{g} \frac{x}{l} a = P - S,$$

de unde :

$$S = P - \frac{x}{l} (P - Q).$$

16.B.4. O pană de unghi α și greutate \bar{P} se sprijină cu o parte pe un perete vertical neted, iar cu cealaltă parte pe o prismă de greutate \bar{Q} , care alunecă fără frecare pe un plan orizontal. Să se determine accelerația \bar{a}_1 a penei și accelerația \bar{a}_2 a prisme (fig. 16.B.4).

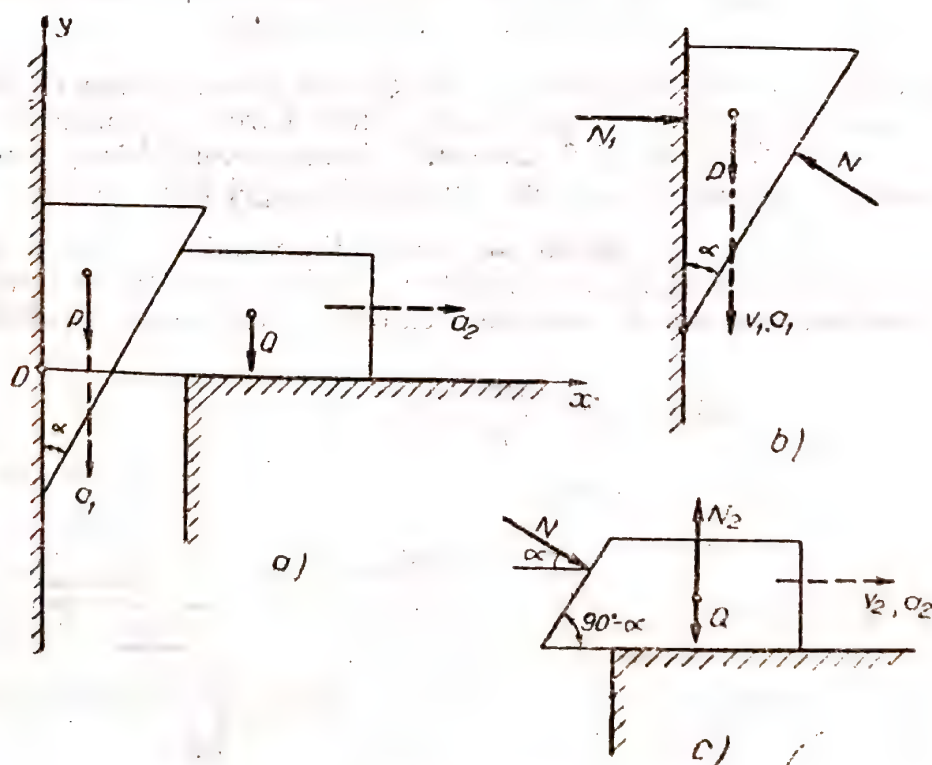


Fig. 16.B.4

Rezolvare. Se studiază mișcarea sistemului de corpuri în translație cu teorema cantității de mișcare aplicată separat fiecărui corp, după izolarea acestora și introducerea reacțiunilor normale \bar{N}_1 , \bar{N}_2 și \bar{N}' , \bar{N}'' . Scriind teorema cantității de mișcare pentru pană și prismă:

$$\frac{d\bar{H}_1}{dt} = \bar{P} + \bar{N}' + \bar{N}_1, \quad \frac{d\bar{H}_2}{dt} = \bar{Q} + \bar{N}'' + \bar{N}_2,$$

unde

$$|\bar{N}'| = |\bar{N}''| = N.$$

Față de axele xOy rezultă ecuațiile scalare:

pentru pană: $0 = N_1 - N \cos \alpha;$

$$-\frac{P}{g} a_1 = -P + N \sin \alpha;$$

pentru prismă: $\frac{Q}{g} a_2 = N \cos \alpha;$

$$0 = N_2 - Q - N \sin \alpha.$$

Sînt 4 ecuații cu 5 necunoscute. Se mai găsește o ecuație din faptul că vitezele celor două corpuri sînt dependente, corpurile rămînînd tot timpul în contact. Deci:

$$v_1 \sin \alpha = v_2 \cos \alpha$$

sau, prin derivare: $a_1 \operatorname{tg} \alpha = a_2.$

Rezolvînd ecuațiile rezultă:

$$a_1 = \frac{Pg}{P + Q \operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad a_2 = \frac{Pg \operatorname{tg} \alpha}{P + Q \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

16.B.5. Două bărci de greutateți egale \bar{Q} se deplasează una după alta la distanță mică, cu aceeași viteză \bar{v} . Din prima barcă se aruncă în cea de a doua o greutate \bar{G} cu viteza \bar{u} . Care sînt vitezele celor 2 bărci după aruncarea greutății, neglijînd rezistența aerului și a apei (fig. 16.B.5).

Rezolvare. Asupra sistemului format din cele două bărci de greutate \bar{Q} și a greutății \bar{G} acționează numai forțe verticale: greutatea și forțele arhimedice. Aplicînd teorema de variație a cantității de mișcare fiecărei bărci, rezultă:

$$\Sigma X_i = 0; \quad \frac{dH_z}{dt} = 0; \quad H_z = C_1.$$

Cantitatea de mișcare se conservă.

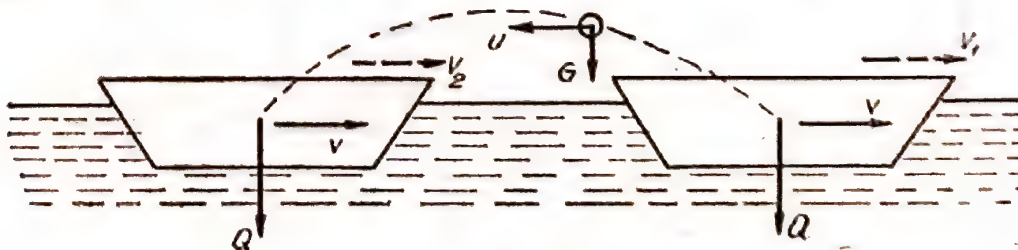


Fig. 16.B.5

Cu ajutorul condițiilor inițiale se găsește la $t = 0$ că $C_1 = (H_x)_0$ constanta de integrare :

— barca din față plus greutatea care pleacă din ea va avea :

$$(H_x)_0 = \frac{Q+G}{g} v; \quad H_x = \frac{Q}{g} v_1 + \frac{G}{g} (v - u),$$

de unde egalind :

$$v_1 = v + \frac{G}{Q} u;$$

— barca din spate plus greutatea care vine în ea va avea :

$$(H_x)_0 = \frac{Q}{g} v + \frac{G}{g} (v - u); \quad H_x = \frac{Q+G}{g} v_2;$$

egalind, rezultă :

$$v_2 = v - \frac{G}{Q+G} u.$$

16.B.6. Pe bancheta din mijloc a unei bărci se găsește doi oameni de greutate $P + Q$, unde ($P < Q$). Barca are greutatea \bar{G} și este în repaus. La un moment dat cei doi oameni se deplasează spre cele două capete ale bărcii, cu aceeași viteză v_1 . Să se determine viteza bărcii \bar{v} și direcția ei.

Rezolvare. Sistemul de corpuri barcă-oameni este acționat de forțe verticale. Deci :

$$\Sigma X_i = 0; \quad \frac{dH_x}{dt} = 0; \quad H_x = C_1 = \text{ct.}$$

În momentul inițial, cantitatea de mișcare a corpurilor este zero, deci :

$$t = 0; \quad (H_x)_0 = C_1 = 0.$$

Rezultă ecuația :

$$H_x = 0.$$

Notînd cu v viteza bărcii orientată în sensul de mișcare al corpului $Q > P$

$$H_x = \frac{G}{g} v + \frac{Q}{g} (v + v_1) + \frac{P}{g} (v - v_1) = 0,$$

de unde :

$$v = \frac{(P - Q)v_1}{G + Q + P} < 0.$$

Deci sensul de mișcare al bărcii este opus sensului ales.

16.B.7. Un om de greutate \bar{G} , care poartă în mîini greutatea \bar{P} sare cu viteza v_0 sub unghiul α față de orizontală. După atingerea înălțimii maxime, omul aruncă greutatea \bar{P} cu viteza relativă \bar{u} înainte. Cu cît se micșorează distanța săriturii datorită acestui fapt ?

Rezolvare. Ecuația de mișcare a omului este :

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \bar{G} + \bar{P}.$$

Proiectind pe orizontală și verticală, în raport cu un sistem de axe legat de punctul de unde face săritura, rezultă:

$$\frac{G+P}{g} \ddot{x} = 0 \quad \text{și} \quad \frac{G+P}{g} \ddot{y} = -(G+P),$$

deci:

$$\ddot{x} = 0; \quad \dot{x} = C_1; \quad x = C_1 t + C_2;$$

$$\ddot{y} = -g; \quad \dot{y} = -gt + C_3; \quad y = -g \frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4.$$

La momentul inițial, avem:

$$t = 0 \quad \dot{x} = v_0 \cos \alpha; \quad x = 0;$$

$$\dot{y} = v_0 \sin \alpha; \quad y = 0.$$

Deci:

$$C_1 = v_0 \cos \alpha; \quad C_2 = 0;$$

$$C_3 = v_0 \sin \alpha; \quad C_4 = 0.$$

Ecuatiile parametrice ale traiectoriei sînt:

$$x = (v_0 \cos \alpha)t; \quad y = -g \frac{t^2}{2} + (v_0 \sin \alpha)t.$$

Înălțimea maximă este:

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

iar abscisa ei:

$$x_A = \frac{x_{\max}}{2} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}.$$

În momentul aruncării greutății \bar{P} , se produce conservarea cantității de mișcare pe orizontală. Viteza omului devine v_1 :

$$\frac{P+G}{g} v_0 \cos \alpha = \frac{G}{g} v_1 + \frac{P}{g} (v_0 \cos \alpha + u),$$

de unde:

$$v_1 = v_0 \cos \alpha - \frac{P}{G} u.$$

Ecuatiile mișcării după atingerea punctului de înălțime maximă, în raport cu sistemul de axe ce are origina în abscisa punctului respectiv (A), sînt:

$$\ddot{x}_1 = 0; \quad \ddot{y}_1 = -g;$$

și integrînd ca în cazul precedent și cu condițiile inițiale,

$$t = 0; \quad x_1 = 0; \quad \dot{x}_1 = v_1;$$

$$y_1 = y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \quad \dot{y}_1 = 0;$$

rezultă :

$$x_1 = v_1 t, \quad y_1 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} - g \frac{t^2}{2},$$

de unde bătaia va fi :

$$x_{1M} = \frac{v_1 v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Distanța cu care scade săritura este :

$$\Delta x = x_{A1} - x_{1M} = \left(-v_0 \cos \alpha + \frac{P}{G} u \right) \frac{v_0 \sin \alpha}{g} + \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g};$$

$$\Delta x = \frac{P}{gG} v_0 u \sin \alpha.$$

16.B.8. Două puncte materiale de greutate \bar{P} și \bar{Q} se află la momentul inițial pe aceeași verticală, la distanțele a și b de pământ ($a < b$). Primul punct are viteza inițială zero, iar al doilea viteza \bar{v}_0 , pe orizontală. Se cere traiectoria centrului de masă al sistemului celor 2 puncte materiale.

Rezolvare. Se aplică teorema mișcării centrului de masă. La un moment oarecare t :

$$\frac{d}{dt} (M \bar{v}_c) = \bar{P} + \bar{Q}.$$

Alegînd solul drept axă Ox , iar verticala poziției inițiale a punctelor ca axă Oy , se obține :

$$\frac{P+Q}{g} \ddot{x}_c = 0 \quad \text{și} \quad \frac{P+Q}{g} \ddot{y}_c = -(P+Q).$$

Integrînd, rezultă :

$$\dot{x}_c = C_1; \quad \dot{y}_c = -gt + C_3;$$

$$x_c = C_1 t + C_2; \quad y_c = -g \frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4,$$

și se cunosc condițiile inițiale :

$$t = 0; \quad x_c = 0 \quad \text{și} \quad (\dot{v}_{c_y})_0 = 0$$

și

$$y_c = \frac{Pa + Qb}{P + Q} \quad \text{din teorema momentelor statice.}$$

Pentru găsirea vitezei $(v_{c_x})_0$ se aplică conservarea cantității de mișcare pe orizontală la momentul inițial :

$$\frac{Q}{g} v_0 = \frac{Q + P}{g} (v_{c_x})_0,$$

de unde :

$$(v_{c_x})_0 = \frac{Q}{Q + P} v_0.$$

Se determină constantele de integrare :

$$C_1 = \frac{Q}{Q+P} v_0; \quad C_4 = 0;$$

$$C_2 = 0; \quad C_4 = \frac{Pa + Qb}{P+Q},$$

deci ecuațiile parametrice ale mișcării centrului de masă sînt :

$$x_c = \frac{Q}{Q+P} v_0 t; \quad y_c = -g \frac{t^2}{2} + \frac{Pa + Qb}{P+Q}.$$

Eliminînd parametrul t , rezultă că centrul de masă al sistemului descrie o parabolă :

$$y_c = -\frac{g}{2} \frac{(Q+P)^2}{Q^2 v_0^2} x_c^2 + \frac{Pa + Qb}{P+Q}.$$

16.B.9. O barcă de greutate \bar{G} și lungime l stă în repaus atingînd cu prova debarcaderul. Un om care se găsește în acest moment la mijlocul bărcii se deplasează spre mal. Să se determine cu ce distanță se va depărta barca de debarcader, greutatea omului fiind \bar{P} (fig. 16.B.9).

Rezolvare. Se aplică teorema mișcării centrului de masă al sistemului :

$$\frac{d}{dt} (M \bar{v}_c) = \bar{P} + \bar{G} + \bar{N},$$

unde \bar{N} este forța arhimedică exercitată de apă asupra bărcii. Proiectînd pe axele xOy se observă că pe orizontală se produce conservarea cantității de mișcare :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{P+G}{g} v_{cx} \right) = 0; \quad v_{cx} = C_1.$$

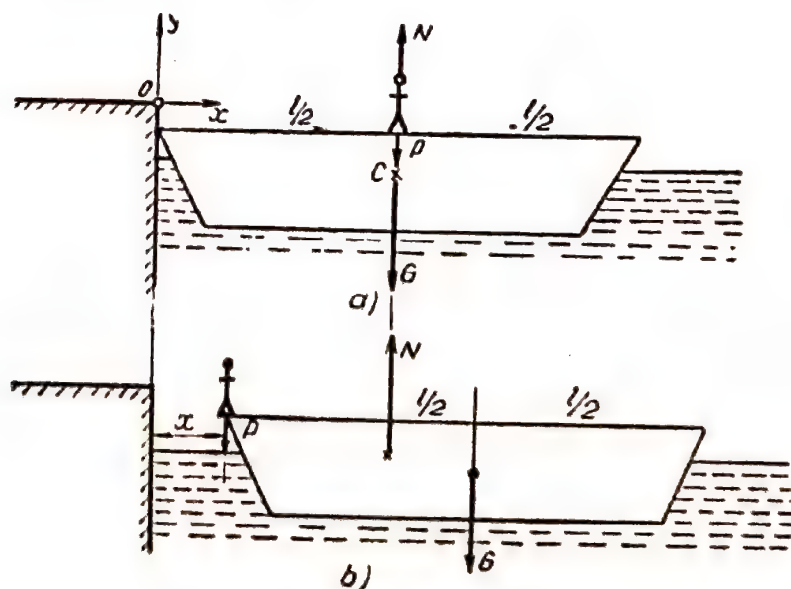


Fig. 16.B.9

Deoarece la momentul inițial sistemul era în repaus, rezultă :

$$t = 0; \quad (v_{c_x})_0 = C_1 = 0,$$

deci rămîne :

$$v_{c_x} = 0.$$

În raport cu axele xOy , viteza centrului este :

$$v_{c_x} = \dot{x}_c = 0,$$

de unde :

$$x_c = C_2 = \text{ct.}$$

Teorema momentelor statice permite determinarea constantei, deci :

$$x_c = l/2.$$

Centrul de masă al sistemului va rămîne deci în repaus, indiferent ce mișcări vor executa corpurile din sistem. Cînd omul se va deplasa la prova bărcii, barca se deplasează cu x :

$$Px + G\left(\frac{l}{2} + x\right) = x_c(P + G),$$

de unde :

$$x_c = \frac{Px + G(l/2 + x)}{P + G}.$$

Punînd condiția să avem același centru de masă ca în cazul precedent, rezultă :

$$x = \frac{Pl}{2(P + G)}.$$

16.B.10. Un pendul este lăsat să oscileze în planul vertical, din poziția inițială OM_0 (fig. 16.B.10).

Cunoscînd masa m a punctului material și lungimea l a firului, să se determine perioada micilor oscilații.

R e z o l v a r e. Se izolează punctul material, asupra căruia vor acționa greutatea mg și tensiunea în fir S . Se aplică teorema de variație a momentului cinetic în raport cu centrul de rotație O :

$$J_0 \dot{\omega} = -mgl \sin \theta,$$

unde : $J_0 = l^2 m$ este momentul de inerție al punctului material în raport cu O .

Înlocuind $\dot{\omega} = \ddot{\theta}$, rezultă ecuația diferențială a pendulului simplu :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0,$$

Deoarece în cazul micilor oscilații $\sin \theta \approx \theta$, ecuația devine :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0.$$

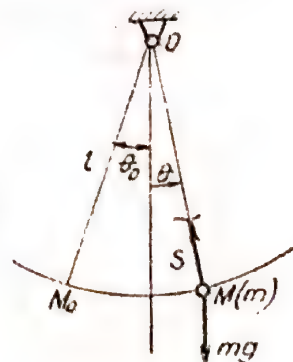


Fig. 16.B. 0

Integrala generală este :

$$\theta = C_1 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t.$$

Punînd condițiile inițiale, rezultă constantele de integrare :

$$C_1 = \theta_0; \quad C_2 = 0.$$

Înlocuind, se obține ecuația :

$$\theta = \theta_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t,$$

care reprezintă o mișcare oscilatorie armonică cu perioada :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_p}.$$

Cum $\omega_p = \sqrt{\frac{g}{l}}$, rezultă : $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.

16.B.11. O bară OA omogenă, de greutate P și de lungime l , avînd o articulație fixă la capătul O , este lăsată să cadă fără viteză inițială din poziția orizontală (fig. 16.B.11). Să se determine viteza unghiulară și accelerația unghiulară în mișcarea de rotație a barei.

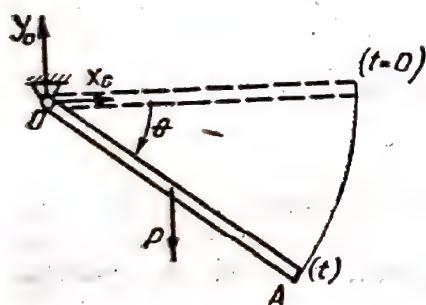


Fig. 16.B.11

Rezolvare. Se aplică teorema de variație a momentului cinetic în raport cu axa perpendiculară în O pe planul mișcării :

$$J_0 \dot{\omega} = P \frac{l}{2} \cos \theta, \quad \text{unde} \quad J_0 = \frac{P}{g} \frac{l^2}{3}.$$

Rezultă :

$$\dot{\omega} = \frac{3g}{2l} \cos \theta,$$

$$\text{dar: } \dot{\omega} = \ddot{\theta}; \quad \text{deci: } \ddot{\theta} = \frac{3g}{2l} \cos \theta.$$

Înmulțind cu 2θ și integrînd, se obține :

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l} \sin \theta}.$$

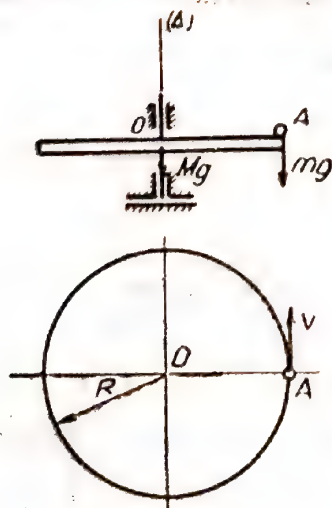


Fig. 16.B.12

16.B.12. Un disc omogen de masă M și rază R , aflat în repaus, se poate roti într-un plan orizontal în jurul unei axe Δ , perpendiculară în centrul O pe planul discului. Pe periferie se găsește un punct material de masă m . Punctul pornește din poziția A și se deplasează pe periferia discului cu viteza v (fig. 16.B.12). Să se determine viteza unghiulară ω a discului, funcție de v .

Rezolvare. Fiind paralele cu axa (Δ), forțele exterioare vor avea momente nule în raport cu aceasta. Se va aplica deci teorema conservării momentului cinetic al sistemului disc-punct material, în raport cu axa (Δ), în ipoteza că mișcările au același sens:

$$\frac{MR^2}{2} \omega + Rmv_a = C = 0,$$

unde v_a este viteza absolută a punctului.

Cum $\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t$,

unde $|\bar{v}_r| = v$ și $|\bar{v}_t| = \omega R$, vectorii \bar{v}_r și \bar{v}_t fiind coliniari, rezultă:

$$\frac{MR^2}{2} \omega + Rm(v + \omega R) = 0.$$

De unde:

$$\omega = -\frac{2mv}{(M + 2m)R},$$

adică rotația discului se produce în sens contrar mișcării punctului material, viteza unghiulară fiind proporțională cu viteza relativă a punctului.

16.B.13. Un disc omogen de masă M și rază R se rotește într-un plan orizontal în jurul unei axe Δ , perpendiculară în centrul O pe planul discului. În momentul inițial, când viteza unghiulară a discului este ω_0 , un punct material de masă m începe să se deplaseze pornind din centrul discului pe raza OA cu viteza v constantă (fig. 16.B.13). Să se calculeze viteza unghiulară a discului în funcție de distanța r a punctului de centrul O , în ipoteza că se neglijează frecările.

Rezolvare. Forțele exterioare fiind paralele cu axa (Δ), momentele lor în raport cu aceasta sînt nule. Se va aplica deci teorema conservării momentului cinetic al sistemului disc-punct material, în raport cu axa (Δ).

Viteza absolută a punctului material la un moment dat este $\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_t$, unde $v_r = v$ este viteza relativă, după rază, iar $v_t = \omega r$ este viteza de transport, perpendiculară pe rază.

Momentul cinetic al punctului material, în raport cu axa (Δ), este: $k_\Delta = rmv_t = mr^2\omega$, deoarece momentul componentei $m\bar{v}_r$ este nul, $m\bar{v}_r$ fiind în același plan cu axa (Δ).

Scriind teorema de conservare a momentului cinetic al sistemului în raport cu axa (Δ), se obține:

$$\frac{MR^2}{2} \omega_0 = \frac{MR^2}{2} \omega + mr^2\omega = C.$$

De unde:

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 + \frac{2m}{M} \left(\frac{r}{R}\right)^2}.$$

Deci, viteza unghiulară a discului se micșorează odată cu apropierea punctului material de periferia discului și, invers, se mărește odată cu apropierea punctului material de centrul discului.

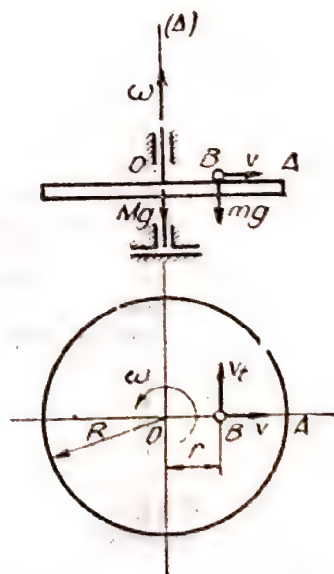


Fig. 16.B.13

16.B.14. O bară AOB în formă de unghi drept se poate roti în jurul laturii sale verticale AO (fig. 16.B.14). Pe latura orizontală OB , la distanța a de punctul O , se găsește o culisă C de masă m . Se imprimă sistemului o viteză unghiulară ω_0 în jurul axei OA . Să se afle relația dintre viteza unghiulară ω a sistemului și distanța $OC = x$, dacă momentul de inerție al barei în raport cu axa OA este J .

Rezolvare. Momentele forțelor exterioare în raport cu axa de rotație fiind nule, se aplică teorema conservării momentului cinetic al sistemului bară-culisă în raport cu axa AO .

$$J\omega_0 + m\omega_0 a^2 = J\omega + xm\omega x.$$

Rezultă :

$$\omega = \frac{J + ma^2}{J + mx^2} \omega_0.$$

16.B.15. Se dă sistemul de corpuri din figura 16.B.15, format din prisme (1) și (2) de greutate Q , respectiv $2Q$, și trolul (3) având razele R , respectiv $2R$ și momentul de inerție J în raport cu axa sa de rotație, perpendiculară în O pe planul figurii. Masa firului și frecarea din articulația O , precum și frecarea dintre fir și roată se neglijează. Sistemul se află inițial în mișcare, sensul fiind determinat de prisma (2) care coboară. În momentul considerat inițial, se rupe firul prisme (2). Să se studieze mișcarea sistemului rămas în continuare.

Rezolvare. Se aplică teorema de variație a momentului cinetic în raport cu axa perpendiculară în O , pentru sistemul rămas după ruperea firului, sistem format din corpurile (1) și (3).

$$\frac{d}{dt} \left(J\omega + R \frac{Q}{g} \omega R \right) = -Q \cdot R.$$

Rezultă :

$$\dot{\omega} = - \frac{QR}{J + \frac{Q}{g} R^2},$$

iar :

$$a = - \frac{QR^2}{J + \frac{Q}{g} R^2}.$$

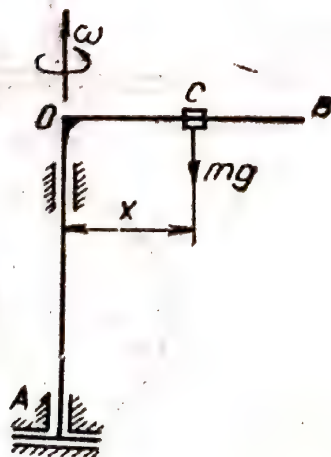


Fig. 16.B.14

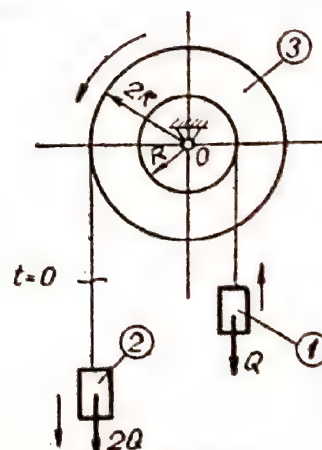


Fig. 16.B.15

Mișcarea prisme (1) este ascendentă încetinită. Sistemul se va opri la un moment dat, după care sensul mișcării se va schimba, prisma (1) va coborî avînd o mișcare accelerată, cu accelerația:

$$a = \frac{QR^2}{J + \frac{Q}{g} R^2}.$$

16.B.16. Pe periferia unui disc omogen, de greutate Q și rază R , este înfășurat un fir de masă neglijabilă, a cărui extremitate este fixată în punctul A (fig. 14.12). Dîndu-se drumul la disc, să se determine accelerația cu care coboară centrul O al discului și accelerația unghiulară.

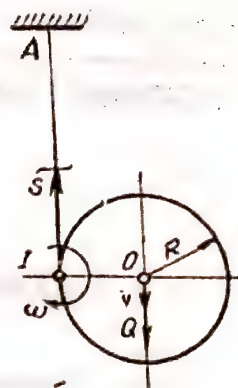


Fig. 16.B.16

Rezolvare. Discul are o mișcare plan-paralelă. Considerînd că firul nu alunecă în raport cu discul, centrul instantaneu de rotație se găsește în punctul I (fig. 16.B.16). Notînd cu v viteza centrului O și cu ω viteza unghiulară, se poate scrie:

$$v = \omega R.$$

Se izolează discul și se aplică teorema de variație a momentului cinetic în raport cu axa instantanee de rotație, perpendiculară în I pe planul mișcării. Pentru aceasta se calculează întîi momentul cinetic al discului în raport cu punctul I , utilizînd teorema I-a a lui Koenig:

$$K_I = K_o + R \frac{Q}{g} v,$$

unde:

$$K_o = \frac{Q}{g} \frac{R^2}{2} \omega \quad \text{iar} \quad v = \omega R.$$

Rezultă:

$$K_I = \frac{3QR^2}{2g} \omega.$$

Se scrie teorema de variație a momentului cinetic în raport cu axa perpendiculară în I :

$$\frac{3QR^2}{2g} \dot{\omega} = QR,$$

de unde:

$$\dot{\omega} = \frac{2g}{3R}.$$

Accelerația centrului discului este $a = \frac{2}{3} g$.

TEOREMELE ENERGIEI MECANICE

17.A. PREZENTARE TEORETICĂ

17.A.1. Teorema de variație a energiei cinetice

Pornind de la teorema variației energiei cinetice a punctului material acționat de o forță (15.7) și folosind notațiile de la Capitolul 15 (fig. 15.A.1), pentru sistemele de puncte materiale, se ajunge la forma diferențială a teoremei :

$$d \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot d\bar{r}_i + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \bar{F}_{ij} \right) d\bar{r}_i \quad (17.1)$$

sau :

$$dE_c = \Delta L_{ext} + \Delta L_{int} \quad (17.2, a)$$

adică : *diferențiala energiei cinetice a unui sistem deformabil de n puncte materiale este egală cu lucrul mecanic elementar al forțelor exterioare și al celor interioare sistemului pentru toate deplasările punctelor sistemului în intervalul de timp dt .*

Calculînd lucrul mecanic elementar al forțelor interioare, se găsește, pentru sistemul de n puncte materiale, expresia scalară :

$$\Delta L_{int} = \sum F_{ij} dr_{ij} \quad (17.2, b)$$

unde : F_{ij} sînt scalarii forțelor interioare în raport cu versorii \bar{u}_{ij} ($i < j$) ai axelor $M_i M_j$ ($i < j$), iar $r_{ij} = |\bar{r}_{ij}|$ adică distanța $M_i M_j$. Suma conține, din toate combinațiile luate cîte două a celor n puncte materiale, numai pe acelea în care $i < j$.

Observații. *1. Dacă forțele interioare sînt atractive $F_{ij} > 0$ și dacă distanța $M_i M_j$ se micșorează $\Delta L_{int} > 0$ și invers, $\Delta L_{int} < 0$ dacă distanța $M_i M_j$ se mărește. Dacă forțele interioare sînt repulsive $F_{ij} < 0$ și dacă distanța $M_i M_j$ se mărește $\Delta L_{int} > 0$ și invers, $\Delta L_{int} < 0$ dacă distanța $M_i M_j$ se micșorează.*

Din teorema energiei nu sînt eliminate forțele interioare; ele dau lucru mecanic.

În cazul modelului de solid nedeformabil, se pot considera neglijabile deformațiile și, în consecință, lucrul mecanic al forțelor interioare devine neglijabil, iar teorema se exprimă, după integrare, sub forma :

$$E'_c - E_c = L_{ext} \quad (17.3)$$

adică : *variația energiei cinetice a unui sistem material nedeformabil, între momentul inițial t și cel final t' , este egală cu lucrul mecanic total al forțelor exterioare aplicate sistemului, pentru deplasarea corespunzătoare intervalului de timp considerat.*

17.A.2. Teorema energiei cinetice în raport cu centrul de masă

Folosind teorema II-a a lui Koenig (Cap. 15), teorema mișcării centrului de masă (Cap. 15) și figurile 15.A.5, 16.A.1, se demonstrează că :

$$dE_c = \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{F}}_i d\bar{\mathbf{p}}_i + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \bar{\mathbf{F}}_{ij} \right) d\bar{\mathbf{p}}_i \quad (17.4)$$

adică : diferențiala energiei cinetice a unui sistem de puncte materiale în raport cu reperul cu originea în C , centrul de masă al sistemului, cu axele paralele cu cele fixe, este egală cu lucrul mecanic elementar al forțelor exterioare și al celor interioare pentru toate deplasările punctelor, în timpul dt , față de reperul considerat.

17.A.3. Teorema de conservare a energiei mecanice

Definiții. Un sistem material se numește *conservativ* dacă forțele interioare ale sistemului derivă dintr-o funcție de forță U , funcție depinzând numai de poziția în spațiu a particulelor sistemului, concepute ca puncte materiale.

În consecință, lucrul mecanic elementar al forțelor interioare este o diferențială exactă și se poate scrie $\Delta L_{int} = dU$, iar pe baza definiției energiei potențiale (E_p) dată la Capitolul 15, $\Delta L_{int} = -dE_p$.

Deși energia potențială este o măsură a unei forme nemecanice de mișcare a unui sistem material, deoarece această măsură caracterizează capacitatea trecerii acestei mișcări într-o formă mecanică, se obișnuiește a se denumi : *suma energiei cinetice și a energiei potențiale a unui sistem ca energie mecanică totală a sistemului* : $E_c + E_p$.

În aceste condiții, teorema de variație a energiei cinetice : $dE = \Delta L_{ext} + \Delta L_{int}$ se scrie, pentru un sistem material conservativ, sub forma : $dE_c = \Delta L_{ext} - dE_p$. Dacă $\Delta L_{ext} = 0$,

$$d(E_c + E_p) = 0 \quad \text{și} \quad E_c + E_p = C, \quad (17.5)$$

adică : *dacă forțele exterioare care acționează asupra unui sistem material conservativ nu produc lucru mecanic, pe un interval de timp, energia mecanică totală a sistemului se conservă în acel interval de timp.*

Observații.

Teorema de conservare a energiei mecanice, în cazul unui sistem conservativ, exprimă prin ecuația (17.5) cea de a treia *integrală primă* a sistemului de ecuații diferențiale (15.1) privind mișcarea sistemului de puncte materiale.

Un exemplu de verificare a teoremei de conservare a energiei mecanice poate fi modelul satelitului captat, în cazul în care P descrie o elipsă cu centrul O al lui S , plasat într-unul din focare (Cap. 15).

Se mai pot găsi, chiar experimenta și alte modele care, teoretic, sînt concepute ca exemple pentru verificarea teoremei de conservare a energiei mecanice. Însă experimentele de laborator au dovedit că mișcarea mecanică trece ireversibil în alte forme nemecanice : mișcare termică, deformare neelastică etc. După un timp, relativ redus, de funcționare a sistemului, energia mecanică a sistemului se anulează, adică forma nemecanică (energia potențială) și forma mecanică (energia cinetică) trec în alte forme de mișcare.

În aceste condiții se ajunge la principiul fundamental al fizicii : *principiul conservării materiei și energiei.*

17.B. APLICAȚII LA TEOREMELE ENERGIEI MECANICE

17.B.1. Un lanț omogen de lungime l și greutate p pe unitatea de lungime se reazemă cu frecare pe un plan orizontal. În poziția inițială o porțiune de lungime l_1 a lanțului atîrnă pe verticală (fig. 17.B.1). Să se calculeze valoarea l_1 pentru care lanțul începe să se miște și viteza lanțului în funcție de lungimea porțiunii sale de pe verticală, coeficientul de frecare între lanț și plan fiind μ .

Rezolvare. În momentul inițial $x = l_1$. Pentru începerea mișcării, trebuie ca: $p l_1 > \mu p(l - l_1)$. Deci:

$$l_1 > \frac{\mu l}{1 + \mu}.$$

Lanțul pleacă din repaus la $x = l_1$, deci $E_1 = 0$.
Pentru $x > l_1$, lanțul este în mișcare cu viteza v , deci:

$$E_2 = \frac{1}{2} \frac{p l}{g} v^2.$$

Lucrul mecanic efectuat de forțele ce acționează asupra lui este:

$$L_{12} = \int_{l_1}^x [p x - \mu p(l - x)] dx = \frac{p(x - l_1)}{2} [(1 + \mu)(x + l_1) - 2\mu l].$$

Aplicînd teorema energiei cinetice, rezultă:

$$v = \sqrt{\frac{g(x - l_1)}{l} [(1 + \mu)(x + l_1) - 2\mu l]}.$$

17.B.2. Se dă bara omogenă $OA = l$ de masă m care se poate roti fără frecare în jurul articulației din O (fig. 17.B.2). În poziție inițială, bara este înclinată cu unghiul α deasupra orizontalei ce trece prin O . Să se găsească legile de variație ale vitezei unghiulare și accelerației unghiulare în funcție de θ și valorile lor maxime, dacă în momentul inițial bara se găsește în repaus.

Rezolvare. Energia barei în poziție inițială este nulă:

$$E_1 = 0.$$

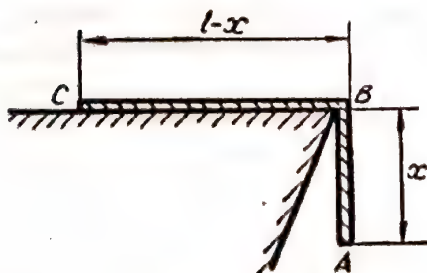


Fig. 17.B.1

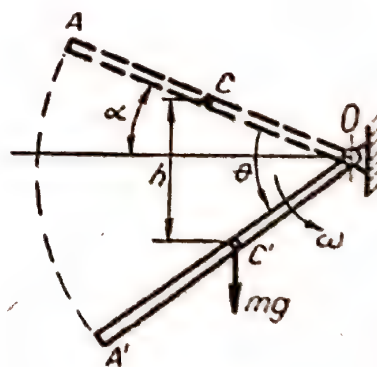


Fig. 17.B.2

În poziția următoare bara este în mișcare cu viteza unghiulară ω și are energia cinetică :

$$E_2 = \frac{1}{2} J_0 \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{ml^2}{3} \omega^2.$$

Lucrul mecanic efectuat între cele două poziții este :

$$L_{12} = mgh = mg \frac{l}{2} [\sin \alpha + \sin(\theta - \alpha)] = mgl \sin \frac{\theta}{2} \cos \left(\frac{\theta}{2} - \alpha \right).$$

Aplicînd teorema energiei cinetice :

$$\frac{1}{2} \frac{ml^2}{3} \omega^2 = mgl \sin \frac{\theta}{2} \cos \left(\frac{\theta}{2} - \alpha \right)$$

se obține :

$$\omega = \sqrt{\frac{6g}{l} \sin \frac{\theta}{2} \cos \left(\frac{\theta}{2} - \alpha \right)} ; \quad \dot{\omega} = \frac{3g}{2l} \cos(\theta - \alpha).$$

17.B.3. Se dă sistemul de corpuri din figura 17.B.3, format dintr-un scripete fix de greutate P și rază R și un corp de greutate G . Sistemul pleacă din repaus și are după un anumit timp t_0 energia cunoscută E_0 . Să se calculeze t_0 și drumul x_0 parcurs de greutatea G în acest interval de timp.

Rezolvare. În momentul inițial energia cinetică a sistemului este : $E_1 = 0$.

După un anumit timp de la începutul mișcării, viteza corpului G este v , iar energia sistemului este :

$$E_2 = \frac{1}{2} \frac{G}{g} v^2 + \frac{1}{2} \frac{PR^2}{2g} \frac{v^2}{R^2} = \frac{v^2}{4g} (2G + P).$$

Aplicînd teorema energiei cinetice

$$\frac{v^2}{4g} (2G + P) = Gx$$

și derivînd ecuația obținută, rezultă :

$$a = \frac{2gG}{2G + P}.$$

Legile mișcării lui G sînt :

$$v = \frac{2gG}{2G + P} t ; \quad x = \frac{gG}{2G + P} t^2.$$

Introducînd în expresia lui E_2 expresia vitezei și notînd $E_2 = E_0$, rezultă :

$$t_0 = \sqrt{\frac{E_0(2G + P)}{gG^2}}.$$

Drumul parcurs este $x_0 = \frac{E_0}{G}.$

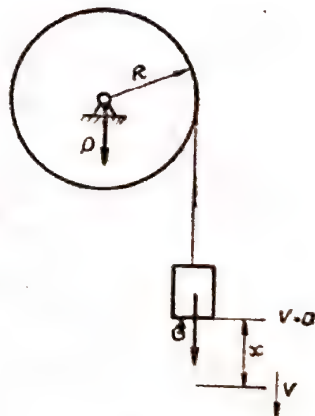


Fig.17.B.3

17.B.4. Bara $AB = l$ (fig. 17.B.4) omogenă de masă m , se reazemă fără frecare cu capătul A pe un plan orizontal. Lăsată liberă în poziție verticală ($A'B'$), ea începe mișcarea fără viteză inițială. Să se calculeze viteza centrului de greutate al barei funcție de înălțimea sa y deasupra planului.

Rezolvare. Deoarece bara pornește din repaus, $E_1 = 0$. Bara are o mișcare plană. Notînd cu v viteza centrului său de greutate la înălțimea y , rezultă:

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{2\dot{y}}{\sqrt{l^2 - 4y^2}},$$

Energia cinetică în această poziție este:

$$E_2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_c\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \frac{ml^2}{12} \frac{4v^2}{l^2 - 4y^2} = \frac{mv^2(4l^2 - 12y^2)}{6(l^2 - 4y^2)}.$$

Lucrul mecanic efectuat de greutatea barei din poziția inițială pînă la înălțimea y este:

$$L_{12} = mg\left(\frac{l}{2} - y\right).$$

Aplicînd teorema energiei cinetice, rezultă:

$$v = \frac{l - 2y}{2} \sqrt{\frac{3g(l + 2y)}{l^2 - 3y^2}}.$$

17.B.5. Se dă sistemul de bare omogene, articulate, din figura 17.B.5 unde $O_1A = O_2B = l$ și $O_1O_2 = AB = 2l$. Sistemul pornește din repaus la $\theta_0 = \pi/6$ și se mișcă liber sub acțiunea greutăților barelor. Să se stabilească legile $\omega = \omega(\theta)$ și $\dot{\omega} = \dot{\omega}(\theta)$.

Rezolvare. Deoarece sistemul pornește din repaus, $E_1 = 0$. Barele O_1A și O_2B au mișcări de rotație cu viteze unghiulare egale. Fie ω viteza lor comună la un moment dat.

Bara AB are mișcare de translație cu viteza $v_A = l\omega$.

Energia sistemului la un moment dat este:

$$E_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{Gl^2}{3g} \omega^2 + \frac{1}{2} \frac{2G}{g} l^2 \omega^2 = \frac{4}{3} \frac{Gl^2}{g} \omega^2.$$

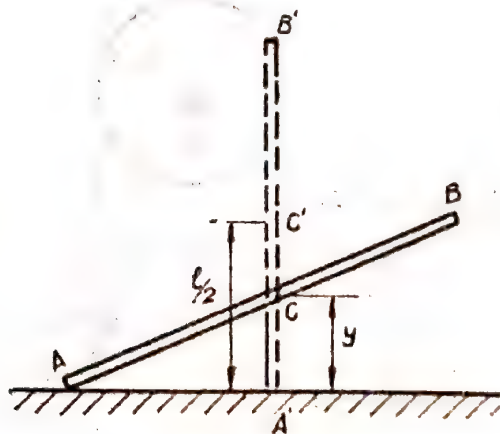


Fig. 17.B.4

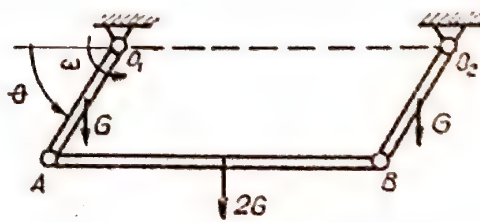


Fig. 17.B.5

Lucrul mecanic efectuat de greutatea barelor între $\theta_0 = \pi/6$ și θ este :

$$L_{12} = 2G \frac{l}{2} \left(\sin \theta - \frac{1}{2} \right) + 2Gl \left(\sin \theta - \frac{1}{2} \right) = 3Gl \left(\sin \theta - \frac{1}{2} \right).$$

Aplicând teorema energiei cinetice, se obține :

$$\omega = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g(2 \sin \theta - 1)}{2l}},$$

iar prin derivare :

$$\omega = \frac{9g \cos \theta}{8l}.$$

Valoarea maximă a lui $\omega(\theta = \pi/2)$ este :

$$\omega = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{2l}}.$$

17.B.6. Se consideră sistemul de corpuri din figura 17.B.6 acționat de un cuplu de moment M_0 . Să se calculeze accelerația corpului G.

Rezolvare. Pentru calculul accelerației, se poate considera că sistemul pornește din repaus, deci $E_1 = 0$. Considerînd că la un moment dat de la începutul mișcării corpul în translație a parcurs drumul x , și are viteza v , rezultă vitezele celorlalte corpuri în funcție de v :

$$\omega_1 = \frac{v}{R}; \quad \omega_2 = \frac{2v}{R}.$$

Energia cinetică în acest moment se compune din :

— energia corpului în translație :

$$E'_2 = \frac{1}{2} \frac{G}{g} v^2;$$

— energia scripetelui mobil în mișcare plană :

$$E''_2 = \frac{1}{2} \frac{G}{g} v^2 + \frac{1}{2} \frac{GR^2}{2g} \omega_1^2;$$

— energia cinetică a scripetelui cu axa fixă :

$$E'''_2 = \frac{1}{2} \frac{GR^2}{2g} \omega_2^2.$$

Însumînd rezultă :

$$E_2 = \frac{9G}{4g} v^2.$$

În acest interval, lucrul mecanic este :

$$L_{12} = -2Gx + M_0 \frac{2x}{R}.$$

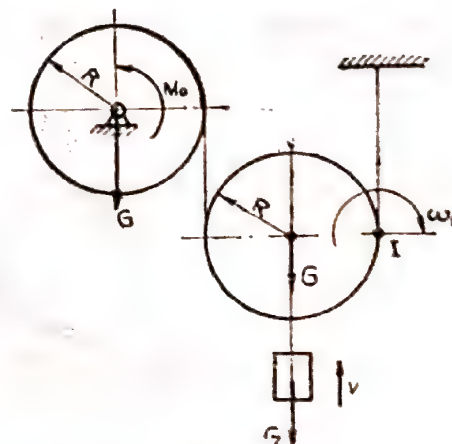


Fig. 17.B.6

Aplicînd teorema energiei cinetice,

$$\frac{9G}{4g} v^2 = 2x \left(\frac{M_0}{R} - G \right),$$

și derivînd, rezultă :

$$a = \frac{4g(M_0 - GR)}{9GR}.$$

17.B.7. Se dă sistemul de bare articulate din figura 17.B.7 ($OA = AB = l$), aflat inițial în repaus la $y = h$. Să se găsească viteza punctului A pentru o poziție a sistemului dată de y .

Rezolvare. Energia cinetică a sistemului în momentul inițial este $E_1 = 0$. La un moment dat viteza unghiulară ω a barei OA și viteza instantanee de rotație a barei AB sînt egale, energia cinetică a sistemului fiind :

$$E_2 = \frac{1}{2} J_0 \omega^2 + \frac{1}{2} J_I \omega^2,$$

unde :

$$J_0 = \frac{Gl^3}{3g},$$

$$J_I = \frac{Gl^3}{12g} + \frac{G}{g} ID^2 = \frac{G(l^3 + 6y^3)}{3g}.$$

Deci :

$$E_2 = \frac{G\omega^2}{3g} (l^3 + 3y^3).$$

Lucrul mecanic între cele două poziții ale sistemului este

$$L_{12} = G(h - y).$$

Aplicînd teorema energiei cinetice și notînd $v_A = l\omega$, rezultă :

$$v_A = l \sqrt{\frac{3g(h - y)}{l^3 + 3y^3}}.$$

Cînd A atinge solul ($y = 0$) se obține $v_A = \sqrt{3gh}$.

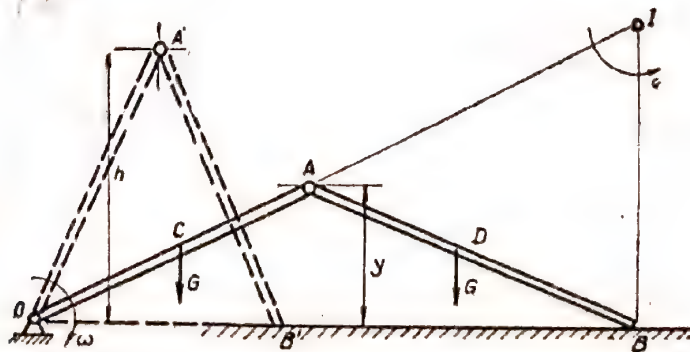


Fig. 17.B.7

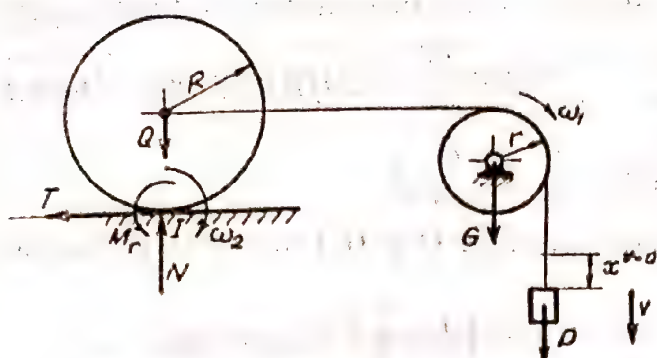


Fig. 17.B.8

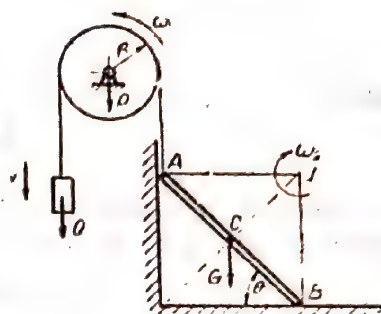


Fig. 17.B.9

17.B.8. Se consideră sistemul de corpuri omogene din figura 17.B.8 care pornește din repaus sub acțiunea greutateilor proprii. Discul de pe planul orizontal se rostogolește fără alunecare, coeficienții de frecare de alunecare și de rostogolire sînt μ respectiv s . Să se calculeze accelerația corpului de greutate P .

Rezolvare. Sistemul este inițial în repaus ($E_1 = 0$). Considerînd că sistemul începe să se miște la un moment dat, greutatea P are viteza v după ce a străbătut pe verticală distanța x . În acest moment:

$$\omega_1 = \frac{v}{r}, \quad \omega_2 = \frac{v}{R}.$$

Energia cinetică este:

$$E_2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2 + \frac{1}{2} \frac{Gr^2}{2g} \omega_1^2 + \frac{1}{2} \frac{Q}{g} v^2 + \frac{1}{2} \frac{QR^2}{2g} \omega_2^2 = \frac{v^2}{4g} (2P + G + 3Q).$$

Lucrul mecanic este produs numai de forța P și de cuplul de frecare la rostogolire al cărui moment este $M_r = sN = sQ$. Forța de frecare $T < \mu N$ nu produce lucru mecanic, deoarece discul nu alunecă pe suprafața planului. Deci:

$$L_{12} = Px - sQ \frac{x}{R}.$$

Aplicînd teorema energiei cinetice, rezultă prin derivare

$$a = \frac{2g(PR - sQ)}{R(2P + G + 3Q)}.$$

17.B.9. Se consideră sistemul de corpuri omogene din figura 17.B.9 alcătuit din bara $AB = l$ de greutate G , discul de greutate P și rază R și corpul de greutate Q . Să se calculeze viteza greutateii Q pentru o poziție θ a barei, considerînd că sistemul pornește din repaus la $\theta = \theta_0$.

Rezolvare. Sistemul fiind inițial în repaus, $E_1 = 0$.

După începerea mișcării, corpul Q are la un moment dat viteza v . Vitezele celorlalte corpuri vor fi:

$$\omega_1 = \frac{v}{R}; \quad \omega_2 = \frac{v}{l \cos \theta}.$$

În acest moment, energia cinetică a sistemului are expresia:

$$E_2 = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} v^2 + \frac{1}{2} \frac{PR^2}{2g} \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_l \omega_2^2.$$

Momentul de inerție al barei față de centrul instantaneu de rotație este :

$$J_I = \frac{Gl^2}{12g} + \frac{G}{g} IC^2 = \frac{Gl^2}{3g}.$$

Deci :

$$E_2 = \frac{v^2}{2g} \left(Q + \frac{P}{2} + \frac{G}{3 \cos^2 \theta} \right).$$

Lucrul mecanic este produs de greutatea Q și G prin variația poziției barei de la θ_0 la θ ; deci :

$$L_{12} = l(\sin \theta - \sin \theta_0) \left(Q - \frac{G}{2} \right).$$

Aplicînd teorema energiei cinetice, rezultă :

$$v = \sqrt{\frac{gl(\sin \theta - \sin \theta_0)(2Q - G)}{Q + \frac{P}{2} + \frac{G}{3 \cos^2 \theta}}}.$$

17.B.10. Un disc de rază r și masă $2m$ este antrenat în mișcare de rostogolire de o bară omogenă avînd lungimea l și masa $3m$. Un capăt al barei se sprijină pe planul vertical, iar celălalt este articulat în centrul discului. Să se studieze mișcarea sistemului (fig. 17.B.10).

Rezolvare. Presupunînd că la momentul inițial sistemul era în repaus și avea poziția definită de $\cos \theta_0 = \frac{\sqrt{l^2 - r^2}}{l}$ (discul situat lângă perețele vertical), putem scrie $E_0 = 0$.

Energia cinetică a sistemului este :

$$E = \frac{1}{2} 3mv_1^2 + \frac{1}{2} \frac{3ml^2}{12} \omega_1^2 + \frac{1}{2} 2mv_2^2 + \frac{1}{2} \frac{2mr^2}{2} \omega_2^2.$$

Înlocuind în această expresie vitezele

$$v_1 = \frac{l}{2} \dot{\theta}; \quad \omega_1 = \dot{\theta}; \quad v_2 = l\dot{\theta} \cos \theta; \quad \omega_2 = \frac{l}{r} \dot{\theta} \cos \theta,$$

se obține :

$$E = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 (1 + 3 \cos^2 \theta).$$

Lucrul mecanic efectuat de forțele date și de legătură este :

$$L_{0-1} = 3mg \left(r + \frac{l}{2} \cos \theta_0 - r - \frac{l}{2} \cos \theta \right) = 3mg \frac{l}{2} \left(\sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2}} - \cos \theta \right).$$

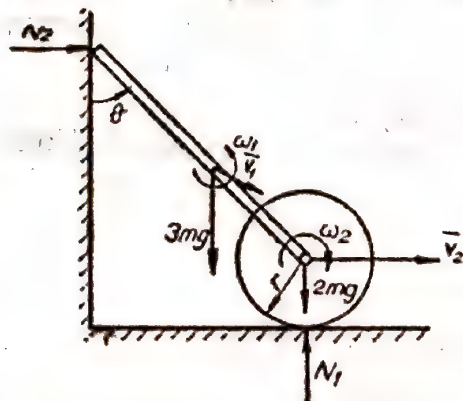


Fig. 17.B.10

Din teorema energiei cinetice se deduce imediat :

$$\omega_1^2 = f(\theta) = \frac{3 \left(\sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2}} - \cos \theta \right) g}{(1 + 3 \cos^2 \theta) l},$$

Derivînd această ecuație în raport cu timpul, rezultă accelerația unghiulară :

$$\varepsilon = \frac{df}{2d\theta}.$$

18.A. PREZENTARE TEORETICA

1. În cazul rigidului cu o axă fixă (axa Oz), teoremele generale sînt :

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = \Sigma \bar{F}_i; \text{ (sau } M\ddot{\bar{\rho}} = \Sigma \bar{F}_i); \quad (18.1)$$

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \Sigma \bar{r}_i \times \bar{F}_i; \quad (18.2)$$

$$dE = \Delta L_{ext} + \Delta L_{int}, \quad (\Delta L_{int} = 0), \quad (18.3)$$

unde cantitatea de mișcare \bar{H} , accelerația centrului maselor $\ddot{\bar{\rho}}$, momentul cinetic \bar{K}_0 și energia cinetică E au expresiile :

$$\bar{H} = M\dot{\bar{\rho}} = M\bar{\omega} \times \bar{\rho} = -M\omega\eta\bar{i} + M\omega\xi\bar{j}; \quad (18.4)$$

$$\ddot{\bar{\rho}} = (-\omega^2\xi - \varepsilon\eta)\bar{i} + (\varepsilon\xi - \omega^2\eta)\bar{j}; \quad (18.5)$$

$$\bar{K} = -J_{xz}\omega\bar{i} - J_{yz}\omega\bar{j} + J_z\omega\bar{k}; \quad (18.6)$$

$$E = \frac{1}{2} J_z \omega^2. \quad (18.7)$$

Prin proiectarea relațiilor (18.1) și (18.2) pe axele unui sistem de referință mobil, invariabil legat de corp (fig. 18.A.1), în care s-a ținut seama de expresia derivatei unui vector cunoscut prin proiecțiile sale pe axele unui sistem de referință mobil: $\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{u}$, se obțin ecuațiile scalare ale mișcării :

$$\begin{aligned} -M(\omega^2\xi + \varepsilon\eta) &= X + R_x + R'_x; \\ M(\varepsilon\xi - \omega^2\eta) &= Y + R_y + R'_y; \\ 0 &= Z + R_z + R'_z; \\ -J_{xz}\varepsilon + J_{yz}\omega^2 &= M_{ox} - hR'_y; \\ -J_{yz}\varepsilon - J_{xz}\omega^2 &= M_{oy} + hR'_x; \\ J_z\varepsilon &= M_{oz}, \end{aligned} \quad (18.8)$$

unde originea O s-a ales în punctul fix O_1 , M fiind masa corpului; $\omega = \dot{\theta}$ și $\varepsilon = \ddot{\theta} = \ddot{\omega}$ — viteza și accelerația unghiulară; ξ, η, ζ — coordonatele centrului de

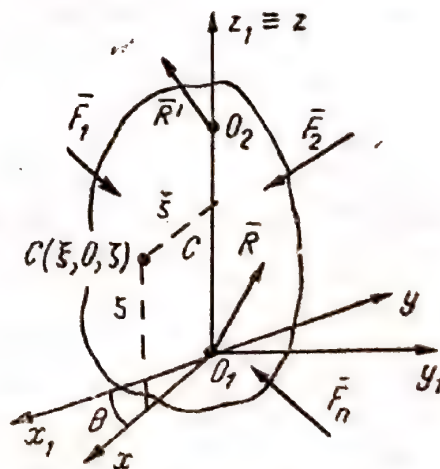


Fig. 18.A.1

greutate C ; X, Y, Z și M_x, M_y, M_z — proiecțiile vectorului rezultat \bar{F} și momentului rezultat \bar{M}_0 ale forțelor aplicate \bar{F}_i ; h — distanța între punctele fixe O_1 și O_2 , în care se aplică $\bar{R}(R_x, R_y, R_z)$ și $\bar{R}'(R'_x, R'_y, R'_z)$.

Mișcarea rigidului rezultă din ultima ecuație a sistemului (18.8) sau din teorema energiei cinetice (18.3):

$$J_z \ddot{\theta} = M_{xz} \quad (18.9)$$

în care s-a înlocuit $\epsilon = \ddot{\theta}$. Componentele reacțiunilor \bar{R} și \bar{R}' se deduc din celelalte cinci relații ale sistemului (18.3).

În general, componentele R_x și R'_x nu pot fi determinate decît în cazul cînd se cunoaște o condiție suplimentară.

Un caz particular de rigid cu axă fixă este pendulul compus (fig. 18.A.2) a cărui ecuație diferențială a mișcării este:

$$\ddot{\theta} + \frac{Mg \cdot \xi}{J_z} \sin \theta = 0, \quad (18.10)$$

unde $OC = \xi$ este distanța de la centrul de greutate al corpului pînă la axa de rotație Oz .

Pendulul compus oscilează la fel cu un pendul simplu, a cărui lungime este

$$l' = \frac{J_z}{M\xi} \quad (18.11)$$

și care se numește pendul simplu sincron cu pendulul compus. Perioada lui de oscilație este:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l'}{g}}. \quad (18.12)$$

2. În cazul rigidului cu un punct fix O , ecuațiile de mișcare se deduc prin proiectarea teoremei momentului cinetic

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \bar{M}_0 \quad (18.13)$$

pe axe principale de inerție $Oxyz$, solidar legate de rigid. Expresiile ecuațiilor sînt:

$$\begin{aligned} J_1 \epsilon_x + (J_3 - J_2) \omega_y \omega_z &= M_{ox}; \\ J_2 \epsilon_y + (J_1 - J_3) \omega_x \omega_z &= M_{oy}; \\ J_3 \epsilon_z + (J_2 - J_1) \omega_x \omega_y &= M_{oz}. \end{aligned} \quad (18.14)$$

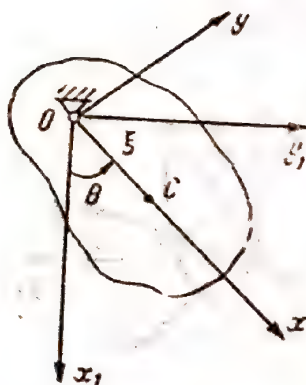


Fig. 18.A.2

unde J_1, J_2 și J_3 sînt momentele de inerție principale ale rigidului, iar M_x, M_y și M_z sînt componentele vectorului moment rezultat \bar{M}_0 ale forțelor aplicate \bar{F}_i în raport cu aceleași axe. Componentele vitezei unghiulare $\bar{\omega}$ pe axele sistemului mobil sînt:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \sin \theta \cdot \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi; \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin \theta \cdot \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi; \\ \omega_z &= \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta, \end{aligned} \quad (18.15)$$

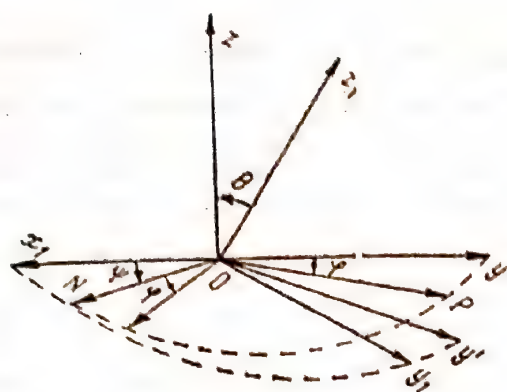


Fig. 18.A.3

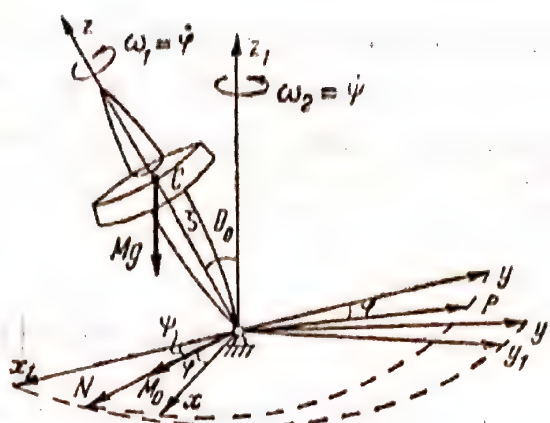


Fig. 18.A.4

ψ , θ și φ fiind unghiurile lui Euler (fig. 18.A.3). Ecuațiile sînt integrabile, independent de condițiile inițiale, în următoarele trei cazuri :

a) *Cazul Euler-Poinsot*, cînd $\bar{M}_0 = 0$, adică $M_{ox} = M_{oy} = M_{oz} = 0$. În acest caz se pot obține următoarele integrale prime :

$$J_1 \omega_x^2 + J_2 \omega_y^2 + J_3 \omega_z^2 = 2E, \quad (18.16)$$

care exprimă conservarea energiei cinetice E , și

$$J_1^2 \omega_x^2 + J_2^2 \omega_y^2 + J_3^2 \omega_z^2 = K_0^2, \quad (18.17)$$

care exprimă conservare modulului vectorului moment cinetic :

$$\bar{K}_0 = J_1 \omega_x^2 + J_2 \omega_y^2 + J_3 \omega_z^2. \quad (18.18)$$

Rezolvînd ecuațiile (18.16) și (18.17) în raport cu una dintre componentele lui $\bar{\omega}$, de exemplu ω_x , și introducînd pe ω_x și ω_y astfel determinați în cea de a treia ecuație a sistemului lui Euler $J_3 \dot{\varphi} + (J_2 - J_1) \omega_x \omega_y = 0$, se poate exprima printr-o integrală eliptică timpul t în funcție de ω_x . Introducînd apoi pe ω_x , ω_y și ω_z în ecuațiile (18.15), rezultă $\psi = \psi(t)$; $\theta = \theta(t)$ și $\varphi = \varphi(t)$.

b) *Cazul Lagrange-Poisson*, în care rigidul este supus numai acțiunii greutății proprii Mg , centrul de greutate al corpului se află pe axa de rotație — $C(0, 0, \zeta)$ și $J_1 = J_2$, adică elipsoidul de inerție este un elipsoid de rotație în jurul axei Oz (fig. 18.A.4).

Momentul forțelor aplicate $M_0 = Mg\zeta \sin \theta$ are direcția liniei nodurilor ON , componentele acestuia fiind :

$$\begin{aligned} M_{ox} &= Mg\zeta \sin \theta \cos \varphi; \\ M_{oy} &= -Mg\zeta \sin \theta \sin \varphi; \\ M_{oz} &= 0. \end{aligned} \quad (18.19)$$

Din a treia ecuație Euler se obține integrala primă :

$$\omega_z = \omega_0 = \text{const.}, \quad (18.20)$$

și din integrala energiei se obține cea de a doua integrală primă :

$$J_1(\omega_x^2 + \omega_y^2) + J_3 \omega_z^2 + 2Mg\zeta \cos \theta = \text{const.} \quad (18.21)$$

Cazul mișcării de precesie regulată:

$$\varphi = \omega_1 t + \varphi_0; \quad \psi = \omega_2 t + \psi_0; \quad \theta = \theta_0 = \text{const.}, \quad (18.22)$$

reprezintă o soluție particulară a problemei. Introducând mai întâi această soluție în relația (18.15), se calculează componentele ω_x , ω_y și ω_z , iar prin derivarea lor în raport cu timpul, componentele ε_x , ε_y și ε_z . Făcând apoi înlocuirile în ecuațiile lui Euler rezultă pentru cuplul M_0 , ce se aplică corpului, expresia:

$$M_0 = J_3 \omega_1 \omega_2 \sin \theta_0 \left[1 + \left(1 - \frac{J_1}{J_3} \right) \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \theta_0 \right] \quad (18.23)$$

sau, observînd că în cazul unui giroscop J_3 și ω_1 sînt foarte mari în raport cu J_1 , respectiv ω_2 , se poate scrie:

$$M_0 \approx J_3 \omega_1 \omega_2 \sin \theta_0. \quad (18.24)$$

Ca vector, \bar{M}_0 este orientat după linia nodurilor și are expresia:

$$\bar{M}_0 = J_3 \bar{\omega}_2 \times \bar{\omega}_1. \quad (18.25)$$

Pentru cazul în care momentul forțelor aplicate este produs de greutatea Mg a corpului, ținînd seama de relația (18.19), rezultă:

$$J_1 \omega_1 \omega_2 + (J_3 - J_1)(\omega_1 \omega_2 + \omega_2^2 \cos \theta_0) = Mg\zeta,$$

sau:

$$J_3 \omega_1 \omega_2 + (J_3 - J_1) \omega_2^2 \cos \theta_0 = Mg\zeta. \quad (18.26)$$

Dacă $\omega_1 \gg \omega_2$, adică viteza unghiulară de rotație proprie este mult mai mare decît viteza unghiulară de precesie, relația (18.26) poate fi scrisă sub forma

$$J_3 \omega_1 \omega_2 = Mg\zeta \quad \text{sau} \quad \omega_2 = \frac{Mg\zeta}{J_3 \omega_1}. \quad (18.27)$$

c) *Cazul S. Kovalevskia* este un al treilea caz de integrabilitate, în care, de asemenea, elipsoidul de inerție relativ la punctul fix O este un elipsoid de rotație: $J_1 = J_2$, iar centrul de greutate se află în planul perpendicular pe axa de rotație, adică $C(\xi, \eta, 0)$. În plus, în acest caz se consideră $J_1 = J_2 = 2J_3$.

3. În cazul mișcării generale a rigidului, observînd că teoremele generale ale dinamicii determină mișcarea centrului de greutate, se alege ca origină a sistemului de referință solidar cu corpul centrul de greutate C al acestuia, reducînd forțele aplicate \bar{F}_i în acest punct.

Teorema mișcării centrului de greutate $M\bar{a}_c = \Sigma \bar{F}_i$, proiectată pe axele sistemului de referință fix conduce la ecuațiile:

$$M\ddot{\xi}_1 = X_1;$$

$$M\ddot{\eta}_1 = Y_1; \quad (18.28)$$

$$M\ddot{\zeta}_1 = Z_1.$$

în care s-a notat cu X_1 , Y_1 și Z_1 proiecțiile pe axele fixe ale vectorului resultant \bar{R} al forțelor aplicate, iar cu ξ_1 , η_1 și ζ_1 coordonatele lui C în sistemul fix.

Pentru studiul mișcării față de centrul de greutate, se aleg ca axe ale sistemului de referință solidare cu corpul direcțiile principale de inerție relativ la centrul de greutate C . Teorema momentului cinetic scrisă față de acest punct $\frac{d\vec{K}_C}{dt} = \vec{M}_C$, proiectată pe axele sistemului de referință invariabil legat de corp, conduce la ecuațiile:

$$\begin{aligned} J_1 \varepsilon_x + (J_3 - J_2) \omega_y \omega_z &= M_{Cx}; \\ J_2 \varepsilon_y + (J_1 - J_3) \omega_z \omega_x &= M_{Cy}; \\ J_3 \varepsilon_z + (J_2 - J_1) \omega_x \omega_y &= M_{Cz}. \end{aligned} \quad (18.29)$$

Ecuațiile diferențiale (18.28) și (18.29) determină mărimile $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \psi, \theta$ și φ ca funcțiuni de timp.

18.B. APLICAȚII LA DINAMICA SOLIDULUI RIGID

18.B.1. Un disc de rază R și greutate P se rotește în jurul unei axe verticale z , cu viteza unghiulară constantă ω . Axa de rotație trece prin centrul de greutate al discului, care coincide cu centrul O și formează unghiul α cu normala pe planul discului. Să se determine reacțiunile din O și O' , dacă $OO' = h$ și $OC = \frac{h}{2}$.

Rezolvare. Pentru determinarea mișcării se folosește teorema energiei cinetice (18.3). Cum $\Delta L_{ext} = \Delta L_{int} = 0$, rezultă $E = \text{const.}$, adică $\omega = \omega_0$, mișcarea fiind uniformă.

Pentru determinarea reacțiunilor se aplică teorema impulsului (18.1) și teorema momentului cinetic (18.2).

Centrul de greutate aflându-se pe axa Oz , $\dot{\vec{p}} = 0$, deci $\vec{H} = 0$, $\dot{\vec{H}} = 0$.

Pentru calculul momentelor de inerție, se vor considera sistemele de axe $Cxyz$ și $Cxuv$, în care Cx este diametrul orizontal, Cu diametrul perpendicular pe Cx și Cv normala la disc (fig. 18.B.1). Va rezulta:

$$\begin{aligned} J_{zz} &= \sum m_i x_i^2 = \sum m_i x_i u_i \sin \alpha = \\ &= \sin \alpha \sum m_i x_i u_i = \sin \alpha \cdot J_{zu} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{vv} &= \sum m_i y_i^2 = \sum m_i u_i^2 \sin \alpha \cos \alpha = \\ &= \frac{\sin 2\alpha}{2} \cdot J_u = \frac{\sin 2\alpha}{2} \cdot \frac{MR^2}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_z &= \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum m_i (x_i^2 + u_i^2 \cos^2 \alpha) = \\ &= J_u + J_z \cos^2 \alpha + J_z (1 + \cos^2 \alpha) = \\ &= \frac{MR^2}{2} (1 + \cos^2 \alpha). \end{aligned}$$

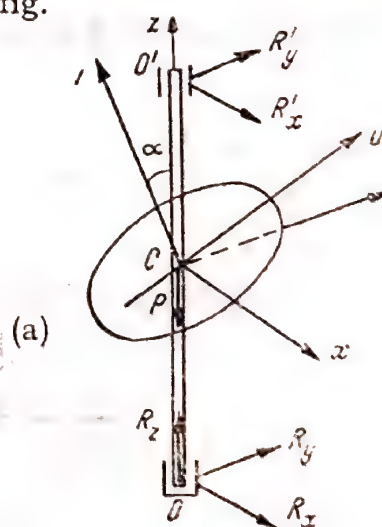


Fig. 18.B.1

Momentul cinetic (18.6) are deci expresia :

$$\bar{K}_0 = \frac{MR^2}{8} \sin 2\alpha \cdot \omega_0^2 + \frac{MR^2}{2} (1 + \cos^2 \alpha) \omega_0 \cdot \bar{\omega} \quad (b)$$

și

$$\dot{\bar{K}}_0 = \frac{\partial \bar{K}_0}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{K}_0 = \frac{MR^2}{8} \sin 2\alpha \cdot \omega_0^2 \quad (c)$$

Proiectând ecuațiile (18.1) și (18.2) pe axele sistemului mobil $Cxyz$, se obține :

$$\begin{aligned} R_x + R'_x &= 0; \\ R_y + R'_y &= 0; \\ R_z - P &= 0; \end{aligned} \quad (d)$$

$$\frac{MR^2}{2} \omega_0^2 \sin 2\alpha = R_y \frac{h}{2} - R'_y \frac{h}{2};$$

$$0 = R'_z \frac{h}{2} - R_x \frac{h}{2}.$$

Rezolvând sistemul se deduce :

$$\begin{aligned} R_x &= R'_x = 0; \\ R_y &= -R'_y = \frac{MR^2}{8h} \omega_0^2 \sin 2\alpha = \frac{P}{g} \frac{R^2}{8h} \cdot \omega_0^2 \cdot \sin 2\alpha; \\ R_z &= P. \end{aligned} \quad (e)$$

18.B.2. O bară omogenă de masă M și lungime l (fig. 18.B.2) este adusă în poziția orizontală și apoi i se dă drumul fără viteză inițială. Să se afle unghiul α dintre reacțiunea totală \bar{R} a axei de rotație și bară.

Rezolvare. Pentru determinarea lui ω se folosește teorema energiei cinetice (18.3), a cărei formă integrală este :

$$E - E_0 = L_{ext}, \quad (a)$$

deoarece bara fiind rigidă $L_{int} = 0$. Din (18.7) și (18.4) se obține :

$$E = \frac{1}{2} J_z \omega^2 = \frac{Ml^2}{6} \omega^2; \quad E_0 = \frac{Ml^2}{6} \omega_0^2 = 0;$$

$$L_{ext} = Mg \frac{l}{2} \sin \theta. \quad (b)$$

Înlocuind în (a) rezultă $\omega = \omega(\theta)$;

$$\frac{Ml^2}{6} \omega^2 = Mg \frac{l}{2} \sin \theta;$$

$$\omega^2 = \frac{3g}{l} \sin \theta. \quad (c)$$

Derivând relația (c), se găsește $\varepsilon = \varepsilon(\theta)$;

$$2\omega \dot{\omega} = \frac{3g}{l} \dot{\theta} \cos \theta; \quad \varepsilon = \frac{3g}{2l} \cos \theta. \quad (d)$$

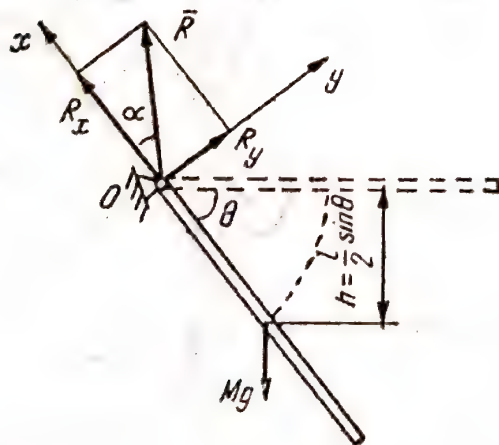


Fig. 18.B.2

Pentru determinarea reacțiunilor se folosește teorema cantității de mișcare proiectată pe axele Ox și Oy (primele două ecuații din (18.8) în care $\xi = \frac{l}{2}$; $\eta = 0$; $R_x = R'_x = 0$; $X = -Mg \sin \theta$; $Y = -Mg \cos \theta$).

Ținând seama de (c) și (d), se obține:

$$-M \frac{3g}{l} \sin \theta \left(-\frac{l}{2} \right) = -Mg \sin \theta + R_x;$$

$$M \frac{3g}{2l} \cos \theta \left(-\frac{l}{2} \right) = -Mg \cos \theta + R_y,$$

de unde

$$R_x = \frac{5}{2} Mg \sin \theta; \quad R_y = \frac{1}{4} Mg \cos \theta; \quad \tan \alpha = \frac{1}{10} \cotg \alpha.$$

18.B.3. Să se determine perioada micilor oscilații pentru corpurile omogene din figurile 18.B.3.

1. Bară de lungime a (fig. 18.B.3, a):

$$I' = \frac{J_0}{M\zeta} = \frac{\frac{Ma^2}{3}}{M \frac{a}{2}} = \frac{2a}{3}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I'}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{2a}{3g}}.$$

2. Placă pătrată de latură a (fig. 18.B.3; b):

— axa de oscilație Oz perpendiculară în O pe planul plăcii:

$$J_z = \frac{2Ma^2}{3}; \quad I' = \frac{\frac{2Ma^2}{3}}{Ma \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2a\sqrt{2}}{3}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{2a\sqrt{2}}{3g}};$$

— axa de rotație Ox , orizontală în planul plăcii:

$$J_x = \frac{Ma^2}{12}; \quad I' = \frac{\frac{Ma^2}{12}}{Ma \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{12}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{a\sqrt{2}}{12g}}.$$

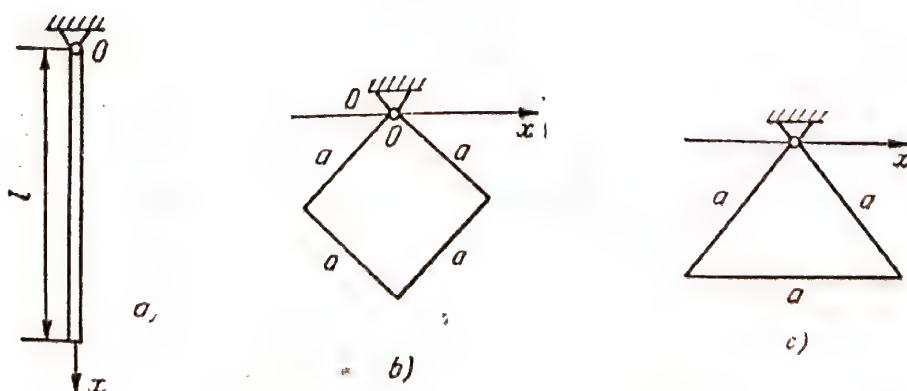


Fig. 18.B.3

3. Placă în formă de triunghi echilateral de latură a (fig. 18.B.3, c) :
— axa de oscilație Oz , perpendiculară în O pe planul plăcii :

$$J_z = \frac{5Ma^2}{12}; \quad l' = \frac{\frac{5Ma^2}{12}}{M \frac{2}{3} a \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5a}{4\sqrt{3}}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{5a}{4\sqrt{3}g}};$$

— axa de rotație Ox , orizontală în planul plăcii :

$$J_x = \frac{11Ma^2}{12}; \quad l' = \frac{\frac{11}{12} Ma^2}{M \frac{2}{3} a \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{11a}{4\sqrt{3}}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{11a}{4\sqrt{3}g}}.$$

18.B.4. Un disc circular omogen se rotește, în virtutea inerției în jurul centrului de greutate. În momentul inițial discul a primit viteza unghiulară ω_1 în jurul unei axe oarecare care formează cu planul discului unghiul α . Să se determine viteza unghiulară de precesie și unghiul β dintre axa de precesie și planul discului.

Rezolvare. Se alege sistemul de referință mobil solidar cu discul cu axele Ox, Oy în planul discului și Oz perpendiculară în O pe acest plan. Sistemul de referință fix $O_1x_1y_1z_1$ se alege de asemenea cu originea O_1 , în centrul O al discului, avînd axa O_1z_1 în planul Oxz , unghiul dintre axele Oz_1 și Ox este α , iar ω_1 este situat pe axa Oz_1 (fig. 18.B.4). În acest caz, condițiile inițiale sînt :

$$t = 0 \rightarrow \omega_x = \omega_1 \cos \alpha; \quad \omega_y = 0; \quad \omega_z = \omega_1 \sin \alpha.$$

Ecuatiile lui Euler (18.14) sînt :

$$\begin{aligned} \frac{MR^2}{4} \dot{\omega}_x + \frac{MR^2}{4} \omega_y \omega_z &= 0; \\ \frac{MR^2}{4} \dot{\omega}_y - \frac{MR^2}{4} \omega_z \omega_x &= 0; \\ \frac{MR^2}{2} \dot{\omega}_z &= 0, \end{aligned} \quad (a)$$

în care, $J_x = J_y = \frac{MR^2}{4}$ și $J_z = \frac{MR^2}{2}$, M fiind masa discului și R , raza lui.

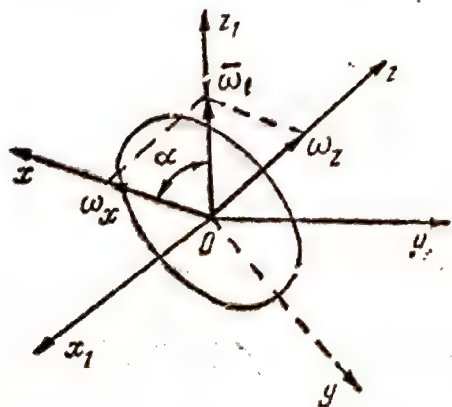


Fig. 18.B.4

Din ultima ecuație se deduce :

$$\omega_z = \omega_z^0 \text{ (constant)}. \quad (b)$$

Primele două ecuații, după simplificări și ținînd seama de (b), devin :

$$\frac{d\omega_x}{dt} - \omega_z^0 \omega_y = 0; \quad \frac{d\omega_y}{dt} + \omega_z^0 \omega_x = 0. \quad (c)$$

Sistemul de ecuații (c) fiind liniar, se încercă soluții de forma :

$$\omega_x = c_1 e^{it}; \quad \omega_y = c_2 e^{it}. \quad (d)$$

Rezultă, pentru determinarea lui r , sistemul omogen:

$$C_2 r - \omega_z^0 C_1 = 0; \quad \omega_z^0 C_2 + C_1 r = 0.$$

Ecuatia caracteristică ce se obține prin anularea determinantului sistemului este $r^2 + (\omega_z^0)^2 = 0$, rădăcinile ei fiind $r = \pm i\omega_z^0$.

Rezultă, pentru ω_z , o soluție de forma:

$$\omega_z = A \cos \omega_z^0 t + B \sin \omega_z^0 t, \quad (e)$$

iar pentru ω_y , ținând seama de a doua ecuație din (c), soluția:

$$\omega_y = -\frac{1}{\omega_z^0} \cdot \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{1}{\omega_z^0} (A\omega_z^0 \sin \omega_z^0 t - B\omega_z^0 \cos \omega_z^0 t).$$

Soluțiile sistemului (a) sînt deci:

$$\begin{aligned} \omega_x &= A \cos \omega_z^0 t + B \sin \omega_z^0 t; \\ \omega_y &= A \sin \omega_z^0 t - B \cos \omega_z^0 t; \\ \omega_z &= \omega_z^0. \end{aligned} \quad (f)$$

Constantele A , B și ω_z^0 se determină prin condițiile inițiale arătate:

$$\omega_1 \cos \alpha = A; \quad 0 = -B; \quad \omega_1 \sin \alpha = \omega_z^0. \quad (g)$$

Ținând seama de aceste valori ale constantelor, soluțiile (f) se scriu:

$$\begin{aligned} \omega_x &= (\omega_1 \cos \alpha) \cos (\omega_1 \sin \alpha) t; \\ \omega_y &= (\omega_1 \sin \alpha) \sin (\omega_1 \sin \alpha) t; \\ \omega_z &= \omega_1 \sin \alpha. \end{aligned} \quad (h)$$

Ținând seama că discul are o mișcare de precesie regulată, soluțiile sistemului sînt de forma:

$$\psi = \omega_2 t + \psi_0; \quad \varphi = \omega_3 t + \varphi_0; \quad \theta = \theta_0. \quad (i)$$

Introducînd aceste soluții în (18.15), se obțin pentru ω_x , ω_y și ω_z expresiile:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \omega_2 \sin \theta_0 \sin(\omega_3 t + \varphi_0); \\ \omega_y &= \omega_2 \sin \theta_0 \cos(\omega_3 t + \varphi_0); \\ \omega_z &= \omega_3 + \omega_2 \cos \theta_0. \end{aligned} \quad (j)$$

Prin identificarea relațiilor (h) și (j):

$$\begin{aligned} \omega_1 \cos \alpha \sin [90^\circ - (\omega_1 \sin \alpha) t] &\equiv \omega_2 \sin \theta_0 \sin(\varphi_0 + \omega_3 t); \\ \omega_1 \cos \alpha \cos [90^\circ - (\omega_1 \sin \alpha) t] &\equiv \omega_2 \sin \theta_0 \cos(\varphi_0 + \omega_3 t); \\ \omega_1 \sin \alpha &\equiv \omega_3 + \omega_2 \cos \theta_0. \end{aligned} \quad (k)$$

Se obține:

$$\begin{aligned} \omega_1 \cos \alpha &= \omega_2 \sin \theta_0; \quad \varphi_0 = 90^\circ; \quad -\omega_1 \sin \alpha = \omega_3; \\ \omega_1 \sin \alpha &= \omega_3 + \omega_2 \cos \theta_0. \end{aligned} \quad (l)$$

Necunoscutele problemei sînt ω_2 și θ_0 . Eliminînd pe ω_2 între prima și ultima ecuație din (1) se obține sistemul:

$$\omega_2 \sin \theta_0 = \omega_1 \cos \alpha;$$

$$\omega_2 \cos \theta_0 = 2\omega_1 \sin \alpha,$$

de unde:

$$\omega_2 = \omega_1 \sqrt{\cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha} = \omega_1 \sqrt{1 + 3 \sin^2 \alpha}; \quad (m)$$

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \alpha.$$

Unghiul cerut de problemă este $\beta = 90^\circ - \theta_0$, deci $\operatorname{tg} \beta = 2 \operatorname{tg} \alpha$.

18.B.5. Un giroscop greu, simetric, execută o precesie regulată în jurul unei axe verticale Oz . Viteza unghiulară a rotației proprii în jurul axei Oz este foarte mare în comparație cu viteza unghiulară de precesie. Să se afle o expresie aproximativă pentru forța orizontală de reacțiune în punctul fix O dacă se cunosc: greutatea G a corpului, distanța z , de la punctul O pînă la centrul de greutate al corpului, momentul de inerție J_z în raport cu axa Oz , unghiul θ dintre axele Oz_1 și Oz , și viteza unghiulară de rotație proprie ω_1 (fig. 18.B.5).

Rezolvare. Aplicînd teorema mișcării centrului de greutate și observînd că mișcarea sa este, cu aproximațiile problemei, circulară și uniformă pe un cerc de rază $r = z \sin \theta$, rezultă:

$$\frac{G}{g} z \sin \theta \omega_2^2 = F. \quad (a)$$

Teorema momentului cinetic, $\dot{\vec{K}}_O = \vec{M}_O$, arată că viteza vîrfului vectorului \vec{K}_O este egală cu momentul forțelor exterioare în raport cu punctul O . Observînd că vîrfului lui \vec{K}_O (al cărui suport nu diferă sensibil de suportul vectorului ω_1 — situat pe axa Oz — dacă aceasta este foarte mare și dacă $J_z = J_3$ este de asemenea mare) se rotește pe un cerc cu raza $|\vec{K}_O| = J_z \omega_1 \sin \theta$, cu viteza unghiulară ω_2 , se poate scrie:

$$J_z \omega_1 \sin \theta \cdot \omega_2 = G \cdot z \sin \theta. \quad (b)$$

Eliminînd pe ω_2 între relațiile (b) și (a), se obține F :

$$F = \frac{G^2 z^2}{J_z g \omega_1^2} \sin \theta. \quad (c)$$

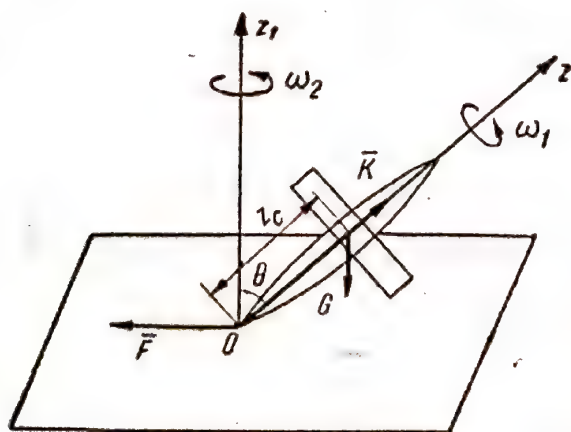


Fig. 18.B.5

18.B.6. Un giroscop, la care $J_1 = J_2 = 2J_3$, se rotește în virtutea inerției în jurul centrului de greutate, executînd o precesie regulată. Cunoscînd viteza unghiulară ω_1 a rotației proprii a giroscopului și unghiul dintre axa giroscopului și axa de precesie $\theta = 60^\circ$, să se afle viteza unghiulară de precesie ω_2 .

Rezolvare. Se aplică relația (18.22) în care se ține seama că $Mg\zeta = 0$ și $J_1 = J_2 = 2 J_3$; rezultă:

$$J_3 \omega_1 \omega_2 + (J_3 - 2J_3) \omega_2^2 \cos 60^\circ = 0;$$

$$J_3 \omega_1 - J_3 \omega_2 \frac{1}{2} = 0, \text{ de unde } \omega_2 = 2\omega_1.$$

18.B.7. O turbină avînd arborele paralel cu axa longitudinală a vaporului, face 250 de rotații pe minut. Greutatea rotorului este de 180 000 N, iar raza de inerție, de 1,43 m. Să se determine presiunea giroscopică pe lagăre, distanța între ele fiind 5,55 m, la întoarcerea vaporului cu 10° pe secundă.

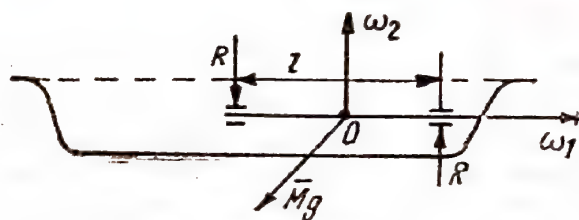


Fig. 18.B.7

Rezolvare. Presiunea giroscopică pe lagăre este dată de relația: $R = \frac{J\omega_1\omega_2}{z}$ (fig. 18.B.7) în care:

$$J = Mi^2 = \frac{180\,000}{9,81} \cdot 1,43^2 = 37\,521 \text{ Kgm}^2;$$

$$\omega_1 = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 250}{30} = \frac{25\pi}{3} = 26,18 \frac{\text{rad}}{\text{s}};$$

$$\omega_2 = 10 \frac{\text{grade}}{\text{s}} = 10 \frac{\pi}{180} \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 0,1745 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

$$\text{Rezultă: } R = \frac{37\,521 \cdot 26,18 \cdot 0,1745}{5,55} = 30\,885 \text{ N}.$$

CIOCNIRI. PERCUȚII

19.A. PREZENTARE TEORETICA

19.A.1. Generalități

Modelul de solid rigid a adus simplificări utile în problema reducerii unui sistem de forțe care acționează asupra unui corp solid. Folosirea modelului în statica solidului cu legături a impus un nou model matematic: contactul într-un singur punct al solidelor legate între ele. Cu toate că această schematizare extremă simplifică studiul teoretic, totuși rezultatele obținute nu corespund decât într-o primă aproximație legăturilor reale, mai ales dacă se ține seama și de frecările din legături. De aceea, la Capitolul 5 s-a renunțat la modelul solidului nedeformabil, adoptându-se un model ameliorat, pe baza ipotezei unui contact pe o suprafață regulată (plană, cilindrică, sferică) de o anumită arie, consecință a unor deformări superficiale limitate, sau a unor prelucrări prealabile. La acest model apar pentru prima dată ipoteze privind distribuția forțelor de suprafață (presiuni, frecări), ipoteze justificate pe baza unor încercări de laborator.

Fenomenul de ciocnire a două sau mai multe solide în mișcare se produce în momentul în care ele vin în contact sau li se aplică acestor solide, *brusc*, una sau mai multe legături. Fenomenul desprinderii de legătură nu constituie o ciocnire. Dacă nu s-ar ține seamă de deformarea solidului în momentul ciocnirii, ar trebui să se admită că în punctele de contact ar lua naștere forțe infinite care ar acționa un timp nul, concluzie evident absurdă, ceea ce înseamnă că modelul rigid a atins limita lui de aplicabilitate la studiul ciocnirii.

Pentru ameliorarea modelului de solid care să fie utilizabil în problemele de ciocniri, sînt necesare unele ipoteze. Aceste ipoteze pot fi justificate numai pe baza experimentelor și a observațiilor.

19.A.2. Observații asupra ciocnirii solidelor

Ciocnirea solidelor se produce într-un interval de timp *foarte mic, dar niciodată nul*.

În intervalul de timp al ciocnirii, solidele se deformează și revin, într-o măsură oarecare, la forma lor inițială.

În intervalul de timp cît durează ciocnirea, deplasările particulelor solidelor *sînt foarte mici* față de deplasările dinainte și după ciocnire.

Modificările vitezelor în timpul foarte scurt al ciocnirii sînt *cu mult mai mari* decât modificările vitezelor, într-un timp egal înainte de începerea sau după terminarea fenomenului de ciocnire. Din această observație reiese că forțele din timpul ciocnirii sînt *cu mult mai mari* decât forțele obișnuite, cum ar fi greutatea solidelor în ciocnire.

În trecut, din observații asemănătoare, s-au tras concluzii greșite: că ciocnirea ar fi un *fenomen discontinuu, instantaneu*, că modificarea bruscă a mișcărilor mecanice s-ar datora unor *forțe instantanee*.

În realitate, fenomenul are o durată foarte mică, dar *diferită de zero*, în care timp forțele de ciocnire variază continuu, ating valori foarte mari dar *limitate*, astfel că ciocnirea este un *fenomen continuu*.

19.A.3. Ipoteze asupra ciocnirii solidelor

Dacă t este momentul inițial, iar t' este momentul final al procesului de ciocnire (interacțiunii) există, în general, un moment intermediar $t_0 (t < t_0 < t')$ când procesul rămânând continuu își schimbă sensul, adică viteza relativă a solidelor se anulează, își schimbă sensul și valoarea, iar solidele care sînt comprimate în intervalul de timp $t_0 - t$ se pot destinde în intervalul $t' - t_0$.

Se presupune că în intervalul $t' - t$ pozițiile particulelor solidelor nu variază în raport cu un reper fix.

Denumind impulsul total al forțelor în intervalul de timp foarte mic al ciocnirii prin *percuție*, se presupune că percuțiile forțelor obișnuite sînt nule și astfel se consideră numai percuțiile forțelor de ciocnire, denumite *forțe percutante*.

Forțele percutante notate cu \bar{F} pot fi atât forțe *date*, cât și *de legătură*, atât *exterioare*, cât și *interioare*.

Deoarece se ține seama de deformările și de revenirile solidelor în timpul ciocnirii, sînt necesare ipoteze privind starea elasto-plastică a materialelor solidelor care se ciocnesc.

Principiile mecanicii newtoniene se consideră aplicabile și în intervalul de timp al ciocnirii.

Numai pentru stabilirea unor teoreme, se pot asimila particulele cu punctele materiale.

19.A.4. Problemele și teoremele generale ale ciocnirii

În cadrul unui studiu teoretic, problema generală a ciocnirii se poate enunța astfel: se cunosc, în momentul inițial t al ciocnirii, pozițiile punctelor materiale $M_i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ ale unui sistem, prin \bar{r}_i , vectorii de poziție în raport cu un reper fix (fig. 19.A.1), vitezele lor inițiale \bar{v}_i și masele lor m_i .

Se cere să se determine vitezele \bar{v}_i din momentul final t' al ciocnirii.

Pentru rezolvare, pe baza ipotezelor, se va considera \bar{r}_i invariabil în intervalul $t' - t$, se vor considera numai forțele percutante \bar{F}_i , \bar{F}_{ij} și percuțiile acestor forțe

$$\bar{Q}_i = \int_t^{t'} \bar{F}_i dt, \quad \bar{Q}_{ij} = \int_t^{t'} \bar{F}_{ij} dt,$$

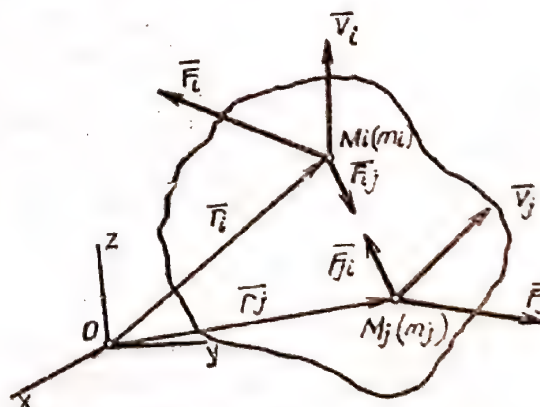


Fig. 19.A.1

apoi în baza valabilității principiilor, se vor folosi relațiile:

$$\bar{\mathcal{E}}_{11} + \bar{\mathcal{E}}_{21} = 0,$$

$$\bar{r}_{1x}\bar{\mathcal{E}}_{11} + \bar{r}_{2x}\bar{\mathcal{E}}_{21} = 0.$$

Teorema de variație a cantității de mișcare se enunță astfel: *variația cantității de mișcare a sistemului de puncte materiale, în intervalul de timp al ciocnirii, este egală cu suma percuțiilor exterioare (date și de legătură) pentru același interval de timp, adică:*

$$\sum_{i=1}^n m_i \bar{v}'_i - \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i = \sum_{i=1}^n \bar{\mathcal{E}}_i. \quad (19.1)$$

Observații

Deoarece $\sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i = m \bar{v}_c$, unde $m = \sum_{i=1}^n m_i$, iar \bar{v}_c este viteza în momentul t a centrului de masă al sistemului, teorema are și următoarea formă: *variația cantității de mișcare a sistemului este aceeași cu aceea a centrului de masă, dacă s-ar presupune concentrată masa sistemului în acest punct și asupra căruia ar acționa, pe durata considerată a ciocnirii, toate forțele percutante exterioare, adică:*

$$m \bar{v}'_c - m \bar{v}_c = \sum_{i=1}^n \bar{\mathcal{E}}_i. \quad (19.2)$$

Expresiile vectoriale (19.1) și (19.2) se pot traduce prin proiectarea vectorilor pe axele triedrului $Oxyz$, în expresii scalare.

Teorema de conservare a cantității de mișcare. În cazul în care sistemul nu are legături, ciocnirea se numește *liberă*. Dacă ciocnirea este liberă și nu sînt forțe percutante exterioare, adică $\sum_{i=1}^n \bar{\mathcal{E}}_i = 0$, cantitatea de mișcare a sistemului se conservă în intervalul de timp considerat, adică:

$$\sum_{i=1}^n m_i \bar{v}'_i = \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i. \quad (19.3)$$

Observații

Se precizează că atât în teorema de variație, cît și în aceea de conservare, intervalul de timp considerat poate fi cuprins chiar în interiorul lui $t' - t$, adică de pildă: poate fi $t_0 - t$ sau $t' - t_0$.

Teorema de conservare este valabilă și dacă există forțe percutante exterioare dar care sînt perpendiculare toate pe o direcție, de pildă pe Ox , adică: $\bar{\mathcal{E}}_{1x} = 0$, în acest caz se conservă valoarea proiecției cantității de mișcare pe această direcție, adică:

$$\sum_{i=1}^n m_i \bar{v}'_{ix} = \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_{ix}. \quad (19.4)$$

În condițiile conservării cantității de mișcare a unui sistem fără legături, centrul de masă al sistemului își menține mișcarea: $\bar{v}'_c = \bar{v}_c$.

Teorema de variație a momentului cinetic. Momentul cinetic poate fi considerat în raport cu un punct oarecare O , originea unui sistem de

referință și se notează \bar{K}_0 , sau în raport cu axa (Δ) care trece prin O și are valoarea scalară K_Δ .

Expresia matematică a teoremei, în raport cu un punct, este:

$$\bar{K}'_0 - \bar{K}_0 = \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{r}}_i \times m_i \bar{\mathbf{v}}'_i - \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{r}}_i \times m_i \bar{\mathbf{v}}_i = \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{r}}_i \times \bar{\mathbf{Q}}_i, \quad (19.5)$$

adică: *variația momentului cinetic în raport cu un punct oarecare al unui sistem de puncte materiale în intervalul de timp considerat este egală cu momentul rezultat în raport cu același punct al tuturor percuțiilor exterioare (date și de legătură).*

Observații

Potrivit definiției, momentul unui vector în raport cu o axă (Δ) este proiecția, pe direcția axei, a momentului vectorului în raport cu un punct O al axei. Conform convenției adoptate, această proiecție este *tot un vector*. Astfel că momentul cinetic al unui sistem de puncte materiale în raport cu o axă (Δ) de versor $\bar{\mathbf{u}}$ se notează cu \bar{K}_Δ și are valoarea scalară: $K_\Delta = \bar{K}_0 \cdot \bar{\mathbf{u}}$.

Înmulțind scalar cu $\bar{\mathbf{u}}$ expresia matematică (19.5) a teoremei de variație a momentului cinetic în raport cu originea O , se obține expresia matematică (scalară) a teoremei momentului cinetic, al sistemului de puncte materiale, în raport cu axa (Δ):

$$K'_\Delta - K_\Delta = \sum_{i=1}^n (\bar{\mathbf{r}}_i \times m_i \bar{\mathbf{v}}'_i) \bar{\mathbf{u}} - \sum_{i=1}^n (\bar{\mathbf{r}}_i \times m_i \bar{\mathbf{v}}_i) \bar{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^n (\bar{\mathbf{r}}_i \times \bar{\mathbf{Q}}_i) \bar{\mathbf{u}} = \mathfrak{M}_\Delta$$

au

$$K'_\Delta - K_\Delta = \mathfrak{M}_\Delta, \quad (19.6)$$

adică: *variația momentului cinetic, în raport cu o axă oarecare, al unui sistem de puncte materiale, în intervalul de timp considerat, este egală cu momentul rezultat, în raport cu aceeași axă, al tuturor percuțiilor exterioare (date și de legătură).*

Se precizează că (19.6) exprimă scalar această teoremă.

Teorema de conservare a momentului cinetic. În cazul când nu sînt percuții exterioare sau dacă momentul rezultat al percuțiilor exterioare (date și de legătură), în raport cu punctul O , este nul în intervalul de timp considerat, momentul cinetic al sistemului, în raport cu O , se conservă în acel interval de timp.

Teorema de conservare a momentului cinetic se aplică și în cazul momentului cinetic în raport cu o axă (Δ): dacă momentul rezultat al tuturor percuțiilor exterioare (date și de legătură) în raport cu axa (Δ) este nul în intervalul de timp considerat, momentul cinetic al sistemului în raport cu (Δ) se conservă în acel interval de timp, adică: $K'_\Delta = K_\Delta$, relația de conservare putîndu-se exprima scalar.

19.A.5. Unele aplicații clasice

a) **Definiții.** Dacă două solide au, în momentul ciocnirii, mișcări de translație, iar vitezele lor sînt dirijate după normala comună în punctul de contact, ciocnirea se numește *dreaptă* (fig. 19.A.2).

Dacă normala comună trece prin centrele de masă ale celor două solide, ciocnirea se numește *centrică*.

Dacă solidele sînt sfere omogene, ciocnirea dreaptă este și centrică.

b) *Ciocnirea dreaptă a două sfere omogene*. Date : m_1, m_2 , masele sferelor ; \bar{v}_1 și \bar{v}_2 vitezele în momentul t , la începutul ciocnirii ; Ox , linia centrelor și normala comună (fig. 19.A.3). Nu există decît percuții interioare. Aceste percuții au momente nule față de centrele de masă. Ca urmare și după ciocnire mișcarea va fi tot de translație.

Necunoscute : \bar{v}_0 viteza în momentul t_0 , al schimbării sensului procesului de ciocnire (sfîrșitul comprimării și începutul destinderii) ; \bar{v}'_1 și \bar{v}'_2 , vitezele în momentul t' al sfîrșitului ciocnirii.

Relații scrise în baza conservării cantității de mișcare în oricare din momentele ciocnirii :

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_0 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2. \quad (19.7)$$

Vitezele fiind coliniare în toate momentele, relațiile au fost scrise scalar ; la fel va fi și pentru percuții.

Percuțiile interioare din faza de comprimare :

$$\mathcal{E} = m_1(v_1 - v_0) = m_2(v_0 - v_2) = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}. \quad (19.8)$$

Percuțiile interioare din faza de destindere :

$$\mathcal{E}' = m_1(v_0 - v'_1) = m_2(v'_2 - v_0) = \frac{m_1 m_2 (v'_1 - v'_2)}{m_1 + m_2}. \quad (19.9)$$

Raportul percuțiilor :

$$\frac{\mathcal{E}'}{\mathcal{E}} = \frac{v'_1 - v'_2}{v_1 - v_2} = e, \quad (19.10)$$

este dat de raportul, cu semn schimbat, al vitezelor relative de la sfîrșitul și de la începutul ciocnirii.

S-a notat cu e coeficientul de restituire al percuției.

Acest coeficient, determinat numai experimental, reprezintă starea elasto-plastică a materialelor solidelor în intervalul de timp al ciocnirii. Dacă $e = 1$, percuția de destindere este egală cu percuția din faza de comprimare și se obișnuiește a se denumi ciocnirea, în aceste condiții, ca fiind *perfect elastică*. Dacă $e = 0$, percuția de destindere este nulă, adică cele două solide au aceeași viteză $v'_1 = v'_2$ în continuare, ciocnirea ar fi *perfect plastică*.

În realitate $0 < e < 1$, percuția, la destindere, nu se restituie decît parțial.

Cunoașterea coeficientului de material e permite ridicarea nedeterminării și calculul necunoscutelor cu ajutorul ecuațiilor (19.8), (19.9), (19.10), adică :

$$v_0 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}; \quad v'_1 = \frac{v_1(m_1 - e m_2) + v_2(1 + e) m_2}{m_1 + m_2}; \quad (19.11)$$

$$\mathcal{E} = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}; \quad \mathcal{E}' = -e \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}; \quad (19.12)$$

$$v'_2 = \frac{v_2(m_2 - e m_1) + v_1(1 + e) m_1}{m_1 + m_2}. \quad (19.13)$$

O parte a mișcării mecanice trece în alte forme nemecanice de mișcare (termică, electrică, de deformare etc.).



Fig. 19.A.2

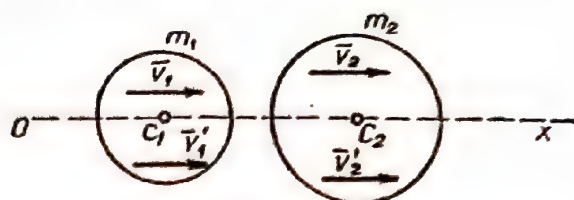


Fig. 19.A.3

Această trecere se exprimă prin diferența dintre energia cinetică E la momentul t și energia cinetică E' la momentul t' :

$$E - E' = \frac{m_1 m_2 (1 - e^2)}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2. \quad (19.14)$$

Observații

Relația (19.7) justifică definiția dată *cantității de mișcare*, una din măsurile mișcării mecanice care caracterizează capacitatea acestei mișcări de a se transmite, tot sub formă mecanică, de la o sferă la alta.

Relația (19.14) justifică *definiția energiei cinetice*, cea de a doua măsură a mișcării mecanice caracterizând capacitatea acestei mișcări de a trece într-o altă formă nemecanică de mișcare.

c) *Ciocnirea oblică a două sfere omogene*. Sferile au mișcări de translație dar vitezele lor nu sînt îndreptate după normala comună în punctul de contact (fig. 19.A.4). Se neglijează percuțiile tangențiale (datorită frecărilor) față de percuțiile centrale. Dacă $\vec{V}_1 = \vec{v}_1 + \vec{u}_1$ și $\vec{V}_2 = \vec{v}_2 + \vec{u}_2$, se calculează componentele normale \vec{v}_1 și \vec{v}_2 ca la ciocnirea centrală și de-oarece \vec{u}_1 și \vec{u}_2 nu se modifică,

$$|\vec{V}'_1| = \sqrt{v_1'^2 + u_1^2}; \quad |\vec{V}'_2| = \sqrt{v_2'^2 + u_2^2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha'_1 = \frac{u_1}{v_1'}; \quad \operatorname{tg} \alpha'_2 = \frac{u_2}{v_2'} \text{ etc.}$$

Dacă sfera O_1 lovește oblic o placă plană fixă (similară cu o sferă de masă infinită) cu viteza \vec{V}_1 înclinată de unghi α față de normala la placă (fig. 19.A.5), se găsește:

$$v'_1 = ev_1 = -eV_1 \cos \alpha_1; \quad u_1 = V_1 \sin \alpha_1,$$

$$|\vec{V}'_1| = |\vec{V}_1| \sqrt{\sin^2 \alpha_1 + e^2 \cos^2 \alpha_1} \leq |\vec{V}_1|,$$

iar

$$\operatorname{tg} \alpha'_1 = -\frac{1}{e} \operatorname{tg} \alpha_1.$$

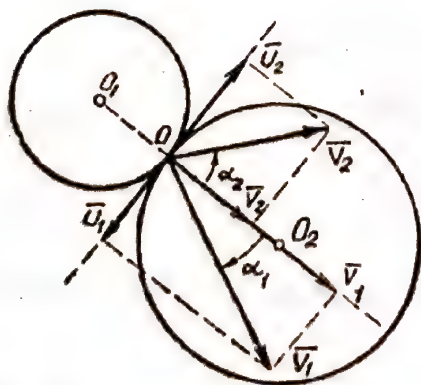


Fig. 19.A.4

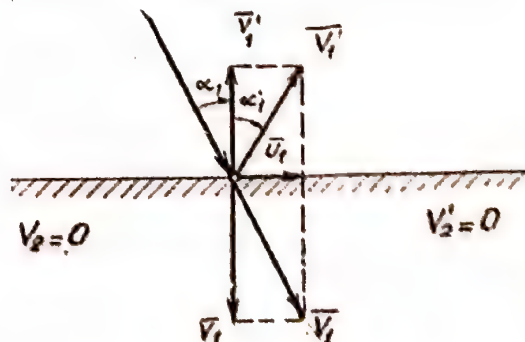


Fig. 19.A.5

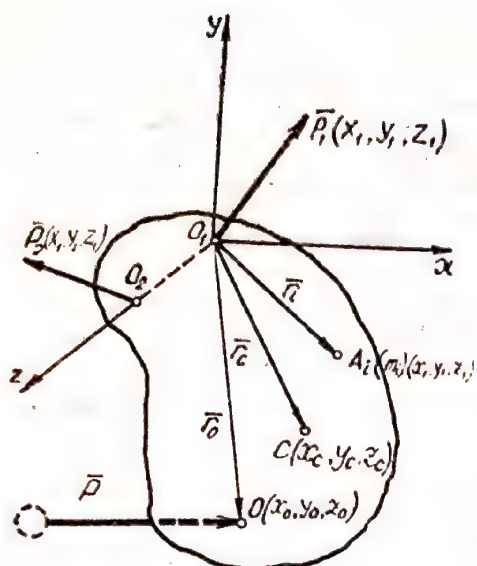


Fig. 19.A.6

Observație

Cazul particular: $\alpha_1 = 0$, $V_1 = v_1$, $V'_1 = v'_1 = -ev_1$ permite determinarea experimentală a coeficientului e :

$$e = -\frac{v'_1}{v_1} = \sqrt{\frac{h'}{h}},$$

unde h este înălțimea de la care este lăsată sfera să cadă pe placa plană fixă, iar h' este înălțimea pînă la care se ridică sfera după ciocnire.

d) Ciocnirea unei sfere în mișcare de translație cu un solid în mișcare de rotație.

Date: un solid este în mișcare de rotație în jurul unei axe fixe O_1z , O_1 și O_2 fiind punctele de legătură fixe cu axa ($O_1O_2 = c$). Sfera de masă M , în translație rectilinie într-un plan perpendicular pe

axă, lovește solidul după normala comună în punctul de contact O , cu viteza \bar{v} în momentul în care solidul se rotea cu $\bar{\omega}$. Distanța de la axa O_1O_2 la suportul vitezei \bar{v} este a , iar momentul de inerție al solidului în raport cu axa de rotație este $J = J_0$, în calculele față de triedrul O_1xyz (fig. 19.A.6).

Necunoscute: vitezele \bar{v}' și $\bar{\omega}'$ după ciocnire și percușiile: $\bar{\mathcal{E}}$ (percuție exterioară) $\bar{\mathcal{E}}_1$ și $\bar{\mathcal{E}}_2$ percușiile de legătură din punctele O_1 respectiv O_2 ale axei.

Se aplică sistemului sferă-solid în rotație, teorema momentului cinetic în raport cu axa O_1O_2 . În acest caz, în intervalul $t' - t$ percuția din O devenind interioară, iar momentele percușiilor din O_1 și O_2 fiind nule, momentul cinetic al sistemului se conservă și se obține ecuația scalară cu v' și ω' ca necunoscute:

$$J\omega' + Mav' = J\omega + Mav. \quad (19.15)$$

Notînd cu v_0 și v'_0 vitezele punctului O la începutul și la sfîrșitul ciocnirii care, local, are caracterul ciocnirii drepte a două sfere, se poate scrie, în funcție de coeficientul de restituire e , ecuația:

$$e = -\frac{v' - v'_0}{v - v_0} = -\frac{v' - \omega'a}{v - \omega a}. \quad (19.16)$$

Din (19.15) și (19.16) se obțin rezultatele căutate:

$$v' = \frac{a(1+e)J\omega + (Ma^2 - eJ)v}{J + Ma^2}; \quad (19.17)$$

$$\omega' = \frac{(J - Ma^2e)\omega + Ma(1+e)v}{J + Ma^2}. \quad (19.18)$$

Trecerea unei părți a mișcării mecanice în forme nemecanice de mișcare se exprimă prin:

$$E - E' = \frac{MJ(1-e^2)}{2(J + Ma^2)} (v - a\omega)^2. \quad (19.19)$$

Calculul percuțiilor. Se continuă cu precizarea axelor sistemului de referință ales: axa de rotație O_1O_2 este O_1z .

Percuția \bar{x} fiind perpendiculară pe O_1z , se alege planul O_1xy astfel încât să conțină percuția, iar O_1x să fie paralelă cu \bar{x} ; deci $\bar{x}(X, O, O)$, iar $\bar{r}_0(x_0, y_0, O)$. Se notează cu $\bar{r}_i(x_i, y_i, z_i)$ vectorul de poziție al unui punct A_i de masă m_i al solidului în rotație, cu $\bar{r}_c(x_c, y_c, z_c)$ vectorul de poziție al centrului de masă C și cu m , masa solidului.

Necunoscutele sistemului sînt scalarii proiecțiilor pe axe ale percuțiilor $\bar{x}(X, O, O)$; $\bar{x}_1(X_1, Y_1, Z_1)$; $\bar{x}_2(X_2, Y_2, Z_2)$, în număr de șapte.

Se aplică teorema cantității de mișcare pentru solid:

$$\sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i' - \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i = \bar{x} + \bar{x}_1 + \bar{x}_2, \quad (19.20)$$

relație care, ținînd seamă de teorema mișcării centrului de masă, devine

$$m(\bar{\omega}' - \bar{\omega}) \times \bar{r}_c = \bar{x} + \bar{x}_1 + \bar{x}_2. \quad (19.21)$$

Se aplică și teorema momentelor cinetice în raport cu O_1 :

$$\sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i' - \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i = \bar{r}_0 \times \bar{x} + \overline{O_1O_2} \times \bar{x}_2, \quad (19.22)$$

după care se fac obișnuitele transformări pe baza relațiilor complexe, consecințe ale alegerii axelor.

19.B. APLICAȚII LA CIOCNIRI

19.B.1. Să se determine raportul maselor a două bile care se ciocnesc în următoarele situații: una dintre bile este în repaus, iar cealaltă bilă rămîne în repaus după ciocnire (fig. 19.B.1, *a*); vitezele celor două bile sînt egale și opuse înainte de ciocnire, iar după ciocnire una dintre bile rămîne în repaus (fig. 19.B.1, *b*).

Rezolvare. Se notează cu m_1 și m_2 valorile celor două mase și cu e coeficientul de restituire la ciocnire. Pentru rezolvare, se aplică teorema de conservare a cantității de mișcare pentru sistemul celor două bile și formula coeficientului de restituire la ciocnire:

— Primul caz:

$$m_1 v_1 = m_2 v_2'; \quad e = \frac{v_2'}{v_1}.$$

Rezultă:

$$\frac{m_1}{m_2} = e.$$

O condiție necesară a producerii acestei ciocniri este ca

$$m_1 < m_2.$$

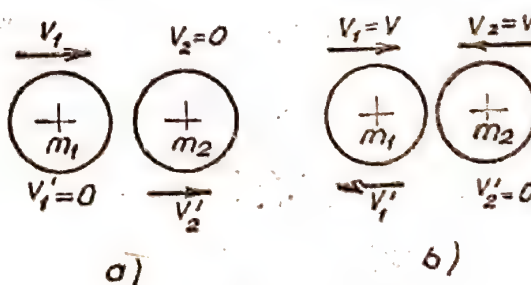


Fig. 19.B.1

— Al doilea caz :

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = -m_1 v'_1; \quad e = \frac{v'_1}{v_1 + v_2},$$

unde :

$$v_1 = v_2 = v.$$

Rezultă :

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{1 + 2e}.$$

19.B.2. O bilă de masă $m_1 = 2$ kg cade pe verticală și are viteza $v_1 = 5$ m/s în momentul ciocnirii cu o altă bilă. Cea de-a doua bilă are masa $m_2 = 0,8$ kg și viteza $v_2 = 3\sqrt{2}$ m/s, înclinată cu unghiul $\alpha = 45^\circ$ față de direcția vitezei primei bile (fig. 19.B.2, a). Să se calculeze vitezele după ciocnire ale celor două bile, cunoscând $e = 0,8$.

Rezolvare. Se aplică teorema de conservare a cantității de mișcare pe linia centrelor celor două bile :

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 \cos \alpha = m_1 v'_1 + m_2 v'_{2n},$$

unde v'_{2n} este componenta normală, după ciocnire, a vitezei \vec{v}'_2 .

Se aplică de asemenea formula coeficientului de restituire la percuție :

$$e = 0,8 = \frac{v'_{2n} - v'_1}{v_1 + v_2 \cos \alpha}.$$

Înlocuind și rezolvând, rezultă :

$$v'_1 = 0,9 \text{ m/s}; \quad v'_{2n} = 7,3 \text{ m/s}.$$

Viteza după ciocnire a bilei de masă m_2 se obține compunând pe v'_{2n} cu componenta v'_{2t} , tangentă la suprafețele în contact care nu se modifică (fig. 19.B.2, b) :

$$v' = \sqrt{v'^2_{2t} + v'^2_{2n}} \approx 7,9 \text{ m/s}.$$

19.B.3. O bilă de masă m cade fără viteză inițială din punctul A și ciocnește în B o suprafață fixă de rază R (fig. 19.B.3). Să se calculeze

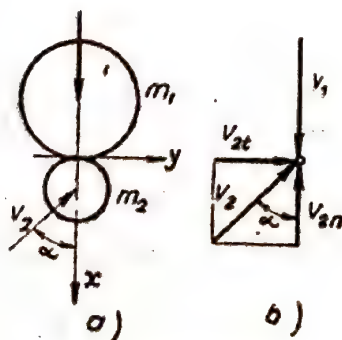


Fig. 19.B.2

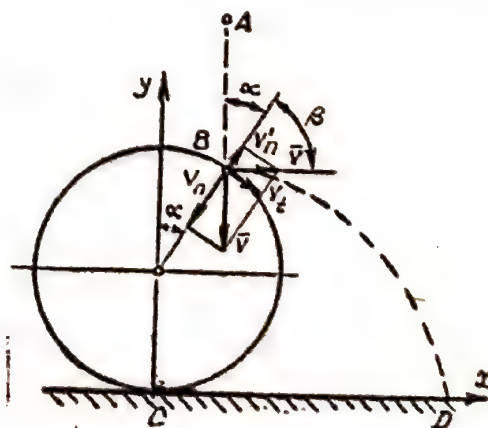


Fig. 19.B.3

distanța CD la care bila cade pe sol, dacă $AB = 1,5 R$, $\alpha = 30^\circ$ și coeficientul de restituire $e = \frac{1}{3}$.

Rezolvare. Ciocnirea bilei este oblică pe o suprafață fixă. În acest caz nu este valabilă teorema de conservare a cantității de mișcare. Se aplică formula lui e pentru componentele normale ale vitezelor la suprafața de ciocnire:

$$e = \frac{v'_n}{v_n} = \frac{v' \cos \beta}{v \cos \alpha}.$$

Deoarece componenta tangentă la suprafața de ciocnire a vitezei rămîne nemodificată:

$$\operatorname{tg} \alpha = e \operatorname{tg} \beta,$$

rezultă:

$$\beta = 60^\circ; \quad v' = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} v e.$$

Viteza cu care bila atinge suprafața cilindrică este $v = \sqrt{3gR}$.

Deci:

$$v' = \sqrt{gR}.$$

Se studiază în continuare mișcarea punctului lansat din B cu viteza inițială orizontală v' . Ecuațiile mișcării raportate la sistemul xCy sînt:

$$x = \frac{R}{2} + t \sqrt{gR}; \quad y = R \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{gt^2}{2}.$$

Introducînd în expresia lui x valoarea lui t obținută din condiția $y = 0$ (bila atinge solul) se găsește:

$$CD = R \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}} \right)$$

19.B.4. Pe capătul A al unei bare omogene $AB = 2l$ ($AO = OB$) de greutate G , cade de la înălțimea l o bilă de greutate $0,5 G$ (fig. 19.B.4). Să se calculeze unghiul descris de bară în rotație pînă la oprire, cunoscînd raza articulației r , coeficientul de frecare în articulație μ' și coeficientul de restituire la ciocnire $e = 0,5$.

Rezolvare. Viteza cu care bila ciocnește bara este:

$$v_1 = \sqrt{2gl}.$$

Pentru studiul ciocnirii, se aplică teorema de conservare a momentului cinetic în raport cu punctul O și formula coeficientului de restituire e :

$$\frac{G}{2g} v_1 l = \frac{G}{2g} v_1' l + \frac{Gl}{3g} \omega_2';$$

$$e = 0,5 = \frac{l\omega_2' - v_1'}{\sqrt{2gl}}.$$

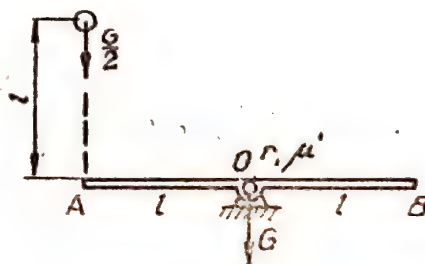


Fig. 19.B.4

Viteza barei după ciocnire este:

$$\omega_2' = \frac{9}{10l} \sqrt{2gl}.$$

Pe durata ciocnirii nu s-a ținut seama de efectul cuplului de frecare din articulație. După ciocnire, se aplică teorema de variație a energiei cinetice, știind că în final bara se oprește. Valoarea momentului cuplului de frecare din articulație este:

$$M_f = \mu' Gr.$$

Deci:

$$-\frac{1}{2} \frac{Gl^2}{3g} \omega_2'^2 = -\mu' Gr \theta.$$

De aici:

$$\theta = \frac{27l}{100 \mu' r}.$$

19.B.5. Bara $OA = l$ de greutate G pleacă din repaus și ciocnește, când ajunge în poziție verticală, o bilă de greutate $\frac{G}{2}$ aflată în repaus pe un plan orizontal (fig. 19.B.5, a). Să se calculeze distanța parcursă de bilă pe planul orizontal până la oprire (coeficientul de frecare μ), unghiul de înclinare maximă a barei după ciocnire și valoarea percuției din articulație. Coeficientul de restituire $e = 0,5$.

Rezolvare. Viteza barei în poziția OA' se obține aplicând teorema de variație a energiei cinetice:

$$\omega = 3 \sqrt{\frac{g}{2l}}.$$

Se aplică teorema de conservare a momentului cinetic în raport cu O și formula coeficientului de restituire:

$$\frac{Gl^2}{3g} 3 \sqrt{\frac{g}{2l}} = \frac{Gl^2}{3g} \omega' + \frac{G}{2g} v'l; \quad \frac{1}{2} = \frac{v' - l\omega'}{3l \sqrt{\frac{g}{2l}}}.$$

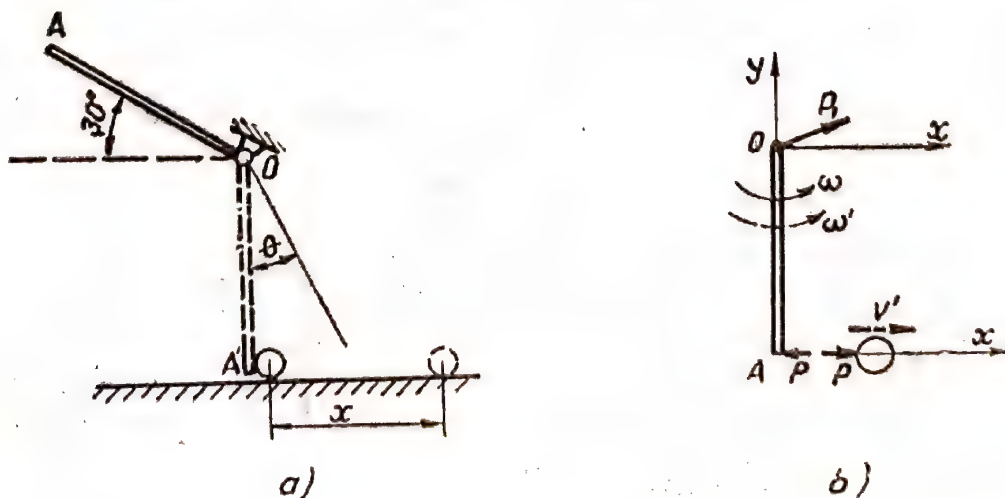


Fig. 19.B.5

Rezultă :

$$\omega' = \frac{3}{10} \sqrt{\frac{g}{2l}}; \quad v' = \frac{9l}{5} \sqrt{\frac{g}{2l}}.$$

Aplicînd teorema de variație a energiei cinetice pentru mișcarea bilei pe planul orizontal și pentru mișcarea barei, rezultă :

$$x = \frac{81l}{100\mu}; \quad \theta = \arccos \frac{197}{200}.$$

Pentru calculul percuției din articulație se izolează bara și corpul (fig. 19.B.5, b), aplicîndu-se teorema de variație a cantității de mișcare :
— pentru bară :

$$\frac{G}{g} \frac{l}{2} (\omega' - \omega)_1 = \mathfrak{L}_{1x} - \mathfrak{L}; \quad 0_1 = \mathfrak{L}_{1y}.$$

— pentru bilă :

$$\frac{G}{2g} v' = \mathfrak{L}.$$

Rezultă :

$$\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}_{1x} = -\frac{9G}{20} \sqrt{\frac{l}{2g}}.$$

19.B.6. O rondelă de greutate $\frac{G}{2}$ cade de la înălțimea h pe corpul de greutate G (fig. 19.B.6). Considerînd ciocnirea perfect plastică, să se calculeze valoarea maximă a deformației arcului în urma ciocnirii. Discul este omogen, de greutate G și rază R .

Rezolvare. Deformația inițială statică a arcului este :

$$x_s = \frac{G}{k}.$$

Viteza rondelii la ciocnire :

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Se aplică teorema de conservare a momentului cinetic în raport cu punctul O :

$$\frac{G}{2g} \sqrt{2gh} R = \frac{3G}{2g} v' R + \frac{GR^2}{2g} \frac{v'}{R}.$$

Rezultă viteza după ciocnire a sistemului, dată prin viteza corpurilor în translație :

$$v' = \frac{1}{4} \sqrt{2gh}.$$

Se aplică teorema de variație a energiei cinetice pentru mișcarea sistemului după ciocnire, în final sistemul ajungînd în repaus :

$$E_1 = \frac{1}{2} \frac{3G}{2g} v'^2 + \frac{1}{2} \frac{GR^2}{2g} \left(\frac{v'}{R} \right)^2 = \frac{Gh}{8}; \quad E_2 = 0;$$

$$L_{12} = \frac{3G}{2} (x_m - x_s) - \int_{x_s}^{x_m} kx dx,$$

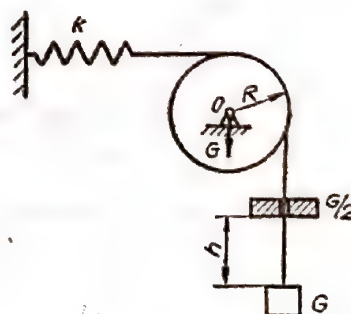


Fig. 19.B.6

unde: x este deformația absolută a arcului;
 x_m — deformația maximă.

Efectuînd calculele, rezultă:

$$x_m = \frac{3G + \sqrt{G(G + kh)}}{2k}.$$

19.B.7. O bară omogenă OA de lungime l și greutate G aflată în repaus, pornește din poziție verticală și ciocnește cu capătul A capătul B al unei bare omogene BC de lungime $2l$ și greutate $2G$ articulată în mijloc și aflată în repaus în poziție orizontală (fig. 19.B.7, *a*). Să se calculeze vitezele unghiulare după ciocnire ale celor două bare și percuțiile din articulații. Coeficientul de restituire al percuției este $e = 2/3$.

Rezolvare. Aplicînd teorema de variație a energiei cinetice pentru bara O_1A , se găsește viteza ei unghiulară în poziție orizontală:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{l}}.$$

Pentru studiul ciocnirii se aplică teorema de variație a momentului cinetic pentru fiecare bară în raport cu articulația proprie (fig. 19.B.7, *b*). Pentru bara O_1A :

$$\frac{Gl^2}{3g} (\omega'_1 - \omega_1) = -\mathfrak{L}.$$

Pentru bara AB :

$$\frac{2G4l^2}{12g} \omega'_2 = \mathfrak{L}.$$

Coeficientul de restituire la percuție este:

$$e = \frac{2}{3} = \frac{l\omega'_2 - l\omega'_1}{l\omega_1}.$$

Rezolvînd sistemul celor trei ecuații pentru ω'_1 , ω'_2 și \mathfrak{L} , se obține:

$$\omega'_1 = -\frac{1}{9} \sqrt{\frac{3g}{l}}; \quad \omega'_2 = \frac{5}{9} \sqrt{\frac{3g}{l}}; \quad \mathfrak{L} = \frac{10G}{27} \sqrt{\frac{3l}{g}}.$$

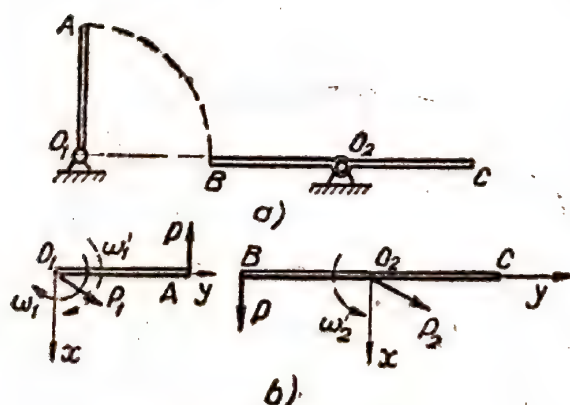


Fig. 19.B.7

Pentru determinarea percuțiilor din articulație, se aplică teorema de mișcare a centrului de masă pentru fiecare din cele două bare.

Pentru bara O_1A :

$$\frac{G}{g} \frac{l}{2} (\omega'_1 - \omega_1) = \mathfrak{L}_x - \mathfrak{L}; \quad 0 = \mathfrak{L}_y.$$

Rezultă:

$$\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}_{1x} = -\frac{5G}{27} \sqrt{\frac{3l}{g}},$$

în sens contrar axei O_1x .

Pentru bara BC :

$$0 = \mathfrak{Z} + \mathfrak{Z}_{2x}; \quad 0 = \mathfrak{Z}_{2y}.$$

De aici:

$$\mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{Z}_{2x} = -\frac{10Gl}{27g} \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

îndreptată în sens contrar axei O_2x .

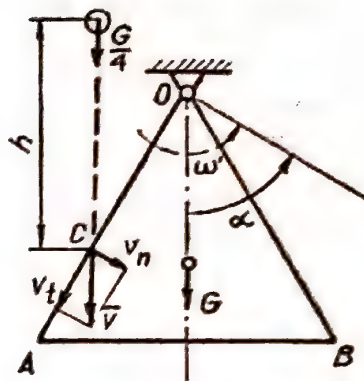


Fig. 19.B.8

19.B.8. O bilă de greutate $\frac{G}{4}$ cade în C pe muchia unei plăci omogene, de forma [unui triunghi echilateral de latură l și greutate G (fig. 19.B.8). Să se calculeze distanța h de cădere, pentru ca în urma ciocnirii înclinarea maximă față de verticală a înălțimii care trece prin O a triunghiului să fie $\alpha = 60^\circ$. Coeficientul de restituire la ciocnire este $e = \frac{2}{3}$, iar $OC = 2CA$.

Rezolvare. Viteza bilei în C este $v = \sqrt{2gh}$.

Deoarece ciocnirea este oblică, interesează componenta normală la suprafața de ciocnire:

$$v_n = v \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2gh}.$$

Se aplică teorema de conservare a momentului cinetic în raport cu punctul O și formula coeficientului e pentru componentele normale ale vitezelor în punctele ce se ciocnesc:

$$\frac{G}{4g} v_n \frac{2l}{3} = \frac{G}{4g} v'_n \frac{2l}{3} + J_O \omega'; \quad e = \frac{2}{3} = \frac{\frac{2l}{3} \omega' - v'_n}{v_n}.$$

Momentul de inerție al plăcii în raport cu vârful O este

$$J_O = \frac{5Gl^2}{12g}.$$

Efectuînd înlocuirile și calculînd, rezultă viteza unghiulară a plăcii în urma ciocnirii:

$$\omega' = \frac{5}{19l} \sqrt{2gh}.$$

Se aplică teorema de variație a energiei cinetice, știind că placa se oprește la înclinarea maximă ($E_2 = 0$):

$$-\frac{1}{2} \frac{5Gl^2}{12g} \omega'^2 = -G \frac{l\sqrt{3}}{3} (1 - \cos \alpha).$$

Efectuînd calculele rezultă:

$$h = 10l.$$

19.B.9. Două roți de grosimi egale, omogene, din același material, având razele R_1 și R_2 se rotesc independent în același sens cu vitezele unghiulare ω_1 și ω_2 (fig. 19.B.9). La un moment dat se cuplează brusc cele două roți cu o curea. Să se calculeze vitezele unghiulare ale celor două roți după cuplare.

Rezolvare. Între momentele de inerție axiale ale celor două discuri se poate stabili relația:

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{R_1^4}{R_2^4}.$$

Pentru studiul cuplării se aplică teorema lui Carnot

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 - \left(\frac{1}{2} J_1 \omega_1'^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2'^2 \right) = \\ = \frac{1}{2} J_1 (\omega_1' - \omega_1)^2 + \frac{1}{2} J_2 (\omega_2' - \omega_2)^2. \end{aligned}$$

Între ω_1' și ω_2' se poate scrie relația roților cuplate:

$$R_1 \omega_1' = R_2 \omega_2'.$$

Rezolvând ecuațiile de mai sus, se obține:

$$\omega_1' = \frac{R_1^2 \omega_1 + R_2^2 \omega_2}{R_1(R_1^2 + R_2^2)}; \quad \omega_2' = \frac{R_1^2 \omega_1 + R_2^2 \omega_2}{R_2(R_1^2 + R_2^2)}.$$

19.B.10. O minge de tenis cade pe sol sub un unghi α față de orizontală (fig. 19.B.10). Să se găsească unghiul sub care mingea sare de la sol, dacă înainte de ciocnire mingea are o mișcare de translație cu viteza v . Masa mingii este m , raza r , momentul de inerție în raport cu centrul său este $J = \frac{2}{3} mr^2$, iar coeficientul de restituire este notat cu e .

Rezolvare. Pentru studiul ciocnirii, se vor aplica teoremele de variație ale cantității de mișcare și a momentului cinetic în raport cu sistemul de axe ales:

$$m(v_x' - v \cos \alpha) = -\mathcal{Q}_x; \quad mv_y' - (-v \sin \alpha) = \mathcal{Q}_y; \quad \frac{2}{3} mr^2(\omega' - 0) = \mathcal{Q}_r.$$

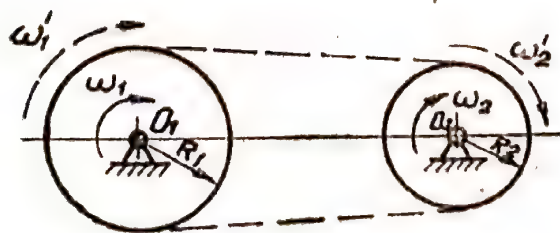


Fig. 19.B.9

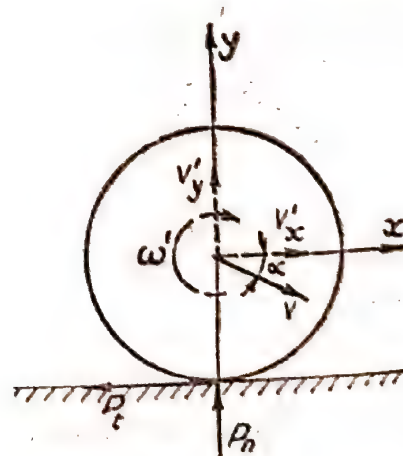


Fig. 19.B.10

Se aplică, de asemenea, formula lui e pentru componentele vitezelor normale la suprafața de ciocnire:

$$e = \frac{v'_y}{v \sin \alpha}.$$

Între cele două componente ale percuției se stabilește relația

$$\mathcal{E}_t = \mu \mathcal{E}_n.$$

Rezolvînd sistemul de ecuații obținute, rezultă:

$$v'_x = v [\cos \alpha - \mu \sin \alpha (1 + e)]; \quad v'_y = v e \sin \alpha;$$

$$\omega' = \frac{3\mu v \sin \alpha (1 + e)}{2r}.$$

Observație

Pentru ca după ciocnirea cu solul mingea să sară pe verticală, trebuie ca $v'_x = 0$.

Deci:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\mu(1 + e)}.$$

Dacă

$$\operatorname{tg} \alpha > \frac{1}{\mu(1 + e)}$$

mingea va sări înapoi ($v'_x < 0$).

19.B.11. Să se determine pozițiile centrelor de percuție A , pentru plăcile din figura 19.B.11, a , b , mobile în jurul axei xx' .

Rezolvare. Pentru a nu apărea percuții în axă, trebuie îndeplinite condițiile:

$$J_{xx} = 0; \quad y_A = \frac{J_{xy}}{My_G}; \quad x_A = \frac{J_{xy}}{My_G}.$$

Toate aceste plăci fiind plane, $z = 0$, deci condiția $J_{xx} = 0$ este îndeplinită.

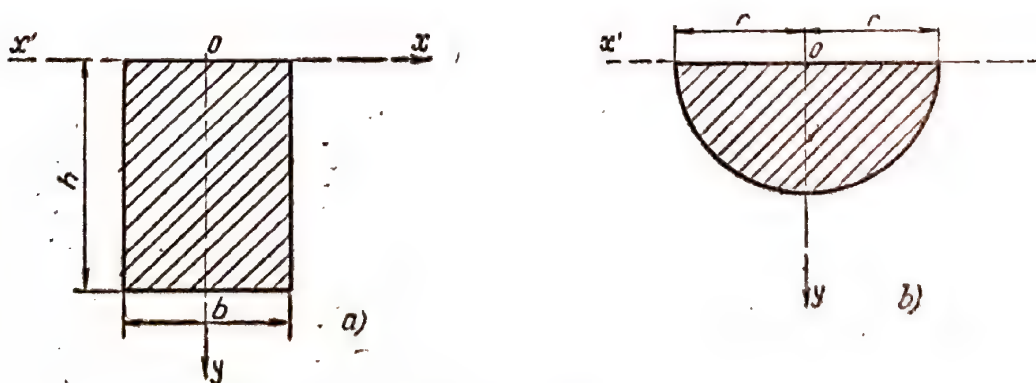


Fig. 19.B.11

Pentru placa din figura 19.B.11, a:

$$J_s = \frac{1}{3} M h^2; \quad J_{xy} = 0; \quad y_s = \frac{h}{2}$$

(axa Oy este axă de simetrie).

Rezultă:

$$y_A = \frac{\frac{1}{3} M h^2}{M \frac{h}{2}} = \frac{2}{3} h \text{ și } x_A = 0.$$

Pentru placa din figura 19.B.11, b:

$$J_s = \frac{MR^2}{4}; \quad J_{xy} = 0; \quad y_s = \frac{4R}{3\pi}.$$

Rezultă:

$$y_A = \frac{\frac{MR^2}{4}}{M \frac{4R}{3\pi}} = \frac{3}{16} R \text{ și } x_A = 0.$$

PRINCIPIUL LUI D'ALEMBERT. METODA CINETOSTATICĂ

20.A. PREZENTARE TEORETICĂ

Metoda cinetostatică este utilizată pentru rezolvarea problemelor de dinamică cu mijloacele staticii. Cu această metodă se pot determina atât legile de mișcare, cât și forțele de legătură dinamice; de asemenea, se poate studia cazul repausului relativ. Metoda cinetostatică se bazează pe principiul lui d'Alembert.

Pentru enunțarea principiului, trebuie scoasă în evidență noțiunea de forță de inerție (v. și Cap. 1).

Considerînd un sistem izolat de puncte materiale M și M' , de mase m și m' în interacțiune (fig. 20.A.1), dacă \vec{F} și \vec{F}' sînt forțele de interacțiune, se poate exprima principiul III, prin ecuația :

$$\vec{F} + \vec{F}' = 0 \quad (20.1)$$

Forța \vec{F}' este reacțiunea punctului material M față de acțiunea punctului M' care tinde să-i modifice starea mecanică inerțială, și se numește forță de inerție. Forța de inerție acționează asupra punctului M' , numit agent extern, prin intermediul legăturii.

Mișcarea punctului material M sub acțiunea punctului M' reprezentată prin \vec{F} , se studiază cu ajutorul ecuației fundamentale :

$$\vec{F} - m\vec{a} = 0. \quad (20.2)$$

Această ecuație se mai poate scrie sub forma :

$$\vec{F} + (-m\vec{a}) = 0. \quad (20.3)$$

Dar, știind că :

$$\vec{F} + \vec{F}' = 0, \quad (20.4)$$

se obține expresia forței de inerție :

$$\vec{F}' = -m\vec{a}. \quad (20.5)$$

Deoarece forța \vec{F}' nu se aplică punctului material M , ecuația (20.4) nu este o condiție de echilibru real, ci o condiție de echilibru fictiv, această ecuație reprezentînd sub o formă simplă principiul lui d'Alembert, al cărui enunț este următorul: „dacă la toate forțele date și de legătură \vec{F} aplicate unui punct material de masă m în mișcare, se adaugă și forța

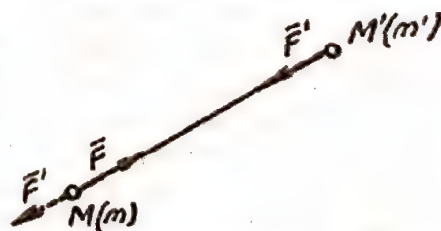


Fig. 20.A.1

de inerție ($-m\ddot{a}$), se obține un sistem de forțe în echilibru fictiv sau dinamic”.

Pentru un sistem de puncte materiale sau un solid rigid se definește tursorul forțelor de inerție în raport cu un punct fix sau cu centrul de masă, ținând seama că $m_i \ddot{a}_i = \frac{d}{dt} (m_i \dot{v}_i)$:

— forța de inerție rezultantă:

$$\bar{F}_{in} = \sum_{i=1}^n (-m_i \ddot{a}_i) = -\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \dot{v}_i = -\frac{d}{dt} m \dot{v} = -m \ddot{a} = -\dot{\bar{H}}, \quad (20.6)$$

unde m este masa totală a sistemului (solidului rigid);

— momentul resultant în raport cu punctul fix O al forțelor de inerție, numit și cuplu de inerție:

$$\bar{M}_{0in} = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times (-m_i \ddot{a}_i) = -\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times m_i \dot{v}_i = -\dot{\bar{K}}_0. \quad (20.7)$$

Condiția de echilibru fictiv se poate aplica și unui sistem material. „Dacă se consideră un sistem de solide rigide în mișcare și se izolează unul din aceste solide, tursorul într-un punct O al forțelor date și de legătură, care acționează asupra solidului, formează împreună cu tursorul forțelor de inerție un sistem în echilibru”. Adică:

$$\bar{R} + \bar{R}_{leg} + \bar{F}_{in} = 0; \quad \bar{M}_0 + \bar{M}_{0leg} + \bar{M}_{0in} = 0, \quad (20.8)$$

unde \bar{R} este rezultanta forțelor exterioare date, \bar{R}_{leg} — rezultanta forțelor de legătură exterioare și interioare, \bar{M}_0 — momentul resultant în raport cu punctul O al forțelor exterioare date, iar \bar{M}_{0leg} — momentul resultant în raport cu punctul O al forțelor de legătură exterioare și interioare.

În aplicații, ecuațiile vectoriale de echilibru dinamic (20.8) se proiectează pe un sistem de axe convenabil ales, rezultând șase ecuații scalare în spațiu, respectiv trei ecuații scalare în plan.

Înlocuind (20.6) și (20.7) în (20.8) se obține:

$$\bar{R} + \bar{R}_{leg} - \dot{\bar{H}} = 0; \quad \bar{M}_0 + \bar{M}_{0leg} - \dot{\bar{K}}_0 = 0. \quad (20.9)$$

20.B. APLICAȚII LA PRINCIPIUL LUI D'ALEMBERT ȘI METODA CINETOSTATICĂ

✕ **20.B.1.** O bilă de masă m , asimilată cu un punct material, este lăsată să coboare de la înălțimea h pe planul înclinat AB , după care se angajează în interiorul cercului de rază r . Viteza inițială este zero. Să se determine înălțimea minimă necesară, pentru ca bila ajunsă în punctul C să nu se desprindă de cerc. Frecarea se neglijează (fig. 20.B.1).

Rezolvare. Pentru ca bila să nu se desprindă de cerc, trebuie ca reacțiunea normală a cercului în punctul C să fie orientată spre centrul O .

Se izolează bila, considerînd că se află în punctul C . Asupra ei acționează următoarele forțe:

mg — greutatea bilei;

N — reacțiunea cercului, îndreptată spre centrul O .

Se adaugă forța de inerție $|\vec{F}_i| = m|\vec{a}_n|$, îndreptată în sens invers accelerației normale a_n .

Dar

$$a_n = \frac{v_c^2}{r}.$$

Viteza în punctul C se determină cu teorema de variație a energiei cinetice:

$$v_c = \sqrt{2g(h - 2r)}.$$

Înlocuind în expresia forței de inerție, rezultă:

$$F_i = \frac{2g(h - 2r)}{r} m.$$

Aplicînd principiul lui d'Alembert și proiectînd ecuația vectorială de echilibru dinamic $\vec{R} + \vec{R}_{in} + \vec{F}_{in} = 0$ pe normală, rezultă:

$$N + mg - \frac{2g(h - 2r)}{r} m = 0,$$

de unde:

$$N = mg \left(\frac{2h}{r} - 5 \right).$$

Cum însă $N \geq 0$, rezultă $h \geq \frac{5r}{2}$.

✕ **20.B.2.** Un punct material de greutate G se deplasează pe cercul de rază R . Știind că a pornit cu viteza inițială v_0 din poziția M_0 , să se studieze mișcarea punctului pe cerc și să se determine expresia reacțiunii normale, funcție de parametrul θ (fig. 20.B.2).

Rezolvare. Pe lângă forța dată G și de legătură N , se introduce și forța de inerție \vec{F}_i , care se descompune după tangenta și normala la cerc în M :

$$\vec{F}_i = -m\vec{a} \begin{cases} |\vec{F}_{it}| = m|\vec{a}_t| = m \frac{dv}{dt} \\ |\vec{F}_{in}| = m|\vec{a}_n| = m \frac{v^2}{R} \end{cases}$$

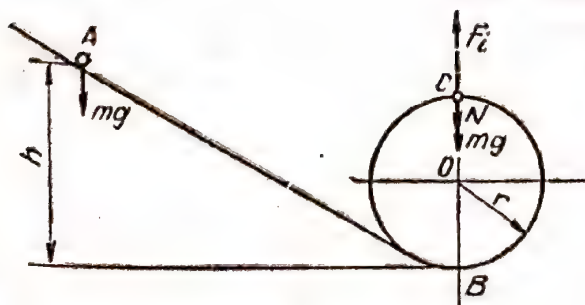


Fig. 20.B.1

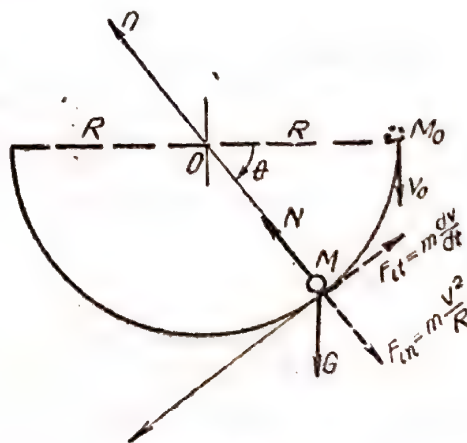


Fig. 20.B.2

Condiția de echilibru dinamic ($\vec{R} + \vec{R}_n + \vec{F}_n = 0$) proiectată pe tangentă și normală conduce la:

$$G \cos \theta - m \frac{dv}{dt} = 0, \quad (a)$$

$$N - G \sin \theta - m \frac{v^2}{R} = 0. \quad (b)$$

Ecuția diferențială (a) scrisă sub forma

$$\frac{dv}{dt} = g \cos \theta$$

devine prin înmulțire cu $d\theta$:

$$dv \frac{d\theta}{dt} = g \cos \theta d\theta; \text{ dar } \frac{d\theta}{dt} = \omega = \frac{v}{R}.$$

Înlocuind și separînd variabilele, se obține:

$$\frac{v dv}{R} = g \cos \theta d\theta,$$

iar integrînd, rezultă:

$$\frac{v^2}{2R} = g \sin \theta + C.$$

Constanta C se determină punînd condițiile inițiale la $t = 0$:

$$\begin{aligned} \theta = 0 \\ v = v_0 \end{aligned} \rightarrow C = \frac{v_0^2}{2R}$$

Deci:

$$\frac{v^2}{R} = 2g \sin \theta + \frac{v_0^2}{R}, \text{ iar } v = \sqrt{2gR \sin \theta + v_0^2}.$$

Introducînd în ecuația (b), se obține:

$$N = G \left(\frac{v_0^2}{gR} + 3 \sin \theta \right).$$

20.B.3. O pană, a cărei secțiune este un triunghi isoscel cu fețele laterale perfect netede și înclinate cu unghiul α față de verticală, are greutatea G și se sprijină pe două prisme identice, de greutate P fiecare. Prismele pot aluneca fără frecare pe un plan orizontal (fig. 20.B.3, a). Să se determine accelerația penei și a prismelor, de asemenea forțele de legătură.

Rezolvare. Se izolează succesiv corpurile.

Asupra penei, care are o mișcare de translație pe verticală cu accelerația a_1 (fig. 20.B.3, b), acționează forțele: G — greutatea proprie; N_1 și N'_1 — reacțiunile normale ale prismelor. Se adaugă forța de inerție $\frac{G}{g} a_1$, în sens invers accelerației a_1 .

Proiectând ecuația vectorială de echilibru dinamic pe axe, se obține:

$$(\Sigma X_i = 0); \quad N_1 \cos \alpha - N'_1 \cos \alpha = 0$$

$$(\Sigma Y_i = 0);$$

$$\frac{G}{g} a_1 + N_1 \sin \alpha + N'_1 \sin \alpha - G = 0.$$

Asupra prisme, care are o mișcare de translație de-a lungul planului orizontal cu accelerația a_2 (fig. 20.B.3, c), acționează forțele: P — greutatea prisme; N_1 — reacțiunea penei; N_2 — reacțiunea planului orizontal. Se adaugă forța de inerție $\frac{P}{g} a_2$, în sens invers accelerației a_2 .

Proiectând condiția vectorială de echilibru dinamic pe axe, rezultă:

$$(\Sigma X_i = 0); \quad N'_1 \cos \alpha - \frac{P}{g} a_2 = 0,$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad N_2 - P - N'_1 \sin \alpha = 0.$$

Datorită simetriei, pentru prisma a doua se vor obține aceleași ecuații dar cu semn schimbat.

Ținând seama de relația cinematică dintre deplasarea pe verticală x_1 a penei și deplasarea pe orizontală x_2 a prismelor (fig. 20.B.3, d), $x_2 = x_1 \operatorname{tg} \alpha$, și derivând de două ori această relație, se obține $a_2 = a_1 \operatorname{tg} \alpha$.

Rezolvând sistemul de ecuații obținut și ținând seama de relația între accelerații, rezultă:

$$a_1 = \frac{G}{G + 2P \operatorname{tg}^2 \alpha} g; \quad a_2 = \frac{G \operatorname{ctg} \alpha}{2P + G \operatorname{ctg}^2 \alpha} g;$$

$$N_1 = N'_1 = \frac{PG}{(2P \operatorname{tg} \alpha + G \operatorname{ctg} \alpha) \cos \alpha};$$

$$N_2 = P \left(1 + \frac{G \operatorname{tg} \alpha}{2P \operatorname{tg} \alpha + G \operatorname{ctg} \alpha} \right).$$

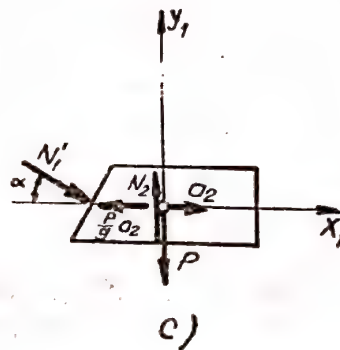
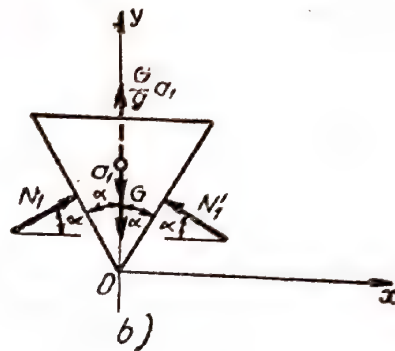
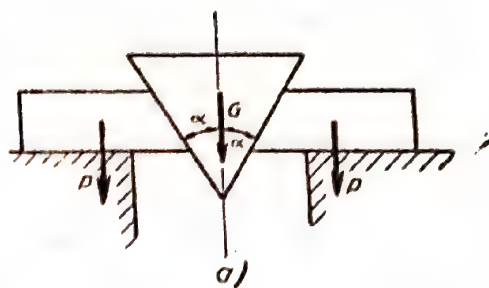


Fig. 20.B.3

20.B.4. Se dă sistemul de corpuri din figura 20.B.4, a, unde s-au specificat mărimile geometrice și mecanice cunoscute: P — greutatea corpului (1), Q și R — greutatea și, respectiv, razele discurilor (2) și (3), α — unghiul dintre planul înclinat și orizontală. Sistemul este inițial în repaus. Să se determine accelerațiile liniare a_i ale centrelor de masă ale corpurilor, accelerațiile unghiulare ϵ_i ale corpurilor, tensiunile în fire,



Rezolvare. Se face analiza cinematică a sistemului de corpuri, exprimând vitezele liniare v_i , ale centrelor de masă și vitezele unghiulare ω_i , ale corpurilor în funcție de viteza $v_{c1} = v$ a centrului C_1 a corpului motor (1), în mișcare de translație (fig. 20.B.4, a). Această analiză se bazează pe proprietatea de inextensibilitate a firului, care conduce la concluzia că toate punctele firului au viteze egale în modul. Considerăm valabilă ipoteza că firele nu alunecă în raport cu discurile ceea ce conduce la egalitatea vitezelor punctelor situate pe periferia unui disc cu vitezele punctelor corespunzătoare ale firului care se reazemă pe acesta. Acceleerațiile liniare a_i , ale centrelor de masă ale corpurilor și accelerațiile unghiulare ε_i , exprimate în funcție de $a_{c1} = a$ se obțin prin derivarea în raport cu timpul a vitezelor corespunzătoare:

$$a_{ei} = \frac{dv_{ei}}{dt}; \quad \varepsilon_i = \frac{d\omega_i}{dt}.$$

Pentru sistematizare, rezultatele analizei cinematice sînt prezentate în tabelul 20.1.

Tabelul 20.1

Nr. corp.	Mișcare	Viteze		Accelerații	
		v_{ct}	ω_t	a_{ct}	ϵ_t
1	Translație	v	0	a	0
2	rotație	0	$\frac{v}{R}$	0	$\frac{a}{R}$
3	Plan-paralelă	$\frac{v}{2}$	$\frac{v}{2R}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2R}$

Se izolează succesiv corpurile din sistem, introducând pentru fiecare forțele date, de legătură, precum și torsorul forțelor de inerție calculat în raport cu centrul de masă C_i (fig. 20.B.4, b, c, d).

Se scriu, pentru fiecare corp, ecuațiile scalare de echilibru dinamic, obținute prin proiecția ecuațiilor vectoriale (20.4) pe axele alese (fig. 20.B.4, b, c, d).

$$\text{Corpul (1): } (\Sigma X_i = 0); \quad P - S_1 - \frac{P}{g} a = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Corpul (2): } (\Sigma X_i = 0); \quad H_2 - S_2 \cos \alpha &= 0; \\ (\Sigma Y_i = 0); \quad V_2 - Q - S_1 - S_2 \sin \alpha &= 0; \\ (\Sigma M_{C_2} = 0); \quad S_2 R - S_1 R + \frac{Q}{g} \frac{R^2}{2} \frac{a}{R} &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Corpul (3): } (\Sigma X_i = 0); \quad S_2 - Q \sin \alpha - T - \frac{Q}{g} \frac{a}{2} &= 0; \\ (\Sigma Y_i = 0); \quad N - Q \cos \alpha &= 0; \\ (\Sigma M_{C_3} = 0); \quad \frac{Q}{g} \frac{R^2}{2} \frac{a}{2R} - S_2 R - TR &= 0. \end{aligned}$$

Rezolvând sistemul de ecuații, rezultă pentru necunoscutele căutate:

$$a = \frac{4(2P - Q \sin \alpha)}{8P + 7Q} g \text{ și, respectiv,}$$

$$a_{c1} = a = \frac{4(2P - Q \sin \alpha)}{8P + 7Q} g; \quad \varepsilon_1 = 0;$$

$$a_{c2} = 0; \quad \varepsilon_2 = \frac{a}{R} = \frac{4(2P - Q \sin \alpha)}{(8P + 7Q)R} g;$$

$$a_{c3} = \frac{a}{2} = \frac{2(2P - Q \sin \alpha)}{8P + 7Q} g; \quad \varepsilon_3 = \frac{a}{2R} = \frac{2(2P - Q \sin \alpha)}{(8P + 7Q)R} g;$$

$$S_1 = \frac{PQ(7 + 4 \sin \alpha)}{8P + 7Q};$$

$$S_2 = \frac{Q(3P + 4P \sin \alpha + 2Q \sin \alpha)}{8P + 7Q};$$

$$V_2 = \frac{Q^2(7 + 2 \sin^2 \alpha) + PQ(15 + 7 \sin \alpha + 4 \sin^2 \alpha)}{8P + 7Q};$$

$$H_2 = \frac{Q(3P + 4P \sin \alpha + 2Q \sin \alpha) \cos \alpha}{8P + 7Q};$$

$$N = Q \cos \alpha, \quad T = -\frac{Q(P + P \sin \alpha + 3Q \sin \alpha)}{8P + 7Q}.$$

Semnul minus al forței de frecare arată că sensul real al acesteia este invers decît cel presupus inițial în figura 20.B.4, a , discul avînd tendința de a aluneca în jos pe planul înclinat.

Se izolează corpurile din sistem, introducând forțele date, de legătură, forțele și cuplul de inerție (fig. 20.B.3, b, c).

Se scriu, pentru fiecare corp, ecuațiile scalare de echilibru dinamic :

$$\text{Corpul (1): } (\Sigma Y_i = 0); \quad S + \frac{P}{g} a - P = 0.$$

$$\text{Corpul (2): } (\Sigma X_i = 0); \quad S + \frac{Q}{g} \frac{ar}{R-r} - T = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad N - Q = 0;$$

$$(\Sigma M_i = 0); \quad S(R-r) - \frac{Q}{g} \frac{ar}{R-r} r - J_0 \frac{a}{R-r} = 0.$$

Pentru ca trolul (2) să nu alunece, trebuie satisfăcută inegalitatea $|\bar{T}| < \mu |\bar{N}|$.

Rezolvând sistemul de ecuații, rezultă :

$$a = \frac{P(R^2 - r^2)g}{P(R-r)^2 + Qr^2 + J_0 g}; \quad S = \frac{P(Qr^2 + J_0 g)}{P(R-r)^2 + Qr^2 + J_0 g}; \quad N = Q;$$

$$T = \frac{P(QRr + J_0 g)}{P(R-r)^2 + Qr^2 + J_0 g}; \quad \mu > \frac{P}{Q} \frac{QRr + J_0 g}{P(R-r)^2 + Qr^2 + J_0 g}.$$

20.B.6. O bară OA de lungime l și greutate G articulată în O este menținută în poziție orizontală cu ajutorul firului AA' (fig. 20.B.6). Se cere să se calculeze legea de mișcare și reacțiunile din articulația O pentru momentul în care se taie firul ($t = 0$), precum și pentru momentul când bara trece prin poziția verticală.

Rezolvare. Se aplică principiul lui d'Alembert efectuând reducerea forțelor de inerție în punctul fix O . În acest caz, torsorul forțelor de inerție este :

$$F_{in} \begin{cases} |\bar{F}|_{inv} = ma_{cv} = \frac{Gl}{2g} \omega^2; \\ |\bar{F}|_{int} = ma_{ct} = \frac{Gl}{3g} \varepsilon. \end{cases}$$

$$M_{ino} = J_0 \varepsilon = \frac{Gl^2}{3g} \varepsilon.$$

Se face observația că reducerea forțelor de inerție se poate efectua și în raport cu centrul maselor C , caz în care se schimbă valoarea cuplului de inerție $M_{ino} = J_c \varepsilon = \frac{Gl^2}{12g} \varepsilon$.

Proiectând pe axe ecuația de echilibru dinamic pentru o poziție oarecare a barei față de orizontală (θ), rezultă :

$$(\Sigma X_i = 0); \quad -H + F_{inv} \cos \theta + F_{int} \sin \theta = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad -V + F_{inv} \sin \theta - F_{int} \cos \theta + G = 0;$$

$$(\Sigma M_0 = 0); \quad \frac{Gl^2}{3g} \varepsilon - G \frac{l}{2} \cos \theta = 0,$$

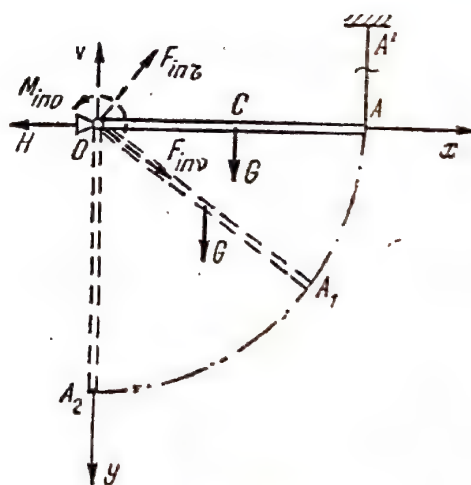


Fig. 20.B.6

de unde se deduce:

$$\varepsilon = \ddot{\theta} = \frac{3g}{2l} \cos \theta.$$

Înmulțind ambii membri cu $\dot{\theta}$ și integrând, se obține:

$$\frac{\omega^2}{2} = \frac{3g}{2l} \sin \theta + C.$$

Condițiile inițiale fiind $t = 0: \theta = 0; \dot{\theta} = 0$, rezultă $C = 0$, deci legea de mișcare este:

$$\omega^2 = \frac{3g}{l} \sin \theta.$$

Expresiile reacțiunilor, pentru o poziție oarecare, sînt:

$$H = F_{inv} \cos \theta + F_{int} \sin \theta = \frac{Gl}{2g} (\omega^2 \cos \theta + \varepsilon \sin \theta) = \frac{9}{8} G \sin 2\theta;$$

$$\begin{aligned} V &= G + F_{inv} \sin \theta - F_{int} \cos \theta = G + \frac{Gl}{2g} (\omega^2 \sin \theta - \varepsilon \cos \theta) = \\ &= G - \frac{3G}{4} (\cos 2\theta - \sin^2 \theta). \end{aligned}$$

Din aceste expresii se obțin, prin particularizare, valorile reacțiunilor:

— pentru poziția orizontală ($\theta = 0$): $H = 0; V = \frac{G}{4};$

— pentru poziția verticală ($\theta = \frac{\pi}{2}$): $H = 0; V = \frac{5G}{2}.$

În poziția verticală accelerația unghiulară este $\varepsilon = \dot{\omega} = 0$, deci viteza unghiulară este maximă $\omega_{max} = \sqrt{\frac{3g}{2l}}.$

20.B.7. Sistemul de corpuri din figura 20.B.7, *a* este format din cadrul O_1O_2AB de greutate neglijabilă, care se poate roti în jurul axei verticale O_1O_2 . Brațul AB are lungimea a . În punctul B este fixată printr-o articulație cilindrică bara BD de greutate G și lungimea l , situată în același plan cu axa O_1O_2 . La extremitatea D a barei este atașat un punct material de greutate Q . Să se determine viteza unghiulară ω a cadrului, necesară pentru ca bara să facă în poziția de echilibru relativ unghiul α dat cu verticala.

Rezolvare. Se izolează bara introducând forțele date și de legătură (fig. 20.B.7, *b*). Se adaugă forța de inerție a barei și forța de inerție a punctului material Q .

Forța de inerție a barei are expresia:

$$F_{in} = ma_s = \frac{G}{g} \omega^2 \left(a + \frac{l}{2} \sin \alpha \right).$$

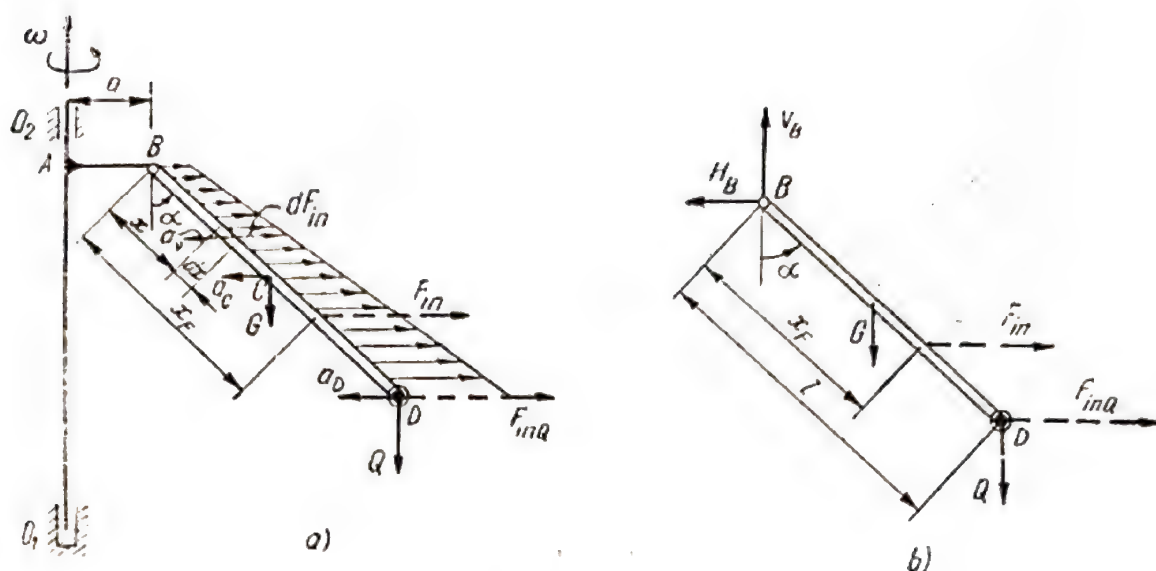


Fig. 20.B.7

Suportul forței de inerție a barei se determină aplicînd teorema momentelor (forțe paralele, care variază liniar):

$$x_F = \frac{\int_0^l x dF_{in}}{\int_0^l dF_{in}},$$

unde forța elementară de inerție are expresia:

$$dF_{in} = dm \cdot a_v = \frac{G}{lg} dx \omega^2 (a + x \sin \alpha).$$

Înlocuind și integrînd, rezultă:

$$x_F = \frac{(3a + 2l \sin \alpha)}{3(2a + l \sin \alpha)}.$$

Forța de inerție a punctului material Q este:

$$F_{inQ} = \frac{Q}{g} a_D = \frac{Q}{g} \omega^2 (a + l \sin \alpha).$$

Se scrie ecuația de echilibru dinamic:

$$(\sum M_B = 0); \quad -G \frac{l}{2} \sin \alpha + F_{in} x_F \cos \alpha - Ql \sin \alpha + F_{inQ} l \cos \alpha = 0.$$

Înlocuind și făcînd calculele, rezultă:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g(G + 2Q) \operatorname{tg} \alpha}{3a(G + 2Q) + 2l(G + 3Q) \sin \alpha}}.$$

20.B.8. O placă omogenă, de greutate G , avînd forma unui triunghi dreptunghic OAB cu catetele b și h , este articulată în A și simplu rezemată în O , legături situate pe axa de rotație DE , în jurul căreia placa

Din relațiile (a), (b) și (d) se deduce :

$$c = \frac{\int_0^h \frac{y}{2} dF_{in}}{F_{in}} = \frac{h}{4}.$$

Izolînd placa (fig. 20.B.10, b) se scriu ecuațiile de echilibru dinamic :

$$(\Sigma X_i = 0); \quad F_{in} + N - H = 0;$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad N - G = 0;$$

$$(\Sigma M_0 = 0); \quad hN + \frac{3}{4} hF_{in} - \frac{b}{3} G = 0.$$

Rezultă expresiile reacțiunilor :

$$N = G \left(\frac{b}{3h} - \frac{b\omega^2}{4g} \right); \quad H = G \left(\frac{b}{3h} - \frac{b\omega^2}{12g} \right); \quad V = G.$$

Contactul din O încetează cînd $N = 0$, de unde se obține viteza unghiulară corespunzătoare :

$$\omega = \sqrt{\frac{4g}{3h}}.$$

PRINCIPIUL DEPLASĂRILOR VIRTUALE

21.A. PREZENTARE TEORETICĂ

Principiul deplasărilor virtuale sau al lucrului mecanic virtual se aplică sistemelor materiale în echilibru static sau dinamic cu legături ideale.

21.A.1. Legături și deplasări

Un punct material poate avea pe o suprafață o legătură scleronomă, dacă suprafața este fixă. O astfel de legătură se exprimă prin:

$$f(x, y, z) = 0. \quad (21.1)$$

În cazul în care suprafața se deplasează sau se deformează în timp, legătura este reonomă și se exprimă prin:

$$f(x, y, z, t) = 0. \quad (21.2)$$

La o legătură scleronomă o deplasare $d\vec{r}$ a punctului, compatibilă cu legătura, are loc numai în planul tangent. Una dintre aceste deplasări este cea reală, produsă de sistemul de forțe dat; oricare altă deplasare din planul tangent este o deplasare posibilă și s-ar putea produce sub acțiunea unui alt sistem de forțe.

În cazul legăturii reonome deplasările reală și cele posibile nu mai au loc în planul tangent, deoarece atât suprafața cât și planul tangent ocupă o altă poziție față de cea ocupată în momentul anterior.

Pot fi imaginate și la aceste legături niște deplasări compatibile cu legăturile, astfel încât să fie situate în planul tangent. Pentru aceasta, se consideră suprafața ca fiind fixă la un moment dat t . Astfel de deplasări nu sînt nici reale, nici posibile. Ele se numesc deplasări virtuale și se notează $\delta\vec{r}(\delta x, \delta y, \delta z)$.

Pentru generalizare, se adoptă aceeași notație și pentru legăturile scleronome. O deplasare posibilă, compatibilă cu legăturile, se exprimă la legătura scleronomă prin:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0, \quad (21.3)$$

iar la legătura reonomă prin:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0. \quad (21.4)$$

În cazul deplasării virtuale suprafețele sînt considerate la un moment dat, deci pentru ambele tipuri de legături se poate scrie:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0. \quad (21.5)$$

Simbolul δ nu operează asupra lui t .

21.A.2. Lucrul mecanic virtual

Deoarece deplasarea virtuală are loc în planul tangent la suprafață, se poate scrie:

$$\bar{N} \delta \vec{r} = 0. \quad (21.6)$$

Relația exprimă pe de altă parte faptul că lucrul mecanic elementar virtual al reacțiunii normale este nul.

Dacă punctul material este în echilibru sub acțiunea rezultantei forțelor active \bar{F} și a reacțiunii normale \bar{N} , adică:

$$\bar{F} + \bar{N} = 0,$$

înmulțind scalar cu $\delta \vec{r}$ și ținând seama de (21.6), rezultă:

$$\bar{F} \cdot \delta \vec{r} = 0. \quad (21.7)$$

Extinzind la un număr dat de puncte materiale, se obține:

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \delta \vec{r}_i = 0. \quad (21.8)$$

Aceasta este expresia matematică a principiului deplasărilor virtuale sau al lucrului mecanic virtual.

Condiția necesară și suficientă pentru ca un sistem de puncte materiale supus la legături ideale să fie în echilibru este ca lucrul mecanic virtual al forțelor efectiv aplicate să fie nul.

Pentru aplicațiile practice, expresia (21.8) se poate utiliza sub formă analitică (21.9) sau geometrică (21.10):

$$\delta L = \sum_{i=1}^n (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0. \quad (21.9)$$

$$\delta L = \sum_{i=1}^n F_i \delta s_i \cos \alpha_i = 0. \quad (21.10)$$

Dacă punctul este în mișcare: $\bar{F} + \bar{N} = m\bar{a}$, sau:

$$\bar{F} + \bar{N} - m\bar{a} = 0, \quad (21.11)$$

care reprezintă condiția de echilibru dinamic.

Înmulțind scalar cu $\delta \vec{r}$, rezultă:

$$(\bar{F} - m\bar{a}) \delta \vec{r} = 0. \quad (21.12)$$

Pentru un sistem de puncte materiale,

$$\sum_{i=1}^n (\bar{F}_i - m_i \bar{a}_i) \delta \vec{r}_i = 0. \quad (21.13)$$

Aceasta este expresia principiului lucrului mecanic virtual aplicat în dinamică.

Lucrul mecanic virtual produs de forțele active și de inerție ale unui sistem de forțe în echilibru dinamic, pentru deplasări compatibile cu legăturile, este nul.

Dacă sistemul material are un număr p de grade de libertate, el depinde de un număr p de parametri independenți, denumiți coordonate generalizate q_k .

O legătură scleronomă se exprimă prin:

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_k); \quad k = 1, 2 \dots p, \quad (21.14)$$

iar o legătură reonomă prin:

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_k, t); \quad k = 1, 2 \dots p. \quad (21.15)$$

Pentru ambele legături

$$\delta \bar{r}_i = \sum_{k=1}^p \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k. \quad (21.16)$$

Introducînd (21.16) în (21.8), rezultă:

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i \left(\sum_{k=1}^p \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \right) = 0. \quad (21.17)$$

Relația (21.17) este identică cu (21.18):

$$\sum_{k=1}^p \left(\sum_{i=1}^n \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k = 0. \quad (21.18)$$

Deoarece parametrii q_k sînt independenți, expresia (21.18) trebuie să fie identic nulă, deci se obțin p ecuații de tipul:

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k} = 0. \quad (21.19)$$

Expresia (21.19) poartă numele de forță generalizată (notată Q_k) și are dimensiunea unei forțe dacă coordonata corespunzătoare este o distanță și dimensiunea unui moment, dacă coordonata este un unghi. Deci, se poate scrie:

$$Q_k = 0. \quad (21.19')$$

21.A.3. Principiul lui Toricelli

În cazul cînd sistemul în echilibru static este acționat numai de greutatea punctelor sau corpurilor care compun sistemul, se poate scrie:

$$\bar{F}_i = \bar{G}_i = -G_i \bar{k}.$$

Expresia (21.8) a principiului lucrului mecanic virtual se scrie

$$-\sum_{i=1}^n G_i \delta z_i = 0. \quad (21.20)$$

Aplicînd teorema momentelor statice,

$$\delta \left(z_i \sum_{i=1}^n G_i \right) = 0. \quad (21.21)$$

Rezultă, de aici :

$$\delta z_c = 0. \quad (21.22)$$

Aceasta înseamnă că un sistem de corpuri materiale este în echilibru dacă centrul său de greutate ocupă o poziție de maxim, minim sau la cota constantă. Cele trei poziții corespund în ordine situațiilor de echilibru stabil, instabil sau indiferent.

21.A.4. Viteze virtuale

Asociind deplasarea virtuală cu un timp arbitrar în care ea s-ar putea produce, se poate defini o așa-numită viteză virtuală :

$$\bar{v} = \frac{\delta \vec{r}}{dt}.$$

Astfel, derivata expresiei (21.8) devine :

$$\delta P = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \bar{v}_i = 0. \quad (21.23)$$

Expresia (21.23) poartă numele de metoda vitezelor virtuale sau puterilor virtuale care este foarte potrivită pentru rezolvarea sistemelor de bare articulate în echilibru (grinzi cu zăbrele etc.).

21.B. APLICAȚII LA PRINCIPIUL LUCRULUI MECANIC VIRTUAL

21.B.1. Două inele P și Q , legate între ele printr-un fir perfect flexibil și inextensibil de lungime l , pot aluneca fără frecare pe un cerc de sîrmă, situat într-un plan vertical. Cunoscînd raza r a cercului, să se determine valorile unghiurilor θ_1 și θ_2 pentru poziția de echilibru (fig. 21.B.1).

Rezolvare. Principiul deplasărilor virtuale :

$$\delta L = \sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0,$$

aplicat pe direcția tangentei, pentru o deplasare δs , conduce la :

$$\delta L = P \sin \theta_1 \delta s - Q \sin \theta_2 \delta s = 0.$$

Cum $\delta s \neq 0$, rezultă că :

$$P \sin \theta_1 - Q \sin \theta_2 = 0.$$

Adăugînd relația geometrică $l = r\theta_1 + r\theta_2$,

se obține

$$\operatorname{ctg} \theta_1 = \frac{P + Q \cos \left(\frac{l}{r} \right)}{Q \sin \left(\frac{l}{r} \right)}; \quad \operatorname{ctg} \theta_2 = \frac{P \cos \left(\frac{l}{r} \right) + Q}{P \sin \left(\frac{l}{r} \right)}.$$

21.B.2. Două greutăți P și Q sînt legate de capetele unui fir trecut peste scripetele fix O , astfel încît greutatea P cade după verticală, iar greu-

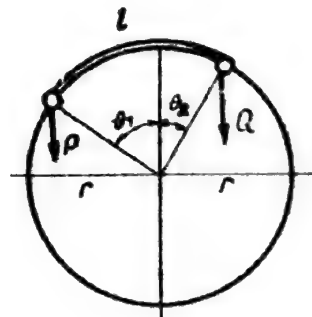


Fig. 21.B.1

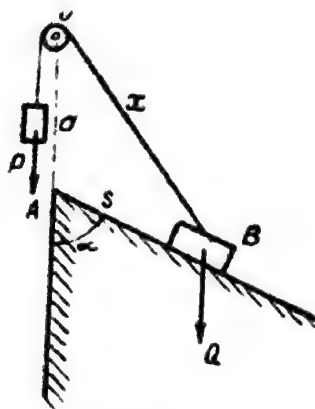


Fig. 21.B.2

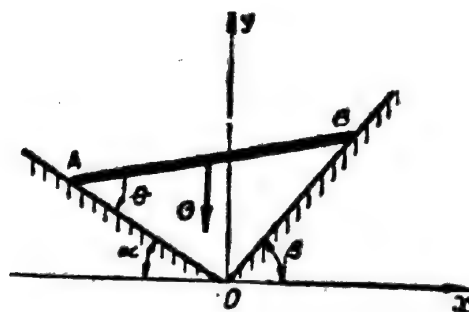


Fig. 21.B.3

tatea Q alunecă pe un plan înclinat (fără frecare). Cunoșcând distanța $OA = a$ și unghiul α , să se determine distanța $AB = s$ pentru poziția de echilibru (fig. 21.B.2).

Rezolvare. Principiul deplasărilor virtuale aplicat pe direcția mișcării conduce la relația:

$$Q \cos \alpha \cdot \delta s - P \delta x = 0.$$

Legătura între x și s se obține din triunghiul OAB :

$$x^2 = a^2 + s^2 + 2as \cos \alpha.$$

Se diferențiază:

$$2x \delta x = 2s \delta s + 2a \cos \alpha \delta s,$$

de unde:

$$\delta x = \frac{(s + a \cos \alpha)}{x} \delta s.$$

Deci:

$$P(s + a \cos \alpha) = Q \cos \alpha \cdot x,$$

adică:

$$P(s + a \cos \alpha) = Q \cos \alpha \sqrt{a^2 + s^2 + 2as \cos \alpha}.$$

Din rezolvarea în raport cu s , rezultă ecuația:

$$s^2 + 2a \cos \alpha \cdot s - \frac{(Q^2 - P^2) a^2 \cos^3 \alpha}{P^2 - Q^2 \cos^2 \alpha} = 0.$$

21.B.3. Să se găsească poziția de echilibru a barei de lungime l și greutate G , rezemată fără frecare pe două plane, înclinate cu unghiurile α și β (fig. 21.B.3).

Rezolvare. Se aplică principiul lui Toricelli sub forma $\delta y_e = 0$. Poziția de echilibru va fi dată de unghiul θ .

Pentru calculul lui y_e se găsește OB :

$$\frac{l}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{OB}{\sin \theta};$$

$$y_e = OB \sin \beta = \frac{l}{2} \sin(\theta - \alpha).$$

De aici :

$$\delta y_c = \frac{l \cos \theta \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \delta \theta - \frac{l}{2} \cos(\theta - \alpha) \delta \theta = 0.$$

Rezolvind, se obține :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2 \sin \beta - \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta) \sin \alpha}.$$

21.B.4. Să se găsească poziția de echilibru pentru bara OA din figura 21.B.4. Se cunosc greutatea G a barei, greutatea P care acționează printr-un fir asupra capătului barei și lungimile $OA = OB = l$.

Rezolvare. Se alege unghiul θ pentru stabilirea poziției de echilibru. Se aplică principiul deplasărilor virtuale și se dă barei OA o deplasare infinitesimală $\delta \theta$.

Dacă se notează cu L lungimea firului, deplasarea greutateii P este :

$$\delta s = L - 2l \sin \frac{\theta}{2} - \left[L - 2l \sin \frac{\theta + \delta \theta}{2} \right].$$

Dezvoltind și considerind $\delta \theta$ mic, rezultă :

$$\delta s = l \delta \theta \cos \frac{\theta}{2}.$$

Lucrul mecanic virtual este

$$\delta L = G \frac{l}{2} \delta \theta \sin \theta - Pl \delta \theta \cos \frac{\theta}{2} = 0.$$

Deoarece deplasarea virtuală este diferită de zero, rezultă :

$$G \sin \theta - 2P \cos \frac{\theta}{2} = 0,$$

cu soluțiile :

$$\cos \frac{\theta}{2} = 0; \quad \theta = \pi;$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{P}{G}; \quad \theta = 2 \arcsin \frac{P}{G}.$$

21.B.5. Un hexagon $ABCDEF$ este format din bare articulate de lungime și greutate neglijabilă și are bara AB fixată. Sistemul se găsește în echilibru într-un plan vertical sub acțiunea forței P verticale, care acționează la jumătatea laturii DE și a tensiunii dezvoltate în arcul FC . Lungimea liberă a arcului este l , iar constanta sa elastică este k . Să se calculeze poziția de echilibru a hexagonului și forța dezvoltată în arc (fig. 21.B.5).

Rezolvare. Poziția de echilibru este dată de unghiul θ . Pentru a pune în evidență forța din arc, se înlocuiește efectul arcului cu forțele S . Se aplică

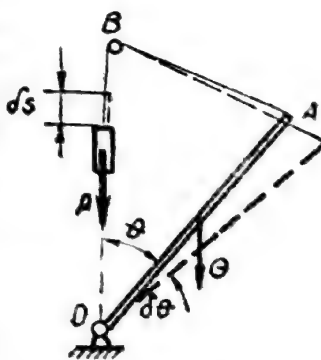


Fig. 21.B.4

principiul lucrului mecanic virtual pentru forțele active P și S :

$$\delta L = -P\delta y_H + S\delta x_P - S\delta x_C = 0.$$

$$y_H = 2l \sin \theta; \quad \delta y_H = 2l \cos \theta \delta \theta;$$

$$x_P = -l \cos \theta; \quad \delta x_P = l \sin \theta \delta \theta;$$

$$x_C = l(1 + \cos \theta); \quad \delta x_C = -l \sin \theta \delta \theta.$$

Înlocuind în ecuația lucrului mecanic virtual se obține:

$$-2Pl \cos \theta \delta \theta + 2Sl \sin \theta \delta \theta = 0.$$

Deoarece alungirea arcului este:

$$\Delta l = 2l \cos \theta,$$

rezultă:

$$S = 2kl \cos \theta.$$

Introducând valoarea lui S , se obține:

— o soluție particulară corespunzătoare unei situații de echilibru nestabil:

$$\cos \theta = 0; \quad \theta = \pi/2; \quad S = 0;$$

— o soluție generală depinzând de sistemul de forțe aplicat:

$$\sin \theta = \frac{P}{2kl}; \quad S = \sqrt{4k^2 l^2 - P^2}.$$

Pentru valabilitatea soluțiilor trebuie ca $P < 2kl$.

Dacă $P = 2kl$, se obține soluția particulară găsită anterior. Dacă $P > 2kl$, arcul va lucra ca un fir; poziția de echilibru depinde de lungimea firului. Forța din arc nu va mai fi o forță activă, ci o tensiune pasivă, a cărei valoare este funcție de poziția de echilibru a sistemului.

21.B.6. Să se găsească poziția de echilibru a sistemului celor două bare articulate din figura 21.B.6. Se dau $OA = l$, $AB = 2l$, greutatea barelor G , Q , iar P , forța orizontală din capătul B al barei AB .

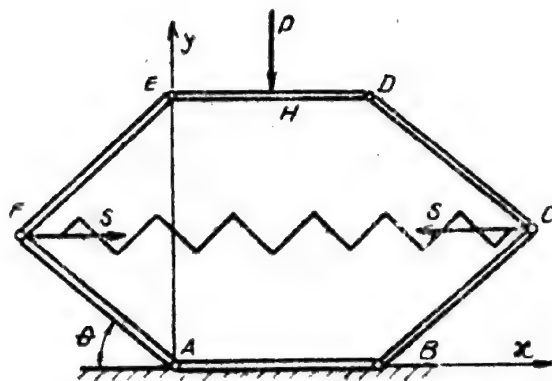


Fig. 21.B.5

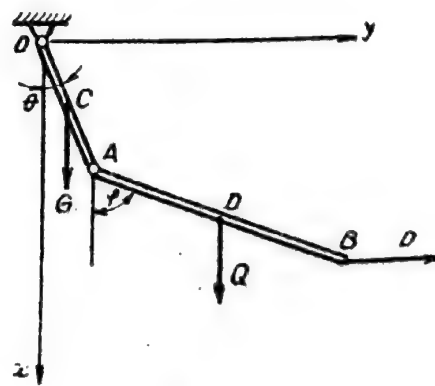


Fig. 21.B.6

Rezolvare. Sistemul are două grade de libertate, reprezentate prin unghiurile θ și φ . Se aplică metoda lucrului mecanic virtual. Introducând forțele active în expresia analitică, se obține:

$$\delta L = G \delta x_c + Q \delta x_b + P \delta y_b = 0;$$

$$x_c = \frac{l}{2} \cos \theta; \quad \delta x_c = -\frac{l}{2} \sin \theta \delta \theta;$$

$$x_b = l \cos \theta + l \cos \varphi; \quad \delta x_b = -l \sin \theta \delta \theta - l \sin \varphi \delta \varphi;$$

$$y_b = l \sin \theta + 2l \sin \varphi; \quad \delta y_b = l \cos \theta \delta \theta + 2l \cos \varphi \delta \varphi.$$

Substituind în ecuație valorile găsite, se obține:

$$-G \frac{l}{2} \sin \theta \delta \theta - Ql(\sin \theta \delta \theta + 2 \sin \varphi \delta \varphi) + Pl(\cos \theta \delta \theta + 2 \cos \varphi \delta \varphi) = 0.$$

Anulând forțele generalizate, se obține:

$$-G \frac{1}{2} \sin \theta - Q \sin \theta + P \cos \theta = 0;$$

$$-2Q \sin \varphi + 2P \cos \varphi = 0.$$

De unde:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2P}{G + 2Q}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{P}{Q}.$$

21.B.7. Să se calculeze reacțiunile din legăturile sistemului de bare din figura 21.B.7, a. Barele au greutatea neglijabilă, iar forțele aplicate au mărimile cunoscute, indicate pe desen.

Rezolvare. Se îndepărtează legătura în care se urmărește calculul unei reacțiuni, după care se dă sistemului o deplasare compatibilă cu legăturile rămase, astfel încât numai forța de legătură dorită să dea lucrul mecanic pentru deplasarea respectivă. Se pot da deplasări virtuale infinitesimale liniare sau unghiulare.

Se înlătură reazemul din D . Se dă o rotație lui CE în jurul lui C ; bara AC rămâne nemișcată (fig. 21.B.7, b). Numai forțele de pe bara CE produc lucru mecanic virtual:

$$\delta L_1 = 3P \cdot 2a \delta \alpha_1 - N_D 6a \delta \alpha_1 + 2P 7a \delta \alpha_1 = 0;$$

$$N_D = \frac{10}{3} P.$$

Se rotește bara CE în jurul lui D , bara AC rămânând fixă (fig. 21.B.7, c):

$$\delta L_2 = N_C 6a \delta \alpha_2 - 3P 4a \delta \alpha_2 + 2Pa \delta \alpha_2 = 0$$

$$N_C = \frac{5}{3} P.$$

Se înlătură reazemul din B , fiind pusă în evidență reacțiunea normală din B . Se dă o rotație $\delta \alpha_3$ în jurul lui A , care atrage o rotație $\delta \beta_3$ în jurul lui D (fig. 21.B.7, d).

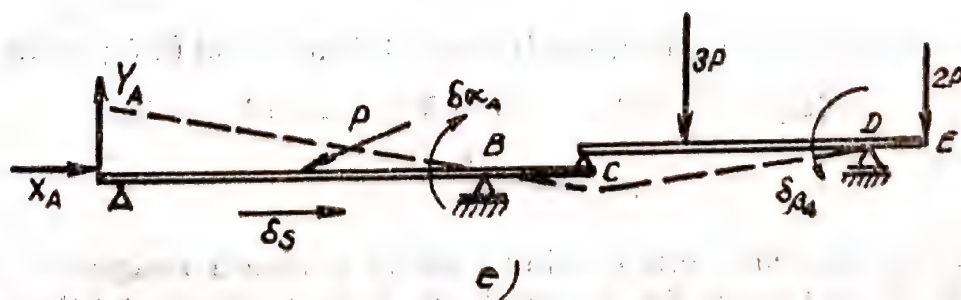
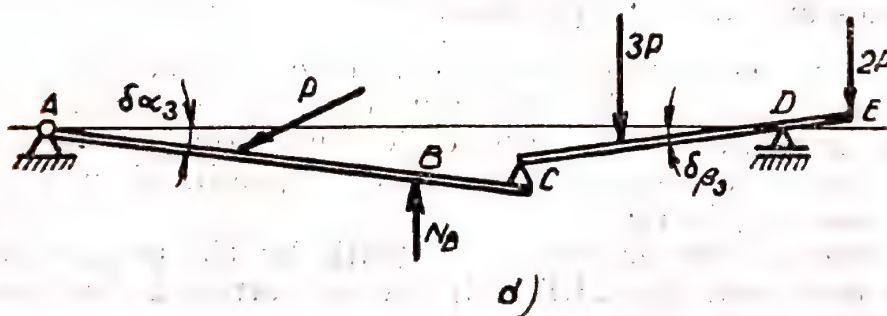
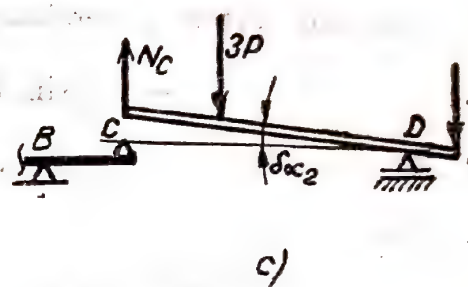
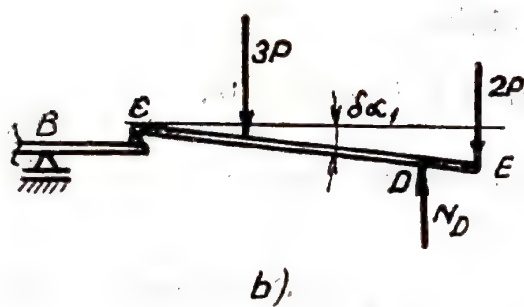
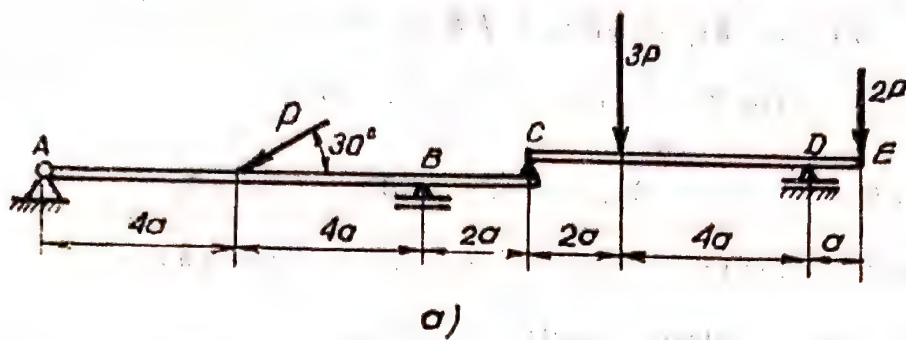


Fig. 21.B.7

Relația geometrică între deplasări este:

$$5\delta\alpha_3 = 3\delta\beta_3.$$

Lucrul mecanic virtual este

$$\delta L_3 = P \sin 30^\circ 4a \delta\alpha_3 - N_3 8a \delta\alpha_3 + 3P 4a \delta\beta_3 - 2Pa \delta\beta_3 = 0.$$

Folosind relația între deplasări, rezultă:

$$N_3 = \frac{7P}{3}.$$

Pentru punerea în evidență a reacțiunii din A, se înlătură articulația (fig. 21.B.7, e). Se dă o rotație $\delta\alpha_4$ în jurul lui B (rezultă o rotație $\delta\beta_4 = \frac{1}{3}\delta\alpha_4$ în jurul lui D) pentru calculul lui Y_A .

Rezultă:

$$Y_A = -\frac{P}{6}.$$

Pentru calculul lui X_A se dă o deplasare δs în lungul barei AC. Rezultă

$$X_A = \frac{P}{2} \sqrt{3}.$$

21.B.8. Să se calculeze eforturile din barele grinzii cu zăbrele din figura 21.B.8, a. Se dau $AB = AC = a$, $CD = 2a$.

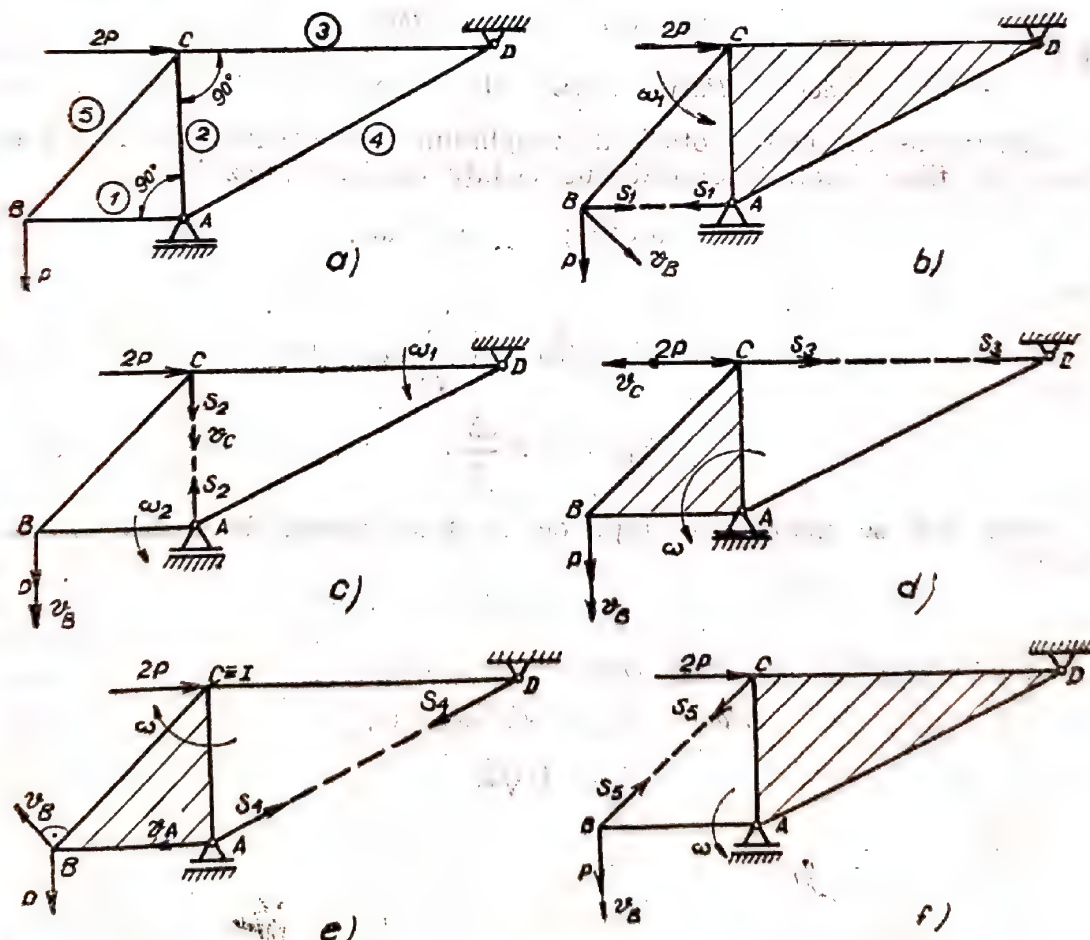


Fig. 21.B.8

Rezolvare. Pentru aplicarea metodei vitezelor virtuale (puterilor virtuale), se îndepărtează bara în care se caută efortul și se dă sistemului o mișcare compatibilă cu legăturile. Ecuația ia forma $P = 0$, unde P este puterea virtuală.

Se dă barei CB viteza ω_1 față de C (fig. 21.B.8, b). Rezultă:

$$v_B = \omega_1 a \sqrt{2}.$$

Deci:

$$\delta P = P \cos 45^\circ \cdot \omega_1 a \sqrt{2} + S_1 \cos 45^\circ \omega_1 a \sqrt{2} = 0.$$

$$S_1 = -P;$$

Barele BC și AB au mișcare plan-paralelă. Bara BC are centrul instantaneu de rotație la infinit, punctele D și A sînt fixe (fig. 21.B.8, c),

$$\frac{v_B}{\omega} = v_C.$$

deci:

$$Pv_B + S_2 v_C = 0; \quad S_2 = -P.$$

Barele ABC se rotesc cu viteza unghiulară ω față de A (fig. 21.B.8, d).

Rezultă:

$$v_B = a\omega; \quad v_C = a\omega.$$

deci:

$$Pa\omega - 2Pa\omega - S_3 a\omega = 0; \quad S_3 = -P.$$

Centrul instantaneu de rotație al triunghiului ABC este în C (fig. 21.B.8, e), bara CD fiind imobilă. Considerînd ω față de $I \equiv C$, rezultă:

$$v_B = a\sqrt{2}\omega; \quad v_A = a\omega,$$

deci:

$$-P \cos 45^\circ a \sqrt{2}\omega - S_4 \frac{2}{\sqrt{5}} a\omega = 0$$

$$S_4 = -P \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Bara AB se poate roti față de A . Dacă viteza de rotație este ω , rezultă:

$$v_B = a\omega$$

Aplicînd metoda vitezelor virtuale, se obține:

$$Pa\omega - S_5 \cos 45^\circ a\omega = 0;$$

$$S_5 = P\sqrt{2}.$$

22.A. PREZENTARE TEORETICA

Ecuațiile lui Lagrange de speța a II-a constituie metode generale ale mecanicii analitice, permițând determinarea poziției unui sistem în fiecare moment în funcție de un număr de parametri geometrici independenți. Acești parametri pot să fie distanțe sau unghiuri și pot fi raportați la corpuri fixe sau la corpurile mobile ale sistemului. Astfel, în figura 22.A.1 parametrii q_1 și q_2 sînt distanțe, iar q_3 este un unghi. Pe de altă parte q_1 și q_3 sînt parametri absoluți (raportați la repere fixe), iar parametrul q_2 este relativ (raportat la punctul A care este mobil). Caracteristic acestor parametri independenți este faptul că numărul lor este egal cu numărul gradelor de libertate ale sistemului, adică cu numărul posibilităților de mișcări independente ale corpurilor sistemului.

Cu ajutorul acestor parametri poate fi exprimată energia cinetică a sistemului, care conține în expresia ei atît coordonatele generalizate, cît și derivatele în funcție de timp ale acestora, denumite viteze generalizate:

$$E = E(q_k, \dot{q}_k, t), \quad k = 1, 2, \dots, h. \quad (22.1)$$

În expresia 22.1, numărul total de grade de libertate a fost notat cu h (în exemplul din fig. 22.A.1, $h = 3$). În cazul general, în expresia lui E apare ca variabilă explicită timpul t . Astfel de legături în care t apare explicit poartă numele de reonome.

În cazul în care timpul nu apare explicit în expresia lui E legăturile se numesc scleronome, deci:

$$E = E(q_k, \dot{q}_k); \quad k = 1, 2, \dots, h. \quad (22.2)$$

Ecuațiile Lagrange de speța a II-a au expresia:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_k} = Q_k; \quad k = 1, 2, \dots, h, \quad (22.3)$$

ele fiind în număr egal cu numărul gradelor de libertate ale sistemului. Notăția Q_k reprezintă forța generalizată, aceasta fiind o expresie cu dimensiuni de forță, dacă q_k reprezintă o distanță sau cu dimensiuni de moment, dacă q_k este un unghi. Expresia ei de calcul este

$$Q_k = \frac{\delta L_k}{\delta q_k}; \quad k = 1, 2, \dots, h, \quad (22.4)$$

unde δL_k reprezintă lucrul mecanic virtual efectuat în sistem numai pentru variația parametrului q_k .

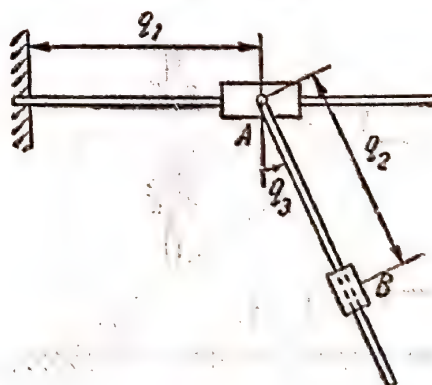


Fig. 22.A.1

În cazul în care forțele sistemului sînt conservative, există o funcție de forță $U = U(q_k, t)$ — pentru legăturile reonome, și $U = U(q_k)$ — pentru legăturile scleronome, din care se obțin toate forțele generalizate ale sistemului :

$$Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k}; \quad k = 1, 2, \dots, h. \quad (22.5)$$

Există posibilitatea concentrării expresiei ecuațiilor (22.3), prin introducerea funcției lui Lagrange, denumită și „potențial-cinetic” :

$$L = L(q_k, \dot{q}_k, t) = E + U; \quad k = 1, 2, \dots, h. \quad (22.6)$$

În acest mod, rezultă :

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}; \quad Q_k + \frac{\partial E}{\partial q_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}, \quad (22.7)$$

deci ecuațiile lui Lagrange devin :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0; \quad k = 1, 2, \dots, h. \quad (22.8)$$

Prin determinarea legilor de variație pentru toți parametrii :

$$q_k = q_k(t); \quad k = 1, 2, \dots, h, \quad (22.9)$$

poziția în spațiu a sistemului ar putea fi reprezentată grafic prin poziția unui punct P în spațiul cu h dimensiuni. Acest punct P exprimă starea sistemului la un moment dat, el purtînd numele de punct figurativ al sistemului. Un astfel de sistem de coordonate de stare poartă numele de spațiu configurațiilor, deplasarea punctului P în acest sistem marcînd evoluția în timp a stării mecanice a sistemului.

22.B. APLICAȚII LA ECUAȚIILE LUI LAGRANGE

22.B.1. Prisma de greutate G , avînd unghiul planului înclinat α , se reazemă pe un plan orizontal. Pe planul înclinat al prisme se reazemă un tacht vertical de greutate Q (fig. 22.B.1).

Se aplică prisme o forță orizontală F pe direcția centrului său de greutate. Să se studieze mișcarea sistemului considerat inițial în repaus, neglijînd frecările, și să se scrie legea de mișcare a prisme.

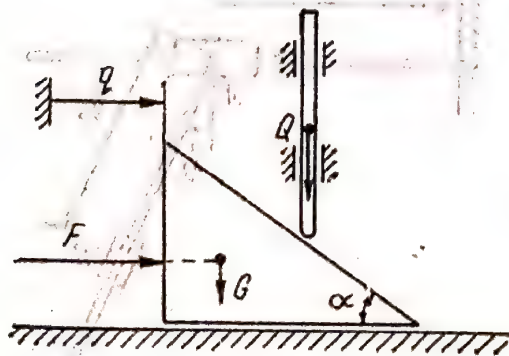


Fig. 22.B.1

Rezolvare. Sistemul are un singur grad de libertate, care se alege sub forma coordonatei generalizate q .

Energia cinetică a celor două corpuri cu mișcări de translație este :

$$E = \frac{1}{2} \frac{G}{g} \dot{q}^2 + \frac{1}{2} \frac{Q}{g} (\dot{q} \operatorname{tg} \alpha)^2.$$

Forța generalizată se obține ca raport al lucrului mecanic virtual total corespun-

zător variației coordonatei generalizate q și diferențiala virtuală a acestei coordonate :

$$Q = \frac{\delta L}{\delta q} = \frac{F \delta q - (Q \operatorname{tg} \alpha) \delta q}{\delta q} = F - Q \operatorname{tg} \alpha.$$

Pentru scrierea unicei ecuații Lagrange în acest caz, se calculează :

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}} = \frac{\dot{q}}{g} (G + Q \operatorname{tg}^2 \alpha); \quad \frac{\partial E}{\partial q} = 0; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\ddot{q}}{g} (G + Q \operatorname{tg}^2 \alpha).$$

Deci, se obține :

$$\frac{\ddot{q}}{g} (G + Q \operatorname{tg}^2 \alpha) = F - Q \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\ddot{q} = \frac{F - Q \operatorname{tg} \alpha}{G + Q \operatorname{tg}^2 \alpha} g.$$

Considerind că sistemul pleacă din repaus, ecuația de mișcare a prisme este :

$$q = \frac{1}{2} g t^2 \frac{F - Q \operatorname{tg} \alpha}{G + Q \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

22.B.2. Se consideră sistemul (fig. 22.B.2) format din prisma de greutate G și unghi de înclinare α și particula materială de greutate P , aflată inițial în repaus pe planul înclinat al prisme. Sistemul este lăsat liber.

Să se studieze mișcarea sistemului, considerind că toate legăturile sînt ideale.

Rezolvare. Sistemul are două grade de libertate, reprezentate de coordonatele generalizate q_1 și q_2 . Energia cinetică a sistemului este :

$$E = \frac{1}{2} \frac{G}{g} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{P}{g} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + 2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos \alpha),$$

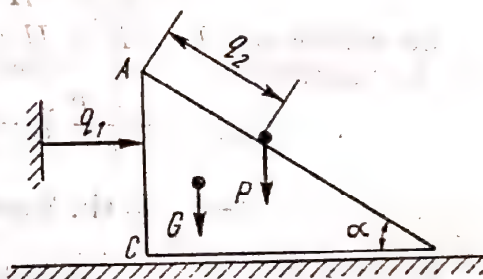


Fig. 22.B.2

iar funcția de forță :

$$U = -P(AC - q_2 \sin \alpha) + C.$$

Pentru scrierea celor două ecuații Lagrange se utilizează funcția $L = E + U$ și se calculează :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{G}{g} \dot{q}_1 + \frac{P}{g} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \cos \alpha); \quad \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \frac{P}{g} (\dot{q}_2 + \dot{q}_1 \cos \alpha); \quad \frac{\partial L}{\partial q_2} = P \sin \alpha.$$

Cu aceste elemente, se obține :

$$\frac{P + G}{g} \ddot{q}_1 + \frac{P}{g} \ddot{q}_2 \cos \alpha = 0;$$

$$\frac{P}{g} \ddot{q}_1 \cos \alpha + \frac{P}{g} \ddot{q}_2 = P \sin \alpha.$$

Rezolvînd sistemul, accelerațiile prisme, respectiv a punctului de greutate P pe prismă, sînt:

$$\ddot{q}_1 = -g \frac{P \sin 2\alpha}{2(G + P \sin^2 \alpha)}; \quad \ddot{q}_2 = g \frac{(P + G) \sin \alpha}{G + P \sin^2 \alpha}.$$

Se observă că ambele mișcări au accelerații constante, deci sînt uniform accelerate. Semnul negativ de la \ddot{q}_1 indică faptul că mișcarea prisme are loc în sens contrar celui presupus inițial sau, dacă inițial prisma are o viteză în sensul presupus, mișcarea ei va fi uniform încetinită.

22.B.3. Prisma din figura 22.B.3, de greutate G , are pe planul înclinat cu unghiul α un canal, înclinat cu unghiul β față de bază, în care se poate mișca un punct material de greutate P . În centrul de greutate al prisme se aplică forța orizontală F , paralelă cu fețele laterale ale prisme. La momentul inițial sistemul este în repaus, punctul material găsindu-se în poziția cea mai de sus a canalului.

Să se găsească legile de mișcare ale corpurilor sistemului, neglijînd frecările.

Rezolvare. Cele două grade de libertate ale sistemului sînt reprezentate de coordonatele generalizate q_1 și q_2 . Se calculează vitezele generalizate, pe baza cărora rezultă:

$$E = \frac{1}{2} G \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} P (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - 2\dot{q}_1\dot{q}_2 \sin \beta \cos \alpha).$$

Funcția de forță este:

$$U = Fq_1 + Pq_2 \sin \beta \sin \alpha + C.$$

Se calculează $L = E + U$ și, procedînd similar ca la problema precedentă, rezultă:

$$\begin{aligned} \frac{G+P}{g} \ddot{q}_1 - \frac{P}{g} \ddot{q}_2 \sin \beta \cos \alpha &= F; \\ -\frac{P}{g} \ddot{q}_1 \sin \beta \cos \alpha + \frac{P}{g} \ddot{q}_2 &= P \sin \beta \sin \alpha. \end{aligned}$$

Rezolvînd sistemul, se obține:

$$\ddot{q}_1 = g \frac{2F + P \sin^2 \beta \sin 2\alpha}{2[G + P(1 - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha)]}; \quad \ddot{q}_2 = g \frac{\sin \beta [(G + P) \sin \alpha + F \cos \alpha]}{G + P(1 - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha)}.$$

22.B.4. Bara AB din figura 22.B.4 se rotește cu viteza unghiulară constantă ω_0 în jurul unui ax vertical, fiind înclinată față de verticală

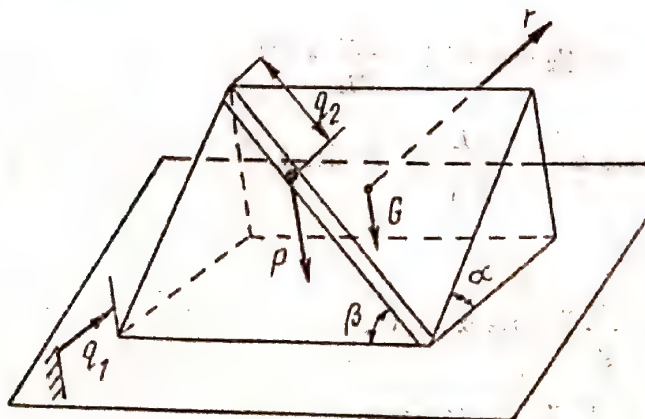


Fig. 22.B.3

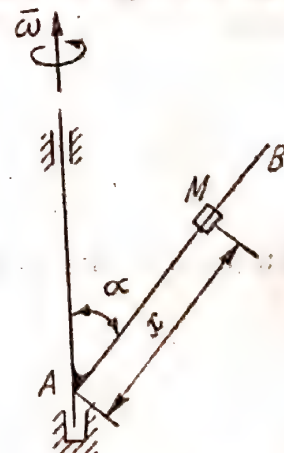


Fig. 22.B.4

cu unghiul α . Pe bara AB poate aluneca fără frecare un cursor M de masă m , asimilabil cu un punct material.

Să se studieze mișcarea cursorului în raport cu bara, dacă la $t = 0$ el este lansat din A cu viteza v_0 față de bară.

Rezolvare. Deoarece bara are mișcare cunoscută, se alege un singur parametru x , pentru studiul mișcării punctului față de bară.

Energia sistemului este:

$$E = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + x^2 \omega_0^2 \sin^2 \alpha),$$

iar funcția de forță are expresia:

$$U = -mgx \cos \alpha + C_0.$$

Ecuția Lagrange este

$$\ddot{x} - x\omega_0^2 \sin^2 \alpha = -g \cos \alpha,$$

iar prin integrare conduce la:

$$x = C_1 e^{\omega_0 t \sin \alpha} + C_2 e^{-\omega_0 t \sin \alpha} + \frac{g \cos \alpha}{\omega_0^2 \sin^2 \alpha}.$$

Se aleg condițiile inițiale $x = 0$, $\dot{x} = v_0$ pentru $t = 0$, cu ajutorul cărora se calculează constantele de integrare:

$$C_1 = \frac{v_0 \omega_0 \sin \alpha - g \cos \alpha}{2\omega_0^2 \sin^2 \alpha}, \quad C_2 = \frac{v_0 \omega_0 \sin \alpha + g \cos \alpha}{2\omega_0^2 \sin^2 \alpha}.$$

Introducând constantele și ordonând expresia lui x , rezultă:

$$x = \frac{v_0}{\omega_0 \sin \alpha} \operatorname{sh}(\omega_0 t \sin \alpha) + \frac{g \cos \alpha}{\omega_0^2 \sin^2 \alpha} [1 - \operatorname{ch}(\omega_0 t \sin \alpha)].$$

22.B.5. Un tub omogen de lungime l și masă M se poate roti în jurul unui ax vertical. Tubul este înclinat cu unghiul α față de ax (fig. 22.B.5). În tub se mișcă, liber un punct material de masă m . La momentul inițial $x = c$, $\dot{x} = 0$, iar tubul se rotește cu viteză unghiulară ω_0 .

Neglijând frecările, să se studieze legile de variație ale vitezelor tubului și punctului față de tub.

Rezolvare. Se aleg doi parametri pentru studiul mișcării: x care marchează mișcarea punctului în tub și θ care stabilește poziția la un moment dat a tubului în rotație, față de un plan vertical fix.

Energia cinetică a sistemului și funcția de forță sînt:

$$E = \frac{1}{2} \frac{Ml^2 \sin^2 \alpha}{3} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + x^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha);$$

$$U = mgx \cos \alpha + C_1.$$

Ecuția Lagrange referitoare la parametrul θ conduce la o integrală primă:

$$\frac{Ml^2 \sin^2 \alpha}{3} \dot{\theta} + mx^2 \dot{\theta} \sin^2 \alpha = C_1.$$

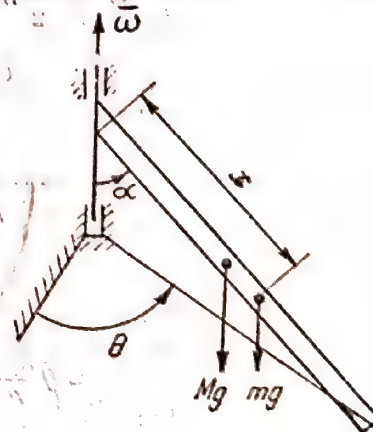


Fig. 22.B.5

Punind condițiile inițiale $t = 0$, $x = c$, $\theta = 0$; $\dot{x} = 0$; $\dot{\theta} = \omega_0$, se calculează constanta C_1 , astfel că integrala particulară a ecuației diferențiale este:

$$\dot{\theta} = \frac{MI^2 + 3mc^2}{MI^2 + 3mx^2} \omega_0.$$

Cea de a doua ecuație, făcând derivatele corespunzătoare, este

$$\ddot{\alpha} - x\dot{\theta}^2 \sin^2 \alpha = g \cos \alpha.$$

Înlocuind pe $\dot{\theta}^2$ și făcând schimbarea de variabilă

$$\ddot{\alpha} = \frac{1}{2} \frac{d(\dot{x}^2)}{dx},$$

rezultă:

$$\frac{d(\dot{x}^2)}{dx} = 2x \sin^2 \alpha \frac{(MI^2 + 3mc^2)^2 \omega_0^2}{(MI^2 + 3mx^2)^2} + 2g \cos \alpha.$$

Se integrează și rezultă:

$$\dot{x}^2 = \frac{(MI^2 + 3mc^2)^2 \omega_0^2 \sin^2 \alpha}{3m(MI^2 + 3mx^2)} + 2gx \cos \alpha + C_2.$$

Punind condițiile inițiale prezentate mai înainte, se calculează C_2 , astfel că expresia vitezei bilei față de tub este

$$\dot{x}^2 = 2g(x - c) \cos \alpha + \frac{\omega_0^2 \sin^2 \alpha (MI^2 + 3mc^2)(x^2 - c^2)}{MI^2 + 3mx^2}.$$

Se observă că cele două viteze s-au calculat în funcție de parametrul x . Ecuațiile sînt valabile atîta timp cît punctul se mișcă în tub.

22.B.6. Un disc omogen de rază r și masă m (fig. 22.B.6) se rostogolește fără alunecare în interiorul unei suprafețe cilindrice de rază $R > r$, plecînd din repaus la $\theta = \alpha$.

Să se calculeze viteza centrului discului cînd acesta trece prin punctul cel mai de jos al traiectoriei sale.

Rezolvare. Singurul grad de libertate este reprezentat de unghiul θ . Se scriu energia cinetică și funcția de forță ale discului:

$$E = \frac{1}{2} m(R - r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{mr^2}{2} \frac{(R - r)^2 \dot{\theta}^2}{r^2};$$

$$U = mg(R - r) \sin \theta + C.$$

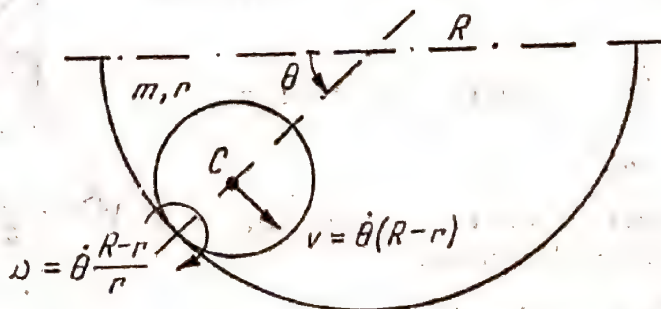


Fig. 22.B.6

Ecuatia Lagrange este

$$\ddot{\theta} - \frac{2}{3} \frac{g}{R-r} \cos \theta = 0.$$

Integrind, rezultă:

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{2}{3} \frac{g}{R-r} \sin \theta = C.$$

Punind condițiile inițiale $t = 0$, $\theta = \alpha$, $\dot{\theta} = 0$, rezultă:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4}{3} \frac{g}{R-r} (\sin \theta - \sin \alpha);$$

$$v_c = (R-r) \dot{\theta};$$

$$(v_c)_{\max} = 2\sqrt{\frac{1}{3} g(R-r)(1 - \sin \alpha)}.$$

22.B.7. Fıind dat sistemul de corpuri din figura 22.B.7, să se calculeze accelerațiile care determină mișcarea sistemului.

Rezolvare. Situația cinematică a corpurilor sistemului, așa cum sînt notațiile pe figură, este reprezentată în tabelul următor. Tot în tabel sînt calculate și energiile cinetice ale corpurilor sistemului, ale cărui grade de libertate sînt x și θ .

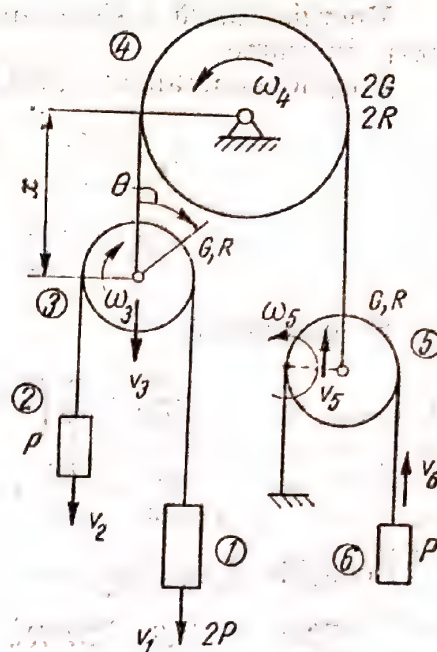


Fig. 22.B.7

Nr.	Mișcare	Viteza	Energia cinetică
1	Translație	$v_1 = \dot{x} + R\dot{\theta}$	$\frac{1}{2} \frac{2P}{g} (\dot{x} + R\dot{\theta})^2$
2	Translație	$v_2 = \dot{x} - R\dot{\theta}$	$\frac{1}{2} \frac{P}{g} (\dot{x} - R\dot{\theta})^2$
3	Plan-paralelă	$v_3 = \dot{x}$	$\frac{1}{2} \frac{G}{g} \dot{x}^2$
		$\omega_3 = \dot{\theta}$	$\frac{1}{2} \frac{GR^2}{2g} \dot{\theta}^2$
4	rotație	$\omega_4 = \dot{x}/2R$	$\frac{1}{2} \frac{2G(2R)^2}{2g} \left(\frac{\dot{x}}{2R} \right)^2$
5	Plan-paralelă	$v_5 = \dot{x}$	$\frac{1}{2} \frac{G}{g} \dot{x}^2$
		$\omega_5 = \dot{x}/R$	$\frac{1}{2} \frac{GR^2}{2g} \left(\frac{\dot{x}}{R} \right)^2$
6	Translație	$v_6 = 2\dot{x}$	$\frac{1}{2} \frac{P}{g} (2\dot{x})^2$

Energia totală a sistemului se obține prin însumarea energiilor fiecărui corp în parte.

Forțele generalizate sînt:

$$Q_x = \frac{\delta L_x}{\delta x} = \frac{3P\delta x + G\delta x - G\delta x - P2\delta x}{\delta x} = P;$$

$$Q_\theta = \frac{\delta L_\theta}{\delta \theta} = \frac{2P \cdot R\delta\theta - P \cdot R\delta\theta}{\delta\theta} = PR.$$

Se calculează:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{g} \left(7P + \frac{7}{2}G \right) + \frac{R\dot{\theta}}{g} P; \quad \frac{\partial E}{\partial \dot{x}} = 0;$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} = \frac{PR}{g} \dot{x} + \frac{R^2\dot{\theta}}{g} \left(3P + \frac{G}{2} \right); \quad \frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} = 0.$$

Ecuațiile Lagrange sînt

$$7(2P + G)\ddot{x} + 2PR\ddot{\theta} = 2Pg; \quad 2P\ddot{x} + (6P + G)R\ddot{\theta} = 2Pg.$$

Rezolvîndu-le, rezultă:

$$\ddot{x} = g \frac{2P(4P + G)}{80P^2 + 56PG + 7G^2}; \quad \ddot{\theta} = g \frac{2P(12P + 7G)}{R(80P^2 + 56PG + 7G^2)}.$$

ECUAȚIILE CANONICE ALE LUI HAMILTON

23.A. PREZENTAREA TEORETICĂ

Așa cum s-a prezentat la capitolul 22, poziția unui sistem la un moment dat se poate defini cu ajutorul parametrilor independenți q_k , unde k ia valori de la 1 la h pentru gradele de libertate ale sistemului. Dacă se consideră ca parametri independenți și vitezele generalizate \dot{q}_k , atunci se poate considera că sistemul material considerat depinde de $2h$ parametri. Pentru a utiliza efectiv acești parametri, în cazul sistemelor pentru care poate fi definită o funcție generală de forță de tipul $U(q_k, t)$ — pentru legături reonome sau $U(q_k)$ — pentru legături scleronome, se introduce noțiunea de impuls generalizat, definit prin relația:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} = p_k; \quad k = 1, 2, \dots, h. \quad (23.1)$$

Impulsul generalizat are dimensiunile unui impuls, dacă corespunde unei coordonate generalizate cu dimensiuni de lungime, și dimensiunile unui moment cinetic în cazul în care coordonata corespunzătoare are dimensiuni de unghi.

Pentru sistemele materiale cu legături olonome poate fi definită funcția lui Hamilton, care reprezintă energia totală a sistemului, exprimată în funcție de q_k și p_k :

$$H = \sum_{k=1}^h p_k \dot{q}_k - L(q_k, \dot{q}_k, t); \quad k = 1, 2, \dots, h. \quad (23.2)$$

Eliminarea vitezei generalizate \dot{q}_k s-a făcut pe baza relației (23.1).

Folosind relația de definiție a lui H , se obțin ecuațiile canonice ale lui Hamilton:

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k; \quad \frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p}_k; \quad k = 1, 2, \dots, h. \quad (23.3)$$

Se obține astfel un sistem de $2h$ ecuații diferențiale de ordinul întâi, care înlocuiesc cele h ecuații de ordinul al doilea ale lui Lagrange.

Se arată că:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (23.4)$$

deci, în cazul în care legăturile sînt scleronome, energia totală a sistemului se conservă:

$$H = E + V = E - U = \text{const.} \quad (23.5)$$

Integrând ecuațiile canonice ale lui Hamilton (23.3), se obțin funcțiile $q_k(t)$ și $p_k(t)$ care definesc starea dinamică a sistemului material la un moment dat. Aceste funcții pot fi privite ca un sistem de coordonate în spațiul euclidian cu $2h$ dimensiuni — denumit spațiul fazelor — în care punctul figurativ al sistemului $P(q_k, p_k)$ descrie traiectorii de fază, cu ajutorul cărora poate fi stabilită atât poziția la un moment dat a punctelor sistemului, dar și impulsurile generalizate corespunzătoare. Utilizarea spațiului fazelor este interesantă mai ales pentru studiul calitativ al comportării sistemului material în timp, pentru aprecierea stabilității mișcării etc.

Din punct de vedere practic, ecuațiile canonice sînt foarte potrivite pentru programare pe calculator, reprezentînd sisteme de ecuații de ordinul întâi, pentru care există metode destul de precise de integrare numerică.

Revenind la expresia (23.4), se remarcă obținerea unei integrale prime a mișcării dacă H nu este funcție explicită de t (vezi 23.5). Se mai pot obține integrale prime dacă una sau mai multe coordonate generalizate q_k nu apar explicit în expresia lui H . Din expresiile (23.3) rezultă că impulsul generalizat corespunzător este constant în acest caz, coordonata respectivă purtînd denumirea de ciclică sau ascunsă.

23.B. APLICAȚII LA ECUAȚIILE CANONICE ALE LUI HAMILTON

23.B.1. Să se studieze mișcarea unei bare grele la suprafața Pămîntului, lansată într-un plan vertical. Se cunosc masa M a barei, momentul de inerție J față de centrul maselor și condițiile inițiale ale mișcării, viteza centrului maselor \bar{v}_0 , unghiul α de înclinare a vitezei \bar{v}_0 față de orizontală, viteza unghiulară momentană ω_0 a barei. Se neglijează rezistența aerului.

Rezolvare. Se alege sistemul de referință Oq_1q_2 din figura 23.B.1, poziția barei fiind determinată în planul vertical de coordonatele q_1 și q_2 ale centrului de greutate și de unghiul q_3 făcut de axa barei cu orizontala Oq_1 .

Energia cinetică a barei la un moment dat este :

$$E = \frac{1}{2} M(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2} J\dot{q}_3^2,$$

iar funcția de forță are expresia :

$$U = -Mgq_2 + C.$$

Utilizînd potențialul cinetic $L = E + U$, rezultă impulsurile generalizate :

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = M\dot{q}_1;$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = M\dot{q}_2;$$

$$p_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} = J\dot{q}_3.$$

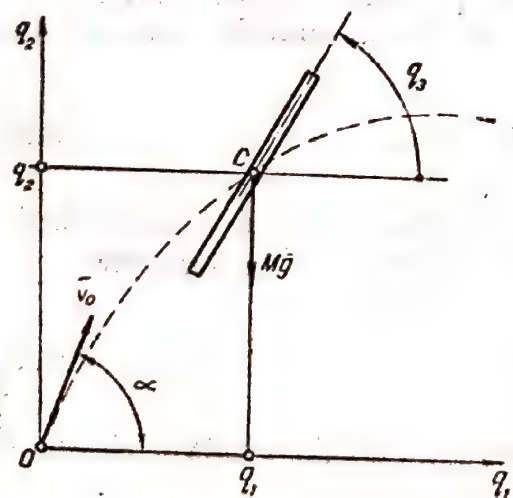


Fig. 23.B.1

Funcția lui Hamilton dată de (23.2), are expresia:

$$H = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 + p_3 \dot{q}_3 - \frac{1}{2} M (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{1}{2} J \dot{q}_3^2 + Mgq_2 + C.$$

Eliminînd vitezele generalizate \dot{q}_k pe baza relațiilor de definiție ale impulsurilor generalizate, rezultă forma $H(q_k, p_k)$ a funcției lui Hamilton:

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2M} + \frac{p_3^2}{2J} + Mgq_2 + C.$$

Ecuațiile canonice ale lui Hamilton (23.3) se obțin foarte simplu:

$$\frac{p_1}{M} = \dot{q}_1; \quad \frac{p_2}{M} = \dot{q}_2; \quad \frac{p_3}{J} = \dot{q}_3;$$

$$0 = -\dot{p}_1; \quad Mg = -\dot{p}_2; \quad 0 = -\dot{p}_3.$$

Integrînd ecuațiile obținute, rezultă:

$$p_1 = C_1; \quad p_2 = -Mgt + C_2; \quad p_3 = C_3;$$

$$q_1 = \frac{C_1}{M} t + C_4; \quad q_2 = -\frac{1}{2} gt^2 + \frac{C_2}{M} t + C_5; \quad q_3 = \frac{C_3}{J} t + C_6.$$

Condițiile inițiale pentru coordonatele utilizate, sînt:

$$t = 0; \quad q_1 = 0; \quad q_2 = 0; \quad q_3 = q_{30};$$

$$p_1 = M\dot{q}_1 = Mv_0 \cos \alpha; \quad p_2 = M\dot{q}_2 = Mv_0 \sin \alpha; \quad p_3 = J\dot{q}_3 = J\omega_0.$$

Utilizînd aceste condiții se determină constantele de integrare, astfel se obține:

$$q_1 = v_0 t \cos \alpha; \quad q_2 = -\frac{1}{2} gt^2 + v_0 t \sin \alpha; \quad q_3 = \omega_0 t + q_{30};$$

$$p_1 = Mv_0 \cos \alpha; \quad p_2 = M(-gt + v_0 \sin \alpha); \quad p_3 = J\omega_0.$$

Traectoria centrului maselor se obține prin eliminarea lui t între coordonatele generalizate:

$$q_3 = \frac{gq_1^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + q_1 \tan \alpha.$$

În timpul mișcării bara se rotește uniform cu viteza unghiulară ω_0 în jurul centrului de greutate.

23.B.2. Să se studieze mișcarea unui punct material de masă m sub acțiunea unei forțe elastice de constantă elastică k .

R e z o l v a r e. Se alege un sistem triortogonal fix, față de care coordonatele punctului sînt x , y și z . Se scriu în ordine expresiile lui E , U și H :

$$E = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2);$$

$$U = -\frac{1}{2} k(x^2 + y^2 + z^2) + C;$$

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m} + \frac{1}{2} k(x^2 + y^2 + z^2) + C.$$

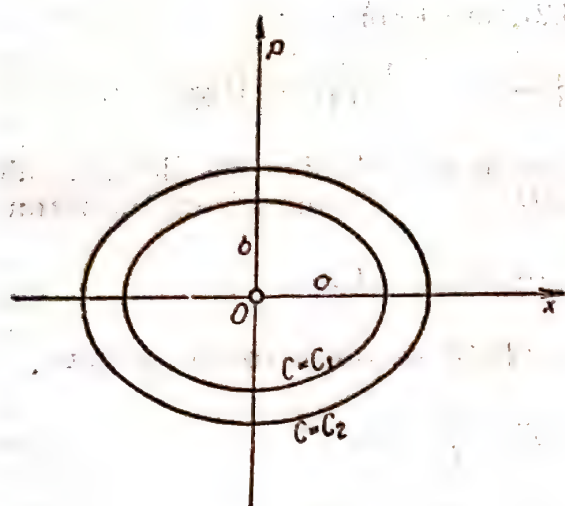


Fig. 23.B.2

De remarcat că $H = \text{const.}$, deoarece legăturile punctului sînt scleronome (nu depind explicit de timp). Ecuațiile canonice sînt:

$$\frac{p_1}{m} = \dot{x}; \quad \frac{p_2}{m} = \dot{y}; \quad \frac{p_3}{m} = \dot{z};$$

$$kx = -\dot{p}_1; \quad ky = -\dot{p}_2; \quad kz = -\dot{p}_3.$$

Integrînd sistemul astfel obținut, se obțin integralele generale corespunzătoare:

$$x = A_1 \cos(\omega t - \varphi_1);$$

$$y = A_2 \cos(\omega t - \varphi_2);$$

$$z = A_3 \cos(\omega t - \varphi_3);$$

$$p_1 = -m\omega A_1 \sin(\omega t - \varphi_1); \quad p_2 = -m\omega A_2 \sin(\omega t - \varphi_2);$$

$$p_3 = -m\omega A_3 \sin(\omega t - \varphi_3);$$

în care $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Pentru determinarea constantelor de integrare $A_1, A_2, A_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ se utilizează condițiile inițiale ale mișcării.

În cazul oscilatorului liniar $y = z = 0$, deci apar numai coordonata x și impulsul generalizat $p_1 = p$. Deoarece legăturile sînt scleronome, conform (23.5) $H = \text{const.}$, deci:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} = \text{const.}$$

Expresia respectivă reprezintă în spațiul fazelor (care în cazul de față are două dimensiuni) ecuația unei elipse, dată în continuare sub forma:

$$\frac{p^2}{2mC} + \frac{x^2}{\frac{2C}{k}} = 1.$$

Traectoriile de fază (curbele descrise de punctul figurativ al sistemului în planul fazelor) vor fi curbe închise descrise de acesta în sensul acelor de ceas (fig. 23.B.2), deoarece pentru o viteză (respectiv, impuls) pozitivă punctul material se mișcă în sensul pozitiv al axei Ox și invers pentru viteză negativă. De asemenea, se poate trage concluzia că mișcarea punctului este stabilă, el rămînînd în vecinătatea originii sistemului Oxp , care reprezintă poziția de echilibru static a punctului material m sub acțiunea forței elastice.

24.A. PREZENTAREA TEORETICĂ

Un sistem mecanic efectuează o *vibrație* sau o *oscilație* dacă parametrii geometrici și cinematici caracteristici la un moment dat variază alternativ în timp față de valorile avute în starea de referință. Vibrația este *periodică* dacă toate elementele mișcării (poziția, viteza \bar{v} , accelerația \bar{a}) se repetă după același timp T , numit *perioadă*.

Cea mai simplă vibrație periodică este *vibrația armonică*, ce se poate exprima sub una din formele:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 \sin \omega t \text{ sau } x = x_0 \sin (\omega t + \varphi) \\ x &= x_0 \cos \omega t \text{ sau } x = x_0 \cos (\omega t - \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (24.1)$$

Vibrația armonică poate fi exemplificată cu ajutorul oscilatorului liniar (fig. 24.A.1).

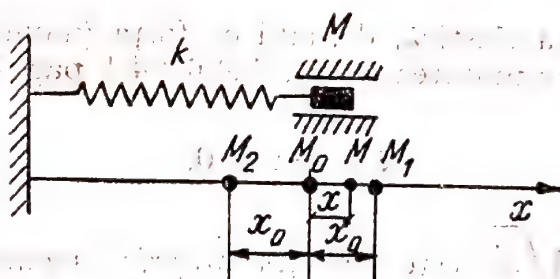


Fig. 24.A.1

Elementele caracteristice ale unei vibrații armonice sînt:

- *Elongația* x — distanța de la poziția de repaus la oscilator;
- *Amplitudinea* x_0 — elongația maximă;
- *Perioada* T — timpul cel mai scurt după care mișcarea se repetă identic;
- *Pulsația* ω — numărul de vibrații complete efectuate în 2π secunde, fapt pentru care este numită și frecvență circulară. Relația dintre perioadă și pulsație este:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (24.2)$$

- *Frecvența* f — inversul perioadei — reprezintă numărul de vibrații complete efectuate într-o secundă:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (24.3)$$

Frecvența se măsoară în Hertz (Hz).

Cinematica vibrațiilor studiază în special compunerea vibrațiilor armonice. Dacă se însumează două vibrații armonice paralele de aceeași pulsație, se obține tot o vibrație armonică de aceeași pulsație:

$$x = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + a_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (24.4)$$

unde:

$$\left. \begin{aligned} A &= \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 \cdot a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}; \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{C_2}{C_1} = \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2} \end{aligned} \right\} \quad (24.5)$$

Cînd se însumează două pulsații paralele de pulsații diferite se obține o vibrație nearmonică. Dacă se însumează vibrații pe direcții ortogonale se obțin figurile lui Lissajous, care sînt curbe închise cînd raportul pulsațiilor este un număr rațional.

Dinamica vibrațiilor liniare cu un grad de libertate studiază în principal următoarele tipuri de vibrații:

1. *Vibrații libere neamortizate.* Modelul mecanic este prezentat în figura 24.A.1. Ecuația de mișcare este:

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad (24.6)$$

unde k este constanta elastică, definită ca forța (momentul) care produce o deformare egală cu unitatea (vezi tabelul 24.1 pag. 325). Ecuația (24.6) se mai scrie:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (24.7)$$

unde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{f_{st}}}$ este pulsația proprie (naturală).

Cu condițiile inițiale $t = 0: x = x_0, \dot{x} = v_0$, legea de mișcare este:

$$x = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \sin\left(\omega t + \arctg \frac{x_0 \omega}{v_0}\right). \quad (24.8)$$

2. *Vibrații libere cu amortizare viscoasă.* Modelul mecanic este prezentat în figura 24.A.2. Ecuația de mișcare este:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0, \quad (24.9)$$

sau, notînd $\frac{c}{m} = 2\alpha$ — factorul de amortizare

și $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega$ — pulsația proprie,

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (24.10)$$

Pentru cazul $\alpha = \omega$, coeficientul de amortizare se numește critic ($c = c_{cr} = 2\sqrt{km}$).

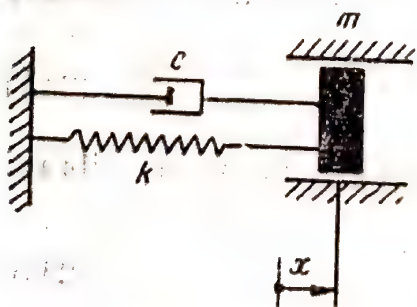


Fig. 24.A.2

Soluțiile ecuației diferențiale (24.10) depind de rădăcinile ecuației caracteristice corespunzătoare :

$$r_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}. \quad (24.11)$$

Dacă

- a) $\alpha^2 - \omega^2 < 0$; $c < c_{cr}$ — frecări mici;
- b) $\alpha^2 - \omega^2 > 0$; $c > c_{cr}$ — frecări mari și foarte mari;
- c) $\alpha^2 - \omega^2 = 0$; $c = c_{cr}$ — frecări mari.

În cazul (a) se notează *pseudopulsatia* :

$$\beta = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}. \quad (24.12)$$

Legea de mișcare este :

$$x = e^{-\alpha t}(C_1 \sin \beta t + C_2 \cos \beta t) = A e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi). \quad (24.13)$$

deci mișcarea se amortizează periodic.

Cu condițiile inițiale $t = 0$: $x = x_0$, $\dot{x} = v_0$, rezultă :

$$C_1 = x_0; \quad C_2 = \frac{v_0 + \alpha x_0}{\beta}; \quad A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}; \quad \tan \varphi = \frac{C_2}{C_1}. \quad (24.14)$$

În acest caz pseudoperioada este :

$$T_\beta = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}}. \quad (24.15)$$

Diagrama mișcării este dată în figura 24.A.3.

În cazul (b), notînd rădăcinile ecuației caracteristice $r_1 = -\lambda_1$; $r_2 = -\lambda_2$, legea de mișcare este :

$$x = C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}, \quad (24.16)$$

deci mișcarea se amortizează aperiodic.

În cazul (c), rădăcina ecuației caracteristice este $r_{12} = -\alpha$, iar legea de mișcare este :

$$x = (C_1 + C_2 t) e^{-\alpha t}, \quad (24.17)$$

deci mișcarea se amortizează aperiodic.

3. *Vibrații forțate și neamortizate întreținute de o forță sinusoidală.* Modelul mecanic este dat în figura 24.A.4. Ecuația de mișcare este :

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + kx &= F_0 \sin pt, \\ \ddot{x} + \omega^2 x &= q \sin pt, \end{aligned} \right\} \quad (24.18)$$

sau

unde s-a notat $\frac{k}{m} = \omega^2$; $\frac{F_0}{m} = q$.

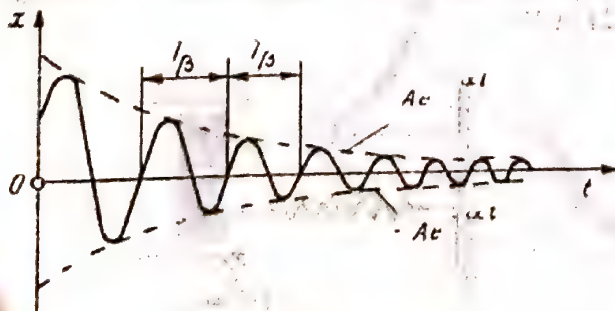


Fig. 24.A.3

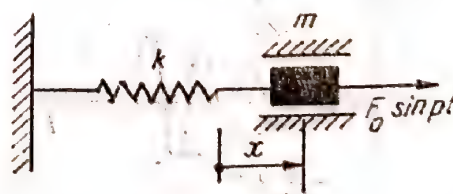


Fig. 24.A.4

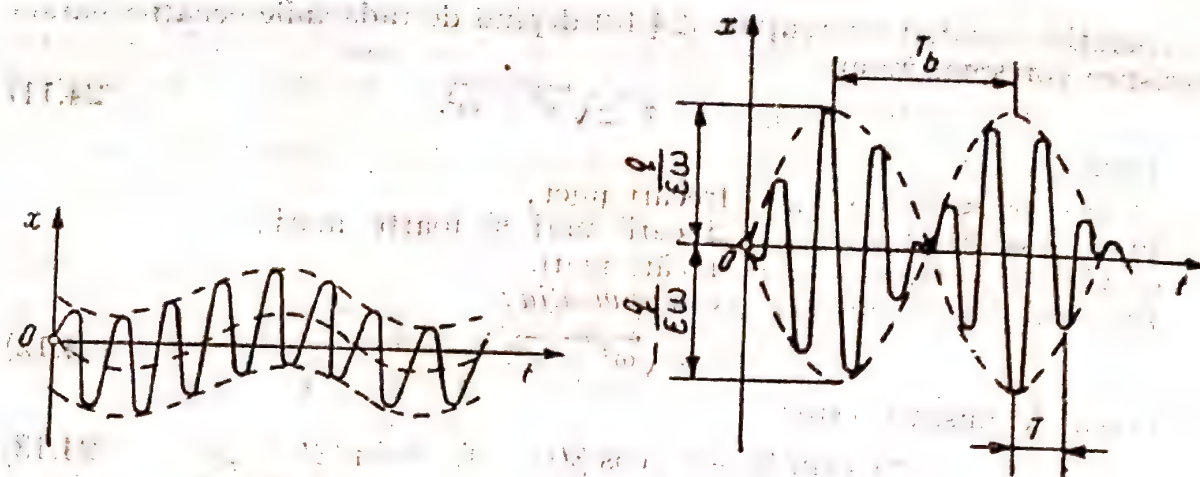


Fig. 24.A.5

Fig. 24.A.6

În cazul $\omega \neq p$, cu condițiile inițiale $t = 0: x = 0, \dot{x} = 0$ (pentru a evidenția că vibrația se datorește forței perturbatoare), legea de mișcare este rezultatul suprapunerii vibrației proprii și a celei forțate, deci o mișcare nearmonică:

$$x = x_1 + x_2 = \frac{q}{\omega^2 - p^2} \left(\sin pt - \frac{p}{\omega} \sin \omega t \right). \quad (24.19)$$

Diagrama mișcării este dată în figura 24.A.5.

În cazul $\omega \approx p$ apare fenomenul de bătăi și considerind $\omega - p = \varepsilon$; $\frac{p}{\omega} \approx 1$; $\omega + p \approx 2\omega$, ecuația (24.19) devine:

$$x = -\frac{q}{\omega \varepsilon} \sin \left(\frac{\varepsilon}{2} t \right) \cos \omega t. \quad (24.20)$$

Perioadele mișcării și, respectiv, a bătăilor sînt:

$$T = \frac{2}{\frac{\omega + p}{2}}; \quad T_b = \frac{2\pi}{\omega - p}. \quad (24.21)$$

Diagrama mișcării este prezentată în figura 24.A.6.

În cazul $\omega = p$ apare fenomenul de rezonanță. Cu aceleași condiții inițiale, legea de mișcare este:

$$x = x_1 + x_2 = \frac{q}{2\omega} \left(\frac{1}{\omega} \sin \omega t - t \cos \omega t \right), \quad (24.22)$$

ceea ce dovedește că amplitudinea crește la infinit, datorită vibrației forțate x_2 , care este prezentată în figura 24.A.7.

4. *Vibrații forțate și amortizate întreținute de o forță sinusoidală.* Modelul mecanic este prezentat în figura 24.A.8.

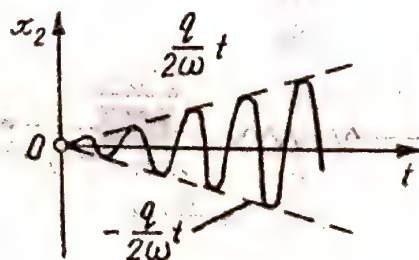


Fig. 24.A.7

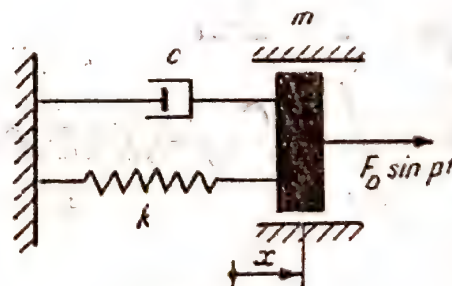


Fig. 24.A.8

Ecuatia mișcării, utilizând notațiile precedente, este:

sau
$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin pt, \\ \ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega^2 x = q \sin pt, \end{cases} \quad (24.23)$$

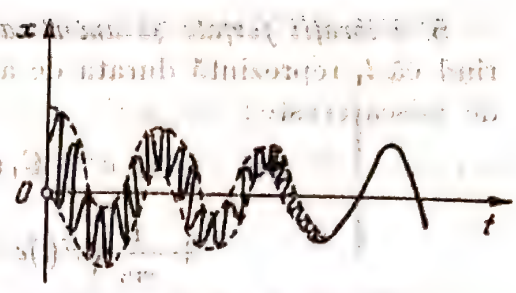


Fig. 24.A.9

Legea de mișcare (pentru $c < c_{cr}$) se obține din suprapunerea vibrației proprii și a celei forțate:

$$x = A_1 e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi) + A \sin(pt - \Phi). \quad (24.24)$$

Diagrama mișcării este dată în figura 24.A.9.

După ce vibrația proprie se amortizează, adică în regimul permanent, mișcarea este o vibrație armonică, de amplitudine:

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\alpha^2 p^2}} = x_{st} A_1, \quad (24.25)$$

unde $x_{st} = \frac{F_0}{k}$ — deformația statică și A_1 — factorul de amplificare dat de:

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{p^2}{\omega^2})^2 + 4(\frac{c}{c_{cr}})^2 (\frac{p}{\omega})^2}} \quad (24.26)$$

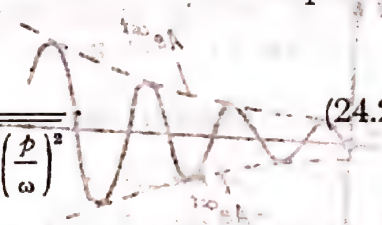


Diagrama factorului de amplificare este dată în figura 24.A.10 sub forma unui fascicul de curbe în funcție de parametrul c/c_{cr}

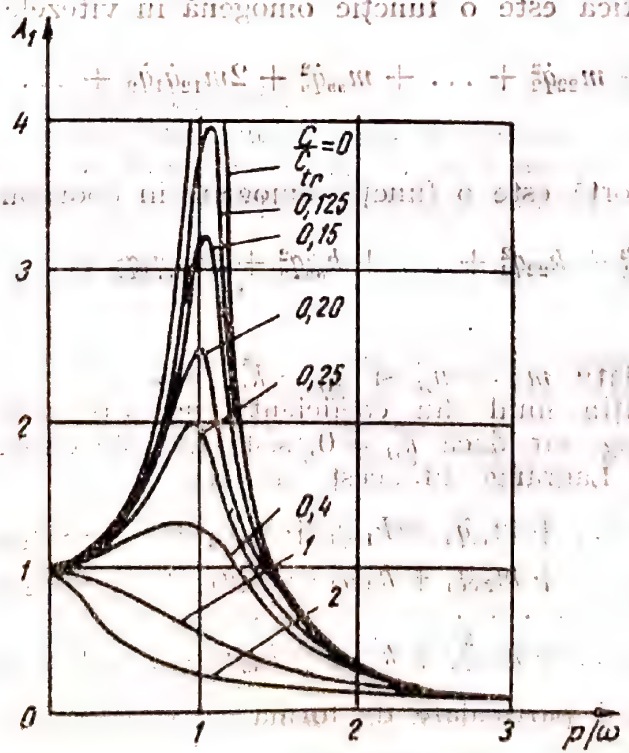


Fig. 24.A.10

24.B. APLICAȚII LA VIBRAȚII MECANICE

24.B.1. Să se stabilească ecuația de mișcare a unui mobil care efectuează o oscilație armonică cu centrul în origine, cunoscând că în momentul inițial mobilul trece prin origine cu viteza de 6,28 m/s, iar perioada mișcării este 4 s.

Rezolvare. Ecuația mișcării este de forma:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi).$$

Deoarece la $t = 0$ se dă $x = 0$, rezultă:

$$0 = A \sin \varphi,$$

de unde $\sin \varphi = 0$, deci $\varphi = 0$.

Cunoscând perioada:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 4 \text{ s},$$

rezultă pulsația $\omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ s}^{-1}$.

Deci, legea de mișcare este:

$$x = A \sin \frac{\pi}{2} t.$$

Viteza este:

$$v = \dot{x} = \frac{\pi}{2} A \cos \frac{\pi}{2} t.$$

Deoarece la $t = 0$; $v = 6,28$, se obține:

$$6,28 = \frac{\pi}{2} A \cos 0,$$

deci amplitudinea mișcării este $A = 4 \text{ m}$ și legea este:

$$x = 4 \sin \frac{\pi}{2} t.$$

24.B.2. Să se compună două vibrații armonice paralele ale căror ecuații de mișcare sînt: $x_1 = \sin 4t$; $x_2 = \sqrt{3} \cos 4t$.

Rezolvare. Mișcarea rezultantă este:

$$x = x_1 + x_2 = \sin 4t + \sqrt{3} \cos 4t \equiv A \sin(\omega t + \varphi).$$

Amplitudinea mișcării rezultante este:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{1 + 3} = 2.$$

Defazajul este dat de:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{C_2}{C_1} = \sqrt{3},$$

de unde rezultă $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Deci, mișcarea rezultantă este :

$$x = 2 \sin \left(4t + \frac{\pi}{3} \right).$$

24.B.3. Să se compună două vibrații ortogonale date de ecuațiile :

$$\left. \begin{aligned} x &= 3 \sin 2t; \\ y &= 5 \sin \left(2t + \frac{\pi}{3} \right). \end{aligned} \right\}$$

Rezolvare. Se scriu ecuațiile sub forma :

$$\left. \begin{aligned} x &= 3 \sin 2t; \\ y &= 5 \sin 2t \cos \frac{\pi}{3} + 5 \cos 2t \sin \frac{\pi}{3}, \end{aligned} \right\}$$

de unde :

$$\left. \begin{aligned} \sin 2t &= \frac{x}{3}; \\ \cos 2t &= \frac{3y - 5x \cos \frac{\pi}{3}}{15 \sin \frac{\pi}{3}}. \end{aligned} \right\}$$

Eliminând pe $2t$ între aceste expresii, rezultă :

$$\frac{x^2}{9 \sin^2 \frac{\pi}{3}} + \frac{y^2}{25 \sin^2 \frac{\pi}{3}} - \frac{2xy \cos \frac{\pi}{3}}{15 \sin^2 \frac{\pi}{3}} = 1$$

sau :

$$\frac{x^2}{\frac{27}{4}} + \frac{y^2}{\frac{75}{4}} - \frac{xy}{\frac{45}{4}} = 1;$$

adică ecuația unei elipse cu centrul în origine și axele rotite.

24.B.4. Să se stabilească ecuația traiectoriei unui punct material care efectuează simultan două vibrații armonice pe direcții ortogonale după ecuațiile :

$$\left. \begin{aligned} x &= 6 \cos 5t; \\ y &= 3 \cos 10t. \end{aligned} \right\}$$

Rezolvare. Din prima ecuație se obține :

$$\cos 5t = \frac{x}{6},$$

și ținând seama de relația $\cos 2\omega t = 2 \cos^2 \omega t - 1$, se deduce :

$$y = 3(2 \cos^2 5t - 1).$$

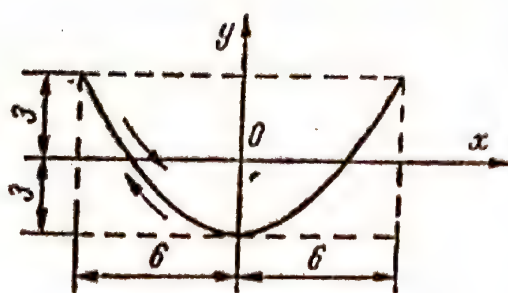


Fig. 24.B.4

sau :

$$y = \frac{x^2}{6} - 3.$$

adică o parabolă. Dar, $\cos x \in [-1, 1]$ și în consecință $x \in [-6, 6]$ și $y \in [-3, 3]$, deci punctul evoluează pe arcul de parabolă delimitat în acest domeniu (fig. 24.B.4).

24.B.5. Să se determine constanta elastică echivalentă și pulsația proprie pentru sistemul elastic din figura 24.B.5, *a*, unde pentru arcurile elicoidale s-au dat: n — numărul de spire, d — diametrul sîrmei; R — raza de înfășurare, precum și modulul de elasticitate transversal G .

Rezolvare. Constanta elastică a barei încastrate este (tabelul 24.1):

$$k_0 = \frac{3EI}{l^3}.$$

Constanta elastică a unui arc elicoidal este (tabelul 24.1):

$$k_i = \frac{Gd_i^4}{64R_i^3n_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

și sistemul elastic se prezintă ca în figura 24.B.5, *b*.

Se însumează arcurile de constante k_2 și k_3 montate în paralel, obținându-se pentru acestea constanta echivalentă:

$$k_{23} = k_2 + k_3$$

și sistemul elastic se prezintă ca în figura 24.B.5, *c*.

Se însumează arcurile montate în serie din figura 24.B.5, *c*:

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_{23}} = \frac{k_0k_1k_{23} + k_1k_{23} + k_0k_1}{k_0k_1k_{23}},$$

obținându-se constanta elastică echivalentă a sistemului:

$$k_e = \frac{k_0k_1k_{23}}{k_0k_1 + k_0k_{23} + k_1k_{23}}.$$

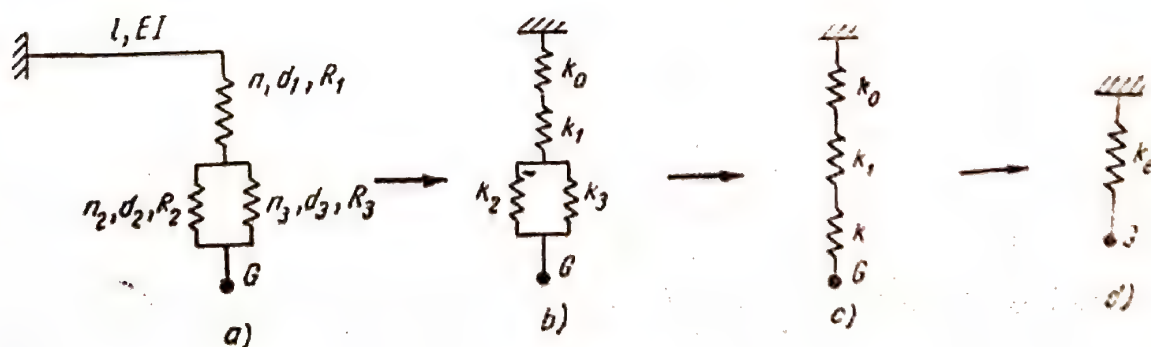
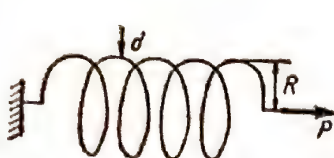
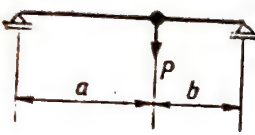
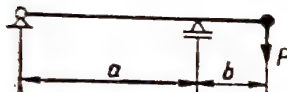
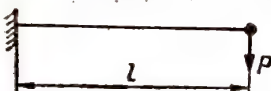

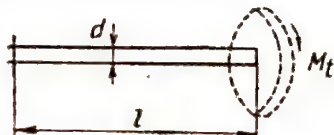

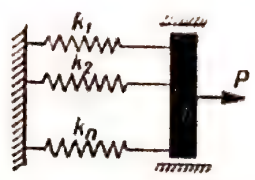


Fig. 24.B.5

Tabelul 24.1

Constante elastice pentru sisteme de masă neglijabilă

Sistemul	Deformația statică f_{st}	Constanta elastică k
 <p> n — numărul de spire d — diametrul sîrmei R — raza de înfășurare G — modulul de elasticitate transversal </p>	$\frac{64PR^3n}{Gd^4}$	$\frac{Gd^4}{64R^3n}$
 <p> E — modulul de elasticitate longitudinal I — momentul de inerție geometric al secțiunii transversale </p>	$\frac{Pa^2b^2}{3(a+b)EI}$	$\frac{3(a+b)EI}{a^2b^2}$
	$\frac{P(a+b)b^2}{3EI}$	$\frac{3EI}{(a+b)b^3}$
	$\frac{Pl^3}{3EI}$	$\frac{3EI}{l^3}$
	$\frac{Pa^3b^3}{3(a+b)^3EI}$	$\frac{3EI(a+b)^3}{a^3b^3}$
	$\frac{32M_tl}{G\pi d^4}$	$\frac{\pi Gd^4}{32l}$
	$\frac{P}{k}$	$\frac{1}{k} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}$
	$\frac{P}{k}$	$k = \sum_{i=1}^n k_i$

Pulsația proprie a sistemului dat este :

$$\omega = \sqrt{\frac{k_g}{m}} = \sqrt{\frac{gk_g}{G}} = \sqrt{\frac{gk_0k_1k_{23}}{G(k_0k_1 + k_0k_{23} + k_1k_{23})}}.$$

24.B.6. Să se stabilească frecvența proprie pentru micile oscilații ale coloanei de mercur dintr-un tub manometric cu ambele capete deschise. Lungimea coloanei de mercur este l , diametrul interior al tubului d și greutatea specifică a mercurului γ (fig. 24.B.6). Se neglijează frecările.

Rezolvare. Coloana de mercur efectuează o mișcare de translație. Se scrie ecuația diferențială a mișcării cînd denivelarea este x în ambele sensuri față de poziția de repaus. Masa de mercur care oscilează este :

$$m = \frac{\gamma}{g} l \frac{\pi d^2}{4}.$$

Forța care produce oscilația este :

$$F = \gamma 2x \frac{\pi d^2}{4}.$$

Deci, ecuația mișcării este :

$$\frac{\gamma}{g} l \frac{\pi d^2}{4} \ddot{x} = -\gamma 2x \frac{\pi d^2}{4}.$$

sau :

$$\ddot{x} + 2 \frac{g}{l} x = 0.$$

Notînd pătratul pulsației proprii $\omega^2 = \frac{2g}{l}$, frecvența proprie este :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2g}{l}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2g}{l}}.$$

24.B.7. Se dă sistemul din figură 24.B.7, a, format din bara $OA = l$ de greutate G și bila de greutate Q . Arcurile au constantele elastice k

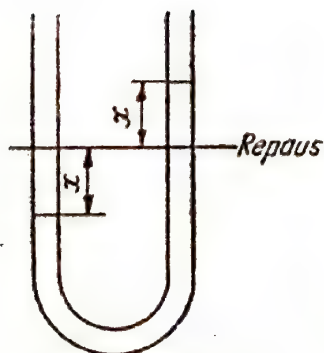


Fig. 24.B.6

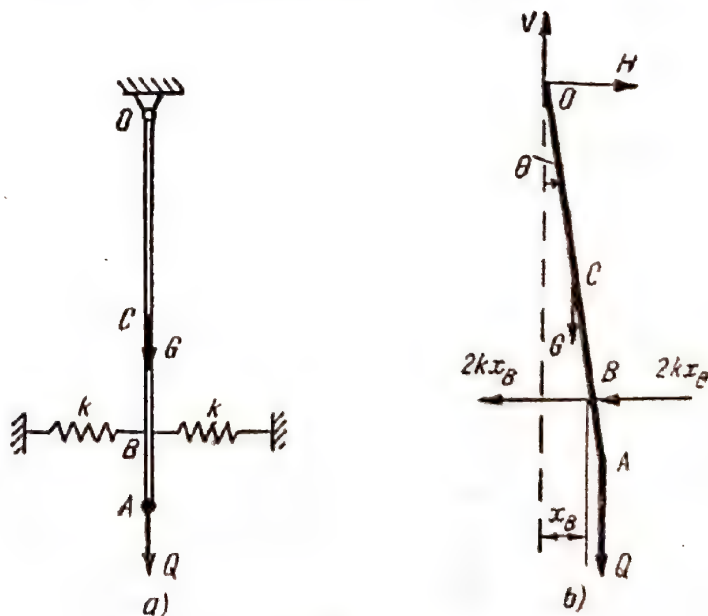


Fig. 24.B.7

și sînt fixate la distanța $OB = b$. Se cere să se calculeze perioada micilor oscilații față de poziția de echilibru stabil.

Rezolvare. Poziția de echilibru este verticală.

Pentru studiul mișcării se utilizează ecuația de mișcare a rigidului cu o axă fixă, considerînd unghiul θ crescător (fig. 24.B.7, b):

$$J_0 \ddot{\theta} = \Sigma M_0,$$

$$\text{unde } J_0 = J_{0 \text{ bară}} + J_{0 \text{ bilă}} = \frac{Gl^2}{3g} + \frac{Ql^2}{g} = \left(\frac{G}{3} + Q\right) \frac{l^2}{g};$$

$$\Sigma M_0 = -G \frac{l}{2} \sin \theta - Ql \sin \theta - 2kx_B b \cos \theta.$$

Pentru micile oscilații $\sin \theta \approx \theta$; $\cos \theta \approx 1$. Rezultă:

$$x_B = b \sin \theta \approx b\theta;$$

$$\Sigma M_0 = -G \frac{l}{2} \theta - Ql\theta - 2kb^2\theta.$$

Deci, ecuația de mișcare se scrie:

$$\ddot{\theta} \left(\frac{G}{3} + Q\right) \frac{l^2}{g} = -\left(2kb^2 + G \frac{l}{2} + Ql\right) \theta.$$

sau:

$$\ddot{\theta} + \frac{g \left(2kb^2 + G \frac{l}{2} + Ql\right)}{\left(\frac{G}{3} + Q\right) l^2} \theta = 0.$$

Notînd pătratul pulsației proprii:

$$\omega^2 = \frac{g \left(2kb^2 + G \frac{l}{2} + Ql\right)}{\left(\frac{G}{3} + Q\right) l^2},$$

ecuația de mișcare capătă forma:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0,$$

de unde se deduce perioada micilor oscilații:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{2(G + 3Q)l^2}{3g(4kb^2 + Gl + 2Ql)}}.$$

24.B.8. Se dă sistemul din figura 24.B.8, a, care are aceleași caracteristici mecanice cu cele ale sistemului de la problema 24.B.7, numai că bara OA este orizontală. Se cere să se calculeze perioada micilor oscilații.

Rezolvare. Studiul echilibrului (fig. 24.B.8, b) se efectuează cu ecuația $\Sigma M_0 = 0$, adică:

$$G \frac{l}{2} \cos \theta_{st} + Ql \cos \theta_{st} - 2kx_{Bst} b \cos \theta_{st} = 0.$$

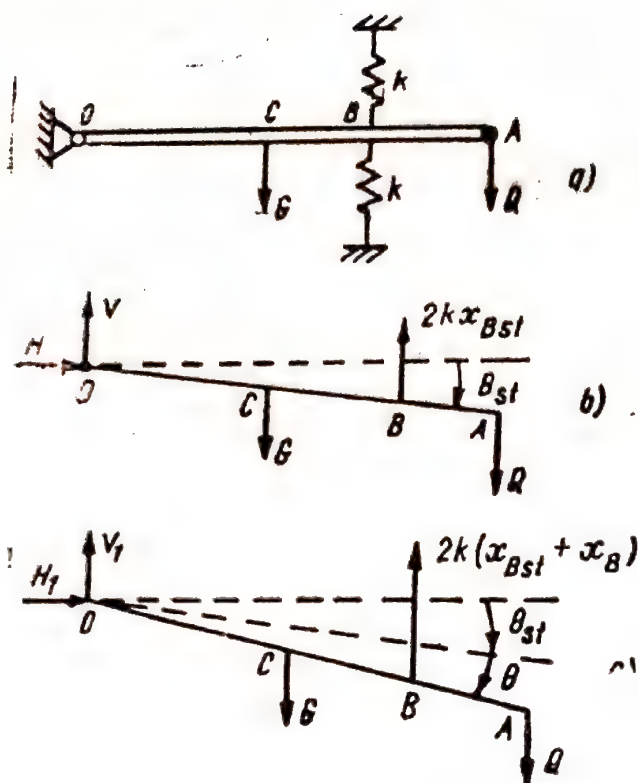


Fig. 24.B.8

Se aproximează $\cos \theta_{st} \approx 1$ și $\sin \theta_{st} \approx \theta_{st}$, de unde $x_{Bst} = b \sin \theta_{st} \approx b \theta_{st}$.

Deci:

$$G \frac{l}{2} + Ql - 2kb^2 \theta_{st} = 0. \quad (a)$$

Studiul mișcării se face cu ecuația

$$J_0 \ddot{\theta} = \Sigma M_0,$$

(fig. 24.B.8, c), unde:

$$J_0 = \left(\frac{G}{3} + Q \right) \frac{l^2}{g};$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_0 = & G \frac{l}{2} \cos(\theta_{st} + \theta) + \\ & + Ql \cos(\theta_{st} + \theta) - \\ & - 2k(x_{Bst} + x_B)b \cos(\theta_{st} + \theta). \end{aligned}$$

Se aproximează $\cos(\theta_{st} + \theta) \approx 1$ și $\sin(\theta_{st} + \theta) \approx \theta_{st} + \theta$, de unde:

$$x_{Bst} + x_B = b \sin(\theta_{st} + \theta) \approx b(\theta_{st} + \theta).$$

Urmează că:

$$\Sigma M_0 = G \frac{l}{2} + Ql - 2kb^2(\theta_{st} + \theta) = -2kb^2\theta,$$

unde s-a ținut seama de relația (a). Deci, ecuația diferențială a mișcării este:

$$\left(\frac{G}{3} + Q \right) \frac{l^2}{g} \ddot{\theta} = -2kb^2\theta,$$

sau:

$$\ddot{\theta} + \frac{6kb^2g}{(G + 3Q)l^2} \theta = 0.$$

Comparând această ecuație cu (24.7), se obține pătratul pulsației proprii:

$$\omega^2 = \frac{6kb^2g}{(G + 3Q)l^2},$$

de unde se deduce perioada micilor oscilații:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{(G + 3Q)l^2}{6kb^2g}}.$$

24.B.9. Se dă sistemul din figura 24.B.9, a format dintr-o bară OA de lungime $6l$ și greutate G , articulată în O , pe care este fixată în D o greutate Q asimilată cu un punct material. Sistemul este suspendat cu

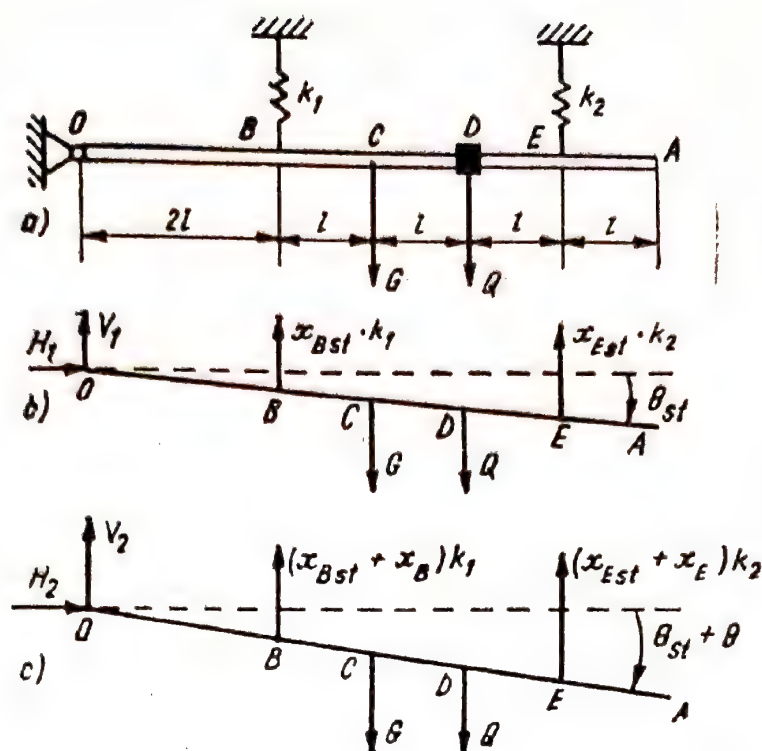


Fig. 24.B.9

două arcuri de constante elastice k_1 și k_2 . Se cere să se calculeze perioada micilor oscilații.

Rezolvare. Metoda I. Studiul echilibrului se face cu ecuația $\Sigma M_0 = 0$ (fig. 24.B.9, b).

În cazul micilor oscilații se aproximează $\cos \theta_{st} \approx 1$ și $\sin \theta_{st} \approx \theta_{st}$. În consecință,

$$x_{Bst} = 2l \sin \theta_{st} \approx 2l\theta_{st};$$

$$x_{Est} = 5l \sin \theta_{st} \approx 5l\theta_{st}.$$

Ținînd seama de aceste aproximații, ecuația de echilibru este :

$$3lG + 4lQ - 2lk_1x_{Bst} - 5lk_2x_{Est} = 0,$$

sau :

$$3lG + 4lQ - 4l^2k_1\theta_{st} - 25l^2k_2\theta_{st} = 0. \quad (a)$$

Mișcarea se studiază cu ecuația rigidului cu o axă fixă $J_0\ddot{\theta} = \Sigma M_0$ (fig. 24.B.9, c). În cazul micilor oscilații se aproximează $\cos(\theta_{st} + \theta) \approx 1$; $\sin(\theta_{st} + \theta) \approx \theta_{st} + \theta$. În consecință ;

$$x_{Bst} + x_B = 2l \sin(\theta_{st} + \theta) \approx 2l(\theta_{st} + \theta);$$

$$x_{Est} + x_E = 5l \sin(\theta_{st} + \theta) \approx 5l(\theta_{st} + \theta).$$

Deci, în acest caz :

$$J_0 = J_{0 \text{ bară}} + J_{0 \text{ punct}} = \frac{G(6l)^2}{3g} + \frac{Q}{g}(4l)^2 = (12G + 16Q) \frac{l^2}{g};$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_0 &= 3lG + 4lQ - 2lk_1(x_{Bst} + x_B) - 5lk_2(x_{Est} + x_E) = \\ &= 3lG + 4lQ - 4l^2k_1(\theta_{st} + \theta) - 25l^2k_2(\theta_{st} + \theta). \end{aligned}$$

Ținând seama de relația (a), rezultă:

$$\Sigma M_0 = -4k_1 l^2 \theta - 25k_2 l^2 \theta.$$

Deci, ecuația de mișcare se scrie:

$$(12G + 16Q) \frac{l^2}{g} \ddot{\theta} = -(4k_1 + 25k_2) l^2 \theta, \quad (b)$$

sau:

$$\ddot{\theta} + \frac{g(4k_1 + 25k_2)}{12G + 16Q} \theta = 0.$$

Notînd pătratul pulsației proprii $\omega^2 = \frac{g(4k_1 + 25k_2)}{12G + 16Q}$ se obține perioada micilor oscilații:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{12G + 16Q}{g(4k_1 + 25k_2)}}.$$

Metoda a II-a — utilizarea ecuației lui Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial E}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta}.$$

Energia cinetică a sistemului format din bară și punct este:

$$E = \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} Q (4l\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} \frac{(12G + 16Q) l^2}{g} \dot{\theta}^2,$$

$$\text{de unde } \frac{\partial E}{\partial \theta} = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} = J_0 \dot{\theta}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} \right) = J_0 \ddot{\theta} = \frac{(12G + 16Q) l^2}{g} \ddot{\theta}.$$

Funcția de forță U se scrie numai pentru forțele specifice fenomenului vibrator, adică pentru forțele elastice corespunzătoare deplasărilor în timpul vibrației (nu și deplasărilor statice). Astfel:

$$\begin{aligned} U &= -\frac{1}{2} k_1 x_B^2 - \frac{1}{2} k_2 x_E^2 = -\frac{1}{2} k_1 (2l\theta)^2 - \frac{1}{2} k_2 (5l\theta)^2 = \\ &= -\frac{1}{2} (4k_1 + 25k_2) l^2 \theta^2, \end{aligned}$$

$$\text{de unde } \frac{\partial U}{\partial \theta} = -(4k_1 + 25k_2) l^2 \theta.$$

Ecuația lui Lagrange, în cazul de față, este:

$$(12G + 16Q) \frac{l^2}{g} \ddot{\theta} + (4k_1 + 25k_2) l^2 \theta = 0,$$

deci aceeași cu ecuația (b) stabilită anterior.

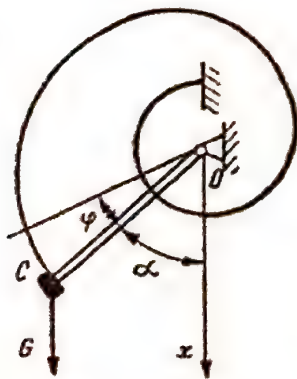


Fig. 24.B.10

24.B.10. Acul indicator al unui aparat de măsură situat într-un plan vertical poate fi modelat ca în figura 24.B.10. Cunoscîndu-se greutatea G , momentul de inerție mecanic J_0 față de axa O , constanta elastică k a arcului, distanța $OC = l$, precum și unghiul α_0 cînd arcul nu este tensionat, unghiul α pentru

poziția de repaus, se cere să se calculeze pulsația proprie pentru micile oscilații.

Rezolvare. Se utilizează ecuațiile lui Lagrange, alegînd ca parametru unghiul φ (crescător) față de poziția de repaus.

Energia cinetică a sistemului este :

$$E = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2.$$

Energia potențială datorită greutateii este :

$$V_1 = Gl[\cos \alpha - \cos(\alpha + \varphi)] = Gl[(1 - \cos \varphi)\cos \alpha + \sin \alpha \sin \varphi].$$

Pentru micile oscilații se fac aproximațiile $\sin \varphi \approx \varphi$; $\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$.

În aceste condiții rezultă :

$$V_1 = Gl\left(\frac{1}{2} \varphi^2 \cos \alpha + \varphi \sin \alpha\right).$$

Energia potențială datorită deformației arcului este :

$$V_2 = \frac{1}{2} k(\alpha_0 - \alpha - \varphi)^2 = \frac{1}{2} k(\alpha_0 - \alpha)^2 - k(\alpha_0 - \alpha)\varphi + \frac{1}{2} k\varphi^2.$$

Deci, energia potențială a sistemului este :

$$V = V_1 + V_2 = Gl\left(\frac{1}{2} \varphi^2 \cos \alpha + \varphi \sin \alpha\right) - k(\alpha_0 - \alpha)\varphi + \frac{1}{2} k\varphi^2 + C,$$

unde $C = \frac{1}{2} k(\alpha_0 - \alpha)^2$ este o mărime constantă.

Condiția de echilibru conduce la :

$$Gl \sin \alpha = k(\alpha_0 - \alpha),$$

încît, expresia finală a energiei potențiale este :

$$V = \frac{1}{2} (Gl \cos \alpha + k) \varphi^2 = -U,$$

unde U este funcția de forță.

Ecuația lui Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial E}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi}$$

în cazul de față se scrie :

$$J\ddot{\varphi} + (Gl \cos \alpha + k)\varphi = 0,$$

sau :

$$\ddot{\varphi} + \frac{Gl \cos \alpha + k}{J} \varphi = 0;$$

comparînd această ecuație cu (24.7), rezultă pulsația proprie

$$\omega = \sqrt{\frac{Gl \cos \alpha + k}{J}}.$$

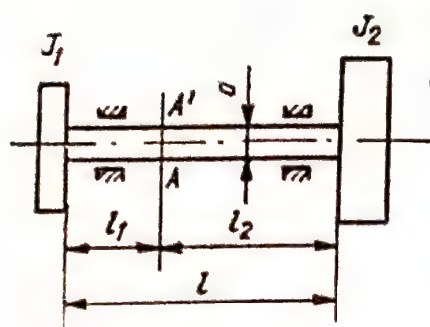


Fig. 24.B.11

24.B.11. Un electromotor al cărui rotor are momentul de inerție mecanic axial J_1 , antrenează un ventilator coaxial, care are momentul de inerție mecanic axial J_2 . Legătura este realizată printr-un arbore elastic cu diametrul d , lungimea l , masa neglijabilă și modulul de elasticitate transversală G (fig. 24.B.11). Se cere să se calculeze pulsația proprie a sistemului pentru vibrațiile de răsucire, neglijând frecările.

Rezolvare. Vibrațiile de răsucire se efectuează după ce cele două rotoare au fost acționate de câte un moment (motor și rezistent) de sens opus, care încetează simultan. În aceste condiții momentul cinetic față de axa sistemului se conservă. Deoarece sistemul în momentul inițial se află în repaus, cele două rotoare se rotesc în sensuri opuse, efectuând o vibrație de răsucire de aceeași pulsație, iar în arbore există o secțiune neutră AA' , care rămâne fixă.

Ecuatia diferențială a vibrațiilor libere de răsucire este:

$$J\ddot{\theta} + k\theta = 0,$$

sau:

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0,$$

unde s-a notat: $k = \frac{\pi d^4 G}{32l}$ — constanta elastică (conform tabelului 24.1);

$\omega^2 = \frac{k}{J}$ — pătratul pulsației proprii.

Efectuând calculele pentru cele două rotoare, rezultă pulsația proprie:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1}{J_1}} = \sqrt{\frac{k_2}{J_2}}, \quad (a)$$

de unde se obține:

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{J_1}{J_2}.$$

Dar $l_1 + l_2 = l$ și, în consecință, rezultă:

$$l_1 = \frac{lJ_2}{J_1 + J_2}; \quad l_2 = \frac{lJ_1}{J_1 + J_2}.$$

Introducând aceste rezultate în relația (a), se deduce expresia pulsației proprii la vibrații de răsucire:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1}{J_1}} = \sqrt{\frac{\pi d^4 G}{32l_1 J_1}} = \sqrt{\frac{\pi d^4 G (J_1 + J_2)}{32l J_1 J_2}}.$$

24.B.12. Se dă sistemul din figura 24.B.12, *a*, format dintr-un corp care poate oscila în jurul articulației O , legat printr-un fir inextensibil de greutatea P . Corpul articulat în O este format dintr-un disc de rază R și greutatea G , de care este fixată o bară AB de lungime $3R$ și greutate

3Q, iar pe aceasta este montată o greutate Q asimilată cu un punct material. Sistemul este suspendat în D pe două arcuri de constante elastice k și $2k$ montate în serie. Se cere să se calculeze pulsația proprie pentru micile oscilații ale acestui sistem de corpuri.

Rezolvare. Constanta elastică echivalentă a arcurilor este:

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k} + \frac{1}{2k} = \frac{3}{2k},$$

de unde $k_e = \frac{2}{3}k$.

Metoda I. Studiul echilibrului se efectuează cu metoda izolării corpurilor (fig. 24.B.12, b). Pentru micile oscilații se aproximează

$\cos \theta_{st} \approx 1$; $\sin \theta_{st} \approx \theta_{st}$, deci

$$x_{dst} = 3R \sin \theta_{st} \approx 3R\theta_{st}.$$

Ecuția de echilibru pentru corpul P conduce la $T_1 = P$.

Ecuția de echilibru pentru corpul articulat conduce la:

$$4RQ - \frac{2}{3}k3R\theta_{st}3R + 7,5QR - PR = 0,$$

de unde rezultă condiția de echilibru:

$$11,5RQ - RP - 6kR^2\theta_{st} = 0. \quad (a)$$

Studiul mișcării se face separat pentru fiecare corp (fig. 24.B.12, c).

Ecuția de mișcare pentru corpul P, ținând seama că $a = \ddot{x} = R\ddot{\theta}$, este:

$$\frac{P}{g}\ddot{x} = T_2 - P,$$

de unde rezultă tensiunea din fir:

$$T_2 = P + \frac{P}{g}R\ddot{\theta}.$$

Ecuția de mișcare pentru corpul articulat este $J_0\ddot{\theta} = \Sigma M_0$.

Pentru micile oscilații se aproximează $\cos(\theta_{st} + \theta) \approx 1$, $\sin(\theta_{st} + \theta) \approx \theta_{st} + \theta$, de unde $x_{dst} + x_D = 3R \sin(\theta_{st} + \theta) \approx 3R(\theta_{st} + \theta)$.

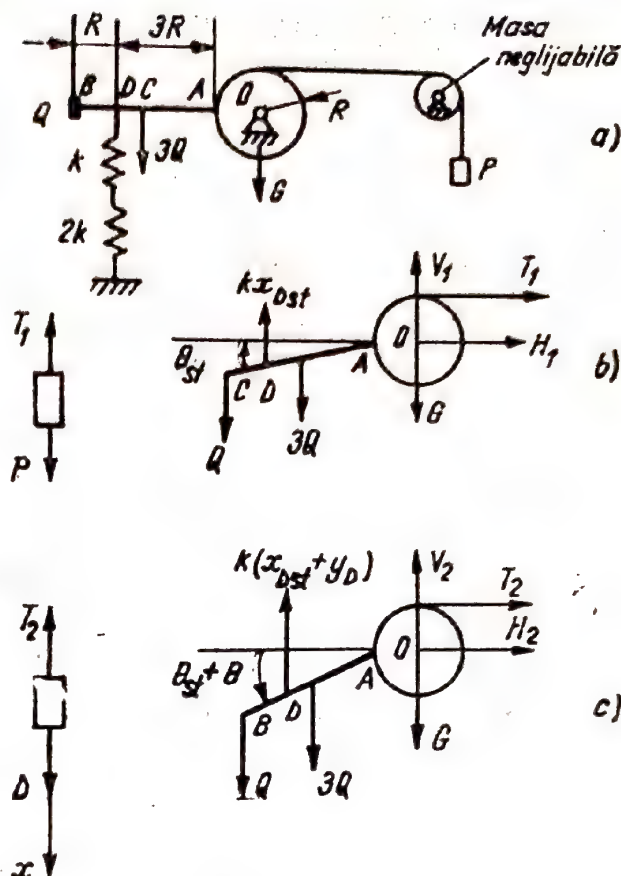


Fig. 24.B.12

Momentul de inerție mecanic al corpului față de axa O este

$$J_0 = J_{0 \text{ disc}} + J_{0 \text{ bară}} + J_{0 \text{ punct}} = \frac{GR^2}{2g} + \left[\frac{3Q(3R)^2}{12g} + \frac{3Q}{g} (2,5R)^2 \right] + \frac{Q}{g} (4R)^2 = \\ = \left(37Q + \frac{G}{2} \right) \frac{R^2}{g},$$

unde pentru bară s-a aplicat teorema lui Steiner.

$$\Sigma M_0 = 4RQ - \frac{2}{3} k 3R(\theta_{st} + \theta) 3R + 7,5RQ - T_2 R = \\ = 11,5RQ - 6kR^2(\theta_{st} + \theta) - \left(P + \frac{P}{g} R\ddot{\theta} \right) R.$$

Ținând seama de condiția de echilibru (a), se obține:

$$\Sigma M_0 = -\frac{P}{g} R^2 \ddot{\theta} - 6kR^2 \theta.$$

Deci, ecuația de mișcare pentru corpul articulat se scrie:

$$\left(37Q + \frac{G}{2} \right) \frac{R^2}{g} \ddot{\theta} = -\frac{P}{g} R^2 \ddot{\theta} - 6kR^2 \theta,$$

sau:

$$\ddot{\theta} + \frac{12gk}{74Q + G + 2P} \theta = 0. \quad (b)$$

Comparând această ecuație cu (24.7), rezultă pulsația proprie:

$$\omega = \sqrt{\frac{12gk}{74Q + G + 2P}}.$$

Metoda a II-a. Utilizarea ecuațiilor lui Lagrange, alegând ca parametru variabil unghiul θ :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial E}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta}. \quad (c)$$

Energia cinetică a sistemului este:

$$E = \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{P}{g} (R\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} \left(37Q + \frac{G}{2} + P \right) \frac{R^2 \dot{\theta}^2}{g}.$$

Funcția de forță este:

$$U = -\frac{1}{2} k x_D^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} k (3R\theta)^2 = -3kR^2 \theta^2.$$

Introducând aceste mărimi în ecuația lui Lagrange (c), se obține ecuația de mișcare:

$$\left(37Q + \frac{G}{2} + P \right) \frac{R^2}{g} \ddot{\theta} + 6kR^2 \theta = 0,$$

care după calcule simple se poate aduce la forma (b).

24.B.13. O bară OA de lungime l și masă neglijabilă are fixat în A un corp asimilat cu un punct material de greutate G și este legată în B cu un arc a cărui constantă elastică este k , iar în C cu un amortizor a cărui constantă de amortizare vâscoasă este c (fig. 24.B.13, a). Se cere să se calculeze, pentru micile oscilații, pseudopulsția și pseudoperioada.

Rezolvare. Studiul echilibrului se face cu ecuația $\Sigma M_0 = 0$ (fig. 24.B.13, b). Se aproximează $\cos \theta_{st} \approx 1$ și $\sin \theta_{st} \approx \theta_{st}$, deci $x_{Bst} \approx a\theta_{st}$. Condiția de echilibru este:

$$lG - ka^2\theta_{st} = 0. \quad (a)$$

Ecuația de mișcare este $J_0\ddot{\theta} = \Sigma M_0$ (fig. 24.B.13, c). Se aproximează $\cos(\theta_{st} + \theta) \approx 1$ și $\sin(\theta_{st} + \theta) \approx \theta_{st} + \theta$, deci $x_{Bst} + x_B = a(\theta_{st} + \theta)$. Forța elastică din B este $F_e = k(x_{Bst} + x_B) = ka(\theta_{st} + \theta)$.

Forța rezistentă din C este $F_r = c\dot{x}_c = cb\dot{\theta}$. Momentul de inerție mecanic este $J_0 = \frac{G}{g}l^2$. Deci, ecuația de mișcare se scrie:

$$\frac{G}{g}l^2\ddot{\theta} = -ka^2(\theta_{st} + \theta) - cb^2\dot{\theta} + Gl.$$

Ținând seama de condiția de echilibru (a), rezultă:

$$\frac{G}{g}l^2\ddot{\theta} + cb^2\dot{\theta} + ka^2\theta = 0,$$

sau:

$$\ddot{\theta} + \frac{cgb^2}{Gl^2}\dot{\theta} + \frac{gka^2}{Gl^2}\theta = 0.$$

Comparând această ecuație cu (24.10) rezultă:

$$2\alpha = \frac{cgb^2}{Gl^2}; \quad \omega^2 = \frac{gka^2}{Gl^2}.$$

Deci, pseudopulsția, conform relației (24.12), este:

$$\beta = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2} = \sqrt{\frac{gka^2}{Gl^2} - \frac{c^2g^2b^4}{4G^2l^4}} = \frac{1}{2Gl^2} \sqrt{4gka^2l^2G - c^2g^2b^4}$$

iar pseudoperioada, conform relației (24.17):

$$T_\beta = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi \frac{2Gl^2}{\sqrt{4gka^2l^2G - c^2g^2b^4}}.$$

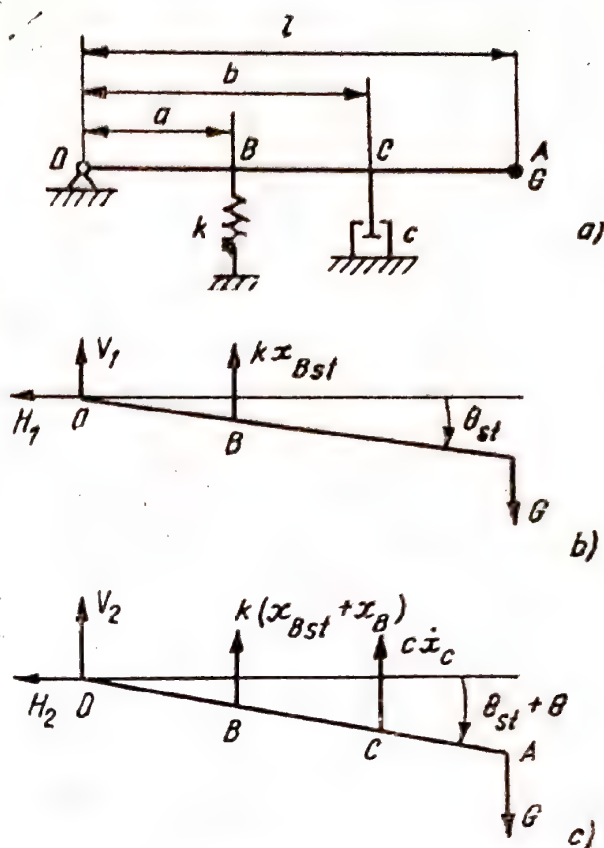


Fig. 24.B.13

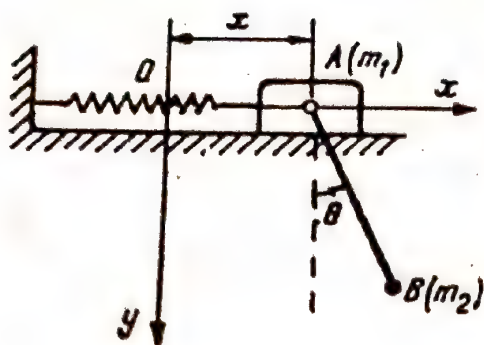


Fig. 24.B.14

24.B.14. Se dă sistemul din figura 24.B.14, format din punctul material A de masă m_1 , prins cu un arc a cărui constantă elastică este k . În A este prins un pendul matematic AB de lungime l și masă m_2 . Se cere să se stabilească ecuațiile de mișcare, pulsațiile proprii, coeficienții de distribuție, modurile proprii de vibrații, soluția generală și să se verifice ortogonalitatea modurilor proprii de vibrații. Aplicație numerică: $m_1 = 2\,000\text{ kg}$; $m_2 = 1\,000\text{ kg}$; $l = 1\text{ m}$; $k = 1\,000\text{ N/m}$; $g \approx 10\text{ m/s}^2$.

Rezolvare. Sistemul are două grade de libertate și se aleg ca parametri geometrici independenți x și θ , utilizând în acest scop sistemul de axe din figură, cu originea în punctul A când acesta se află în repaus. Se folosesc ecuațiile lui Lagrange.

Față de sistemul de axe ales, coordonatele și componentele vitezelor punctelor A și B sînt: $x_A = x$; $y_A = 0$; $x_B = x + l \sin \theta$; $y_B = l \cos \theta$; $\dot{x}_A = \dot{x}$; $\dot{y}_A = 0$; $\dot{x}_B = \dot{x} + l\dot{\theta} \cos \theta$; $\dot{y}_B = -l\dot{\theta} \sin \theta$.

Energia cinetică a sistemului este:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 [\dot{x}^2 + 2l\dot{\theta}\dot{x} \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)] = \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\theta}^2 + m_2 l \dot{\theta} \dot{x} \cos \theta. \end{aligned}$$

Energia potențială a sistemului este:

$$V = \frac{1}{2} k x^2 + m_2 g l (1 - \cos \theta).$$

În cazul micilor oscilații se aproximează pentru energia cinetică $\sin \theta \approx \theta$; $\cos \theta \approx 1$, iar pentru energia potențială $\sin \theta \approx \theta$; $\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$. Deci:

$$E = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\theta}^2 + m_2 l \dot{\theta} \dot{x};$$

$$V = \frac{1}{2} k x^2 + m_2 g l \frac{\theta^2}{2} = -U.$$

Se aplică ecuațiile lui Lagrange sub forma (24.29), rezultînd:

$$\left. \begin{aligned} (m_1 + m_2) \ddot{x} + m_2 l \ddot{\theta} + kx &= 0; \\ m_2 l \ddot{x} + m_2 l^2 \ddot{\theta} + m_2 g l \theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Comparînd cu (24.32), se constată că $m_{11} = m_1 + m_2$; $m_{22} = m_2 l^2$; $m_{12} = m_{21} = m_2 l$; $k_{11} = k$; $k_{22} = m_2 g l$; $k_{12} = k_{21} = 0$. Deci sistemul este cuplat dinamic.

Soluțiile particulare sînt:

$$x = A_1 \sin(\omega t + \varphi); \quad \theta = A_2 \sin(\omega t + \varphi). \quad (b)$$

Introducând (b) în (a), rezultă sistemul algebric :

$$\left. \begin{aligned} [k - (m_1 + m_2)\omega^2] A_1 - m_2 l \omega^2 A_2 &= 0; \\ -\omega^2 A_1 + (g - l\omega^2) A_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Condiția ca să se obțină soluții nebanale este (24.35) :

$$\Delta = \begin{vmatrix} k - (m_1 + m_2)\omega^2 & -m_2 l \omega^2 \\ -\omega^2 & g - l\omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Dezvoltând determinantul, se deduce ecuația pulsațiilor proprii :

$$m_1 l \omega^4 - [g(m_1 + m_2) + kl] \omega + gk = 0,$$

de unde :

$$\omega_{12}^2 = \frac{g(m_1 + m_2) + kl \mp \sqrt{[g(m_1 + m_2) + kl]^2 - 4m_1 k l g}}{2m_1 l}. \quad (d)$$

Din sistemul (c), cu rezultatele din (d), se obțin coeficienții de distribuție :

$$\mu_i = \frac{A_{2i}}{A_{1i}} = \frac{k - (m_1 + m_2)\omega_i^2}{m_2 l \omega_i^2} = \frac{\omega_i^2}{g - l\omega_i^2} \quad (i = 1, 2). \quad (e)$$

Rezultă amplitudinile $A_{21} = \mu_1 A_{11}$ și $A_{22} = \mu_2 A_{12}$.

În cazul aplicației numerice se deduc $\omega_1^2 = 0,32\,959$ și $\omega_2^2 = 15,17\,041$, deci pulsațiile proprii sînt :

$$\omega_1 = 0,57\,410 \text{ s}^{-1}; \quad \omega_2 = 3,89\,492 \text{ s}^{-1}. \quad (f)$$

Coeficienții de distribuție sînt :

$$\mu_1 = 0,03\,408; \quad \mu_2 = -2,93\,408. \quad (g)$$

Ținînd seama de (24.38), precum și de (b), (f) și (g), modurile proprii de vibrații sînt :

$$(I) \quad \begin{aligned} x_1 &= A_{11} \sin(\omega_1 t + \varphi_1); \quad \theta_1 = \mu_1 A_{11} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) = \\ &= 0,03\,408 A_{11} \sin(\omega_1 t + \varphi_1); \end{aligned}$$

$$(II) \quad \begin{aligned} x_2 &= A_{12} \sin(\omega_2 t + \varphi_2); \quad \theta_2 = \mu_2 A_{12} \sin(\omega_2 t + \varphi_2) = \\ &= -2,93\,408 A_{12} \sin(\omega_2 t + \varphi_2). \end{aligned}$$

Soluția generală este :

$$\left. \begin{aligned} x &= A_{11} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12} \sin(\omega_2 t + \varphi_2); \\ \theta &= \mu_1 A_{11} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \mu_2 A_{12} \sin(\omega_2 t + \varphi_2). \end{aligned} \right\}$$

Constantele de integrare A_{11} , A_{12} , φ_1 și φ_2 se determină cu condițiile inițiale.

Verificarea ortogonalității modurilor proprii, conform (24.39) :

$$\begin{aligned} &m_{11} A_{11} A_{12} + m_{22} A_{21} A_{22} + m_{12} A_{11} A_{22} + m_{21} A_{21} A_{12} = \\ &= (m_1 + m_2) A_{11} A_{12} + m_2 l^2 \mu_1 A_{11} \mu_2 A_{12} + m_2 l A_{11} \mu_2 A_{12} + m_2 l \mu_1 A_{11} A_{12}. \end{aligned}$$

Făcînd înlocuirile numerice se obține $A_{11} A_{12} \cdot 6,6 \cdot 10^{-3} \approx 0$, deci se consideră relația verificată, eroarea fiind foarte mică.

25.A. PREZENTARE TEORETICĂ

Se consideră un punct material a cărui masă este variabilă în timp după o lege cunoscută $m = m(t)$ și asupra căruia acționează forța \vec{F} . El are la momentul t masa m și viteza absolută \vec{v} , iar la un moment infinit apropiat $t + dt$, masa $m + dm$ și viteza absolută $\vec{v} + d\vec{v}$. Cantitatea dm este pozitivă când masa punctului material crește, deci când la punct se alipesc particule materiale de masă dm , și negativă când masa punctului material descrește, deci când din punct se desprind particule materiale de masă dm .

Se presupune că $dm > 0$ și că particula care se alipește la punctul material are, înainte de alipire, viteza absolută \vec{u} (fig. 25.A.1). Alipirea se va face astfel cu viteza relativă:

$$\vec{v}_r = \vec{u} - \vec{v}.$$

Aplicând teorema variației cantității de mișcare sistemului format din cele două puncte materiale având masele m și dm se obține, dacă se neglijează infinitul mic de ordin superior ($dm \cdot d\vec{v}$):

$$m\vec{a} = \vec{F} + \frac{dm}{dt} \vec{v}_r; \quad \left(\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \right). \quad (25.1)$$

Ecuația (25.1) este cunoscută sub denumirea de *ecuația lui I.V. Mescerski*. Termenul $\frac{dm}{dt} \vec{v}_r$ se numește forță reactivă. Ea are direcția vitezei relative \vec{v}_r și sensul lui \vec{v}_r sau opus lui \vec{v}_r , după cum masa m a punctului material crește sau descrește.

Dacă în același timp la punctul material de masă m se alipesc și se desprind particule și dacă se notează cu m_0 masa punctului la momentul inițial, cu m_1 și m_2 masele particulelor desprinse, respectiv alipite pînă la momentul t , iar cu $\vec{v}_{r,1}$, $\vec{v}_{r,2}$ vitezele lor relative, masa punctului material la momentul t va fi: $m = m_0 - m_1 + m_2$, iar ecuația (25.1) devine:

$$m\vec{a} = \vec{F} - \frac{dm_1}{dt} \vec{v}_{r,1} + \frac{dm_2}{dt} \vec{v}_{r,2}, \quad (25.2, a)$$

sau:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F} - \frac{dm_1}{dt} \vec{u}_1 + \frac{dm_2}{dt} \vec{u}_2. \quad (25.2, b)$$

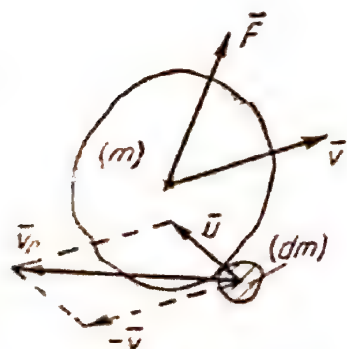


Fig. 25.A.1

Se presupune acum o rachetă care se mișcă în vid și care este acționată exclusiv de forța reactivă. Ea are, la momentul inițial $t = 0$, masa

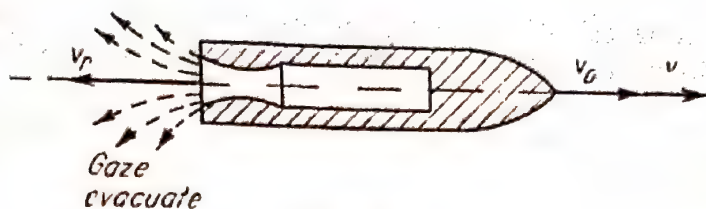


Fig. 25.A.2

m_0 și viteza v_0 , iar viteza de ieșire a gazelor de ardere din motorul rachetei este $v_r = \text{constant}$ și are aceeași direcție cu v_0 și sens opus lui v_0 (fig. 25.A.2).

Aplicînd ecuația (25.1) proiectată pe direcția mișcării și integrînd apoi ecuația obținută, între momentele $t = 0$ și t , rezultă:

$$v = v_0 + v_r \cdot \ln \frac{m_0}{m}. \quad (25.3)$$

Formula (25.3) este cunoscută sub denumirea de *formula lui C.E. Tsiolkovski*. Raportul $z = \frac{m_0}{m_f}$, în care m_f este masa finală a rachetei, se numește *numărul lui Tsiolkovski*.

25.B. APLICAȚII LA DINAMICA PUNCTULUI DE MASĂ VARIABILĂ

25.B.1. Un corp A de masă M este legat la unul din capetele unui lanț omogen avînd lungimea l și densitatea liniară ρ . O parte a lanțului, de lungime x_0 , situată la capătul legat de corpul A , atîrnă vertical, iar restul, de lungime $l - x_0$, este încolăcit pe sol (fig. 25.B.1). Corpul A este lansat din această poziție pe verticală, în sus, cu viteza v_0 .

Se cere să se determine viteza v a corpului A în funcție de distanța sa de la sol, notată cu x , și înălțimea maximă h la care el se ridică. Se neglijează rezistența aerului, iar accelerația gravitațională g este considerată constantă.

Rezolvare. Aplicînd sistemului format din corpul A și lanț teorema variației cantității de mișcare proiectată pe direcția mișcării, rezultă:

$$\frac{d}{dt} [(M + \rho x) v] = -(M + \rho x) g.$$

Se amplifică ecuația obținută cu $(M + \rho x) v dt$, se integrează și se pun apoi condițiile inițiale $t = 0$; $v = v_0$; $x = x_0$ pentru a determina constanta de integrare. Se obține:

$$v^2 = \frac{(M + \rho x_0)^2 v_0^2 - 2g[M^2(x - x_0) + M\rho(x^2 - x_0^2) + \frac{1}{3}\rho^2(x^3 - x_0^3)]}{(M + \rho x)^2}, \quad (a)$$

Relația (a) este valabilă pentru $x \leq l$. Pentru $x > l$ viteza este dată de relația: $v^2 = v_1^2 - 2g(x - l)$.

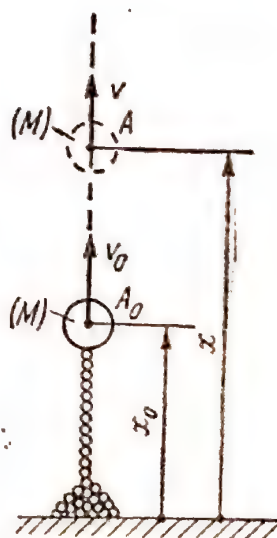


Fig. 25.B.1

în care v_1 este valoarea lui v corespunzătoare lui $x = l$, adică momentului în care lanțul este întins complet și care se obține făcând $x = l$ în relația (a).

Dacă se face $v_1 = 0$ se obține valoarea lui v_0 , notată v'_0 , pentru care înălțimea maximă atinsă de corpul A este $h = l$:

$$v_0'^2 = 2g \frac{M^2(l - x_0) + M\rho(l^2 - x_0^2) + \frac{1}{3}\rho^2(l^3 - x_0^3)}{(M + \rho x_0)^2}.$$

Pentru $v_0 < v'_0$ înălțimea maximă atinsă de corpul A se obține făcând în relația (a) $v = 0$ și $x = h$. Rezultă, după unele transformări:

$$h = \frac{M}{\rho} \left[\sqrt[3]{\left(\frac{M + \rho x_0}{M}\right)^2 \left(\frac{3\rho}{2M} \cdot \frac{v_0^2}{g} + \frac{\rho x_0}{M} + 1\right)} - 1 \right].$$

Pentru $v_0 > v'_0$ vom avea: $h = l + \frac{v_1^2}{2g}$.

25.B.2. Două corpuri A și B avînd masele M_1 și M_2 sînt legate la cele două capete ale unui lanț omogen de lungime l și densitate liniară ρ . Întregul sistem format din cele două corpuri și lanț este așezat pe un plan orizontal. Coeficienții de frecare de alunecare ai celor două corpuri cu planul orizontal sînt respectiv μ_1 și μ_2 , iar al lanțului μ' . O parte a lanțului, de lungime x_0 , aflată la capătul legat de corpul A , este întinsă pe planul orizontal, iar cealaltă parte, de lungime $l - x_0$, este încolăcită în fața corpului B . Din această poziție corpul A este lansat pe planul orizontal cu viteza v_0 (fig. 25.B.2). Se cer viteza v_1 a corpului A în funcție de distanța $BA = x$ dintre cele două corpuri, viteza v' care se imprimă întregului sistem în momentul desfășurării complete a lanțului, precum și distanța D parcursă de sistem din acest moment pînă la oprire.

Rezolvare. Se aplică sistemului teorema variației cantității de mișcare proiectată pe direcția mișcării:

$$\frac{d}{dt} [(M_1 + \rho x)v_1] = -g(\mu_1 M_1 + \mu' \rho x).$$

Amplificînd această ecuație cu $(M_1 + \rho x)v_1 \cdot dt$, rezultă:

$$\begin{aligned} [(M_1 + \rho x)v_1] \cdot d[(M_1 + \rho x)v_1] &= \\ &= -g[\mu_1 M_1^2 + (\mu_1 + \mu') M_1 \rho x + \mu' \rho^2 x^2] dx. \end{aligned}$$

Se integrează ecuația obținută:

$$\frac{1}{2} (M_1 + \rho x)^2 v_1^2 = -g \left[\mu_1 M_1^2 x + (\mu_1 + \mu') M_1 \rho \frac{x^2}{2} + \mu' \rho^2 \frac{x^3}{3} \right] + C.$$

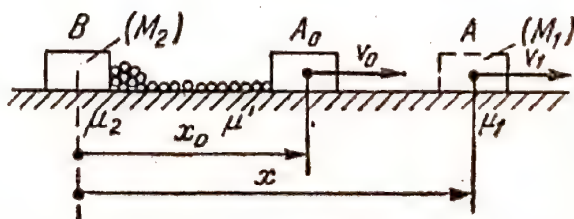


Fig. 25.B.2

Punind condițiile inițiale: $t = 0$; $v_1 = v_0$; $x = x_0$ în relația precedentă rezultă valoarea constantei de integrare C și apoi viteza v_1 :

$$v_1^2 = \frac{(M_1 + \rho x_0)^2 v_0^2 - 2g \left[\mu_1 M_1^2 (x - x_0) + \frac{1}{2} (\mu_1 + \mu') M_1 \rho (x^2 - x_0^2) + \frac{1}{3} \mu' \rho^2 (x^3 - x_0^3) \right]}{(M_1 + \rho x)^2}.$$

Făcînd în relația de sus $x = l$, rezultă $v_1 = v'_1$, ceea ce reprezintă valoarea vitezei corpului A în momentul întinderii întregului lanț, dar înainte de a fi pus în mișcare corpul B . În momentul punerii în mișcare a corpului B , moment care este echivalent cu o ciocnire plastică, cantitatea de mișcare a întregului sistem se conservă. Rezultă:

$$(M_1 + \rho l) v'_1 = (M_1 + M_2 + \rho l) v', \text{ de unde: } v' = \frac{M_1 + \rho l}{M_1 + M_2 + \rho l} v'_1.$$

Aplicînd apoi, după întinderea completă a lanțului și punerea în mișcare a corpului B , teorema energiei cinetice și a lucrului mecanic, întregului sistem, între momentul punerii în mișcare a corpului B și momentul opririi sistemului, se obține:

$$D = \frac{M_1 + M_2 + \rho l}{2g(\mu_1 M_1 + \mu_2 M_2 + \mu' \rho l)} v'^2.$$

Din relația care dă pe v_1 se poate obține, făcînd $x = l$ și $v_1 = 0$, valoarea vitezei inițiale, notată v'_0 , pentru care corpul A se oprește chiar în momentul desfășurării întregului lanț:

$$v_0'^2 = 2g \frac{\mu_1 M_1^2 (l - x_0) + \frac{1}{2} (\mu_1 + \mu') M_1 \rho (l^2 - x_0^2) + \frac{1}{3} \mu' \rho^2 (l^3 - x_0^3)}{(M_1 + \rho x_0)^2}.$$

Dacă $v_0 < v'_0$ corpul A se oprește înainte de desfășurarea întregului lanț.

Se menționează că pentru ca partea din lanț care este întinsă la un moment dat să rămînă tot timpul sub tensiune (întinsă), trebuie ca $\mu_1 < \mu' < \mu_2$.

Observație.

Dacă în problema (25.B.2) se face $M_2 = 0$ și $\mu_1 = \mu' = 0$, rezultă una din problemele lui Cayley. În acest caz se va obține:

$$v_1 = \frac{M_1 + \rho x_0}{M_1 + \rho x} v_0.$$

Înlocuind în această relație $v_1 = \frac{dx}{dt}$ și integrînd, se obține ecuația:

$$\rho(x^2 - x_0^2) + 2M_1(x - x_0) = 2(M_1 + \rho x_0)v_0 t,$$

din care se poate obține abscisa x la fiecare moment t , precum și timpul t_1 necesar pentru desfășurarea completă a lanțului ($t = t_1$ pentru $x = l$).

25.B.3. Cum trebuie să varieze masa unei rachete pentru ca racheta să se miște vertical, în sus, cu viteză constantă v_0 , dacă viteza relativă de scurgere a gazelor din motorul rachetei este constantă și egală cu v

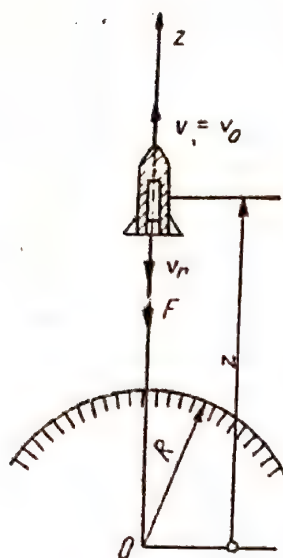


Fig. 25.B.3

și dacă se ține seama de variația forței de atracție a Pământului cu altitudinea. Se dă raza Pământului R , accelerația gravitațională la suprafața Pământului g_P , masa inițială a rachetei m_0 și înălțimea inițială h_0 . Rezistența aerului se neglijează.

Rezolvare. Se consideră axa de coordonate Oz cu originea în centrul Pământului (fig. 25.B.3).

Forța de atracție a Pământului este $F = k \frac{M \cdot m}{z^2}$, în care k este constanta atracției universale, M — masa Pământului, m — masa rachetei, z — distanța de la centrul Pământului la rachetă.

Aplicînd această formulă la suprafața Pământului rezultă:

$$k \frac{M \cdot m}{R^2} = mg_P, \text{ de unde } kM = g_P R^2, \text{ deci } F = \frac{g_P R^2 m}{z^2}.$$

Se aplică ecuația (25.1) proiectată pe direcția Oz și se ține seama că $\frac{dv}{dt} = 0$. Se obține:

$$0 = -\frac{g_P R^2 m}{z^2} - v_r \frac{dm}{dt} \text{ sau } \frac{dm}{m} = -\frac{g_P R^2}{v_r z^2} dt.$$

Se amplifică ecuația obținută cu v_0 , se înlocuiește $v_0 dt = dz$ și se integrează ținînd seama de condițiile inițiale: $t = 0$, $m = m_0$, $z = R + h_0$. Rezultă legea de variație a masei rachetei în raport cu înălțimea sau în raport cu timpul, dacă se ține seama că $z = R + h_0 + v_0 t$:

$$m = m_0 e^{\frac{g_P R^2}{v_0 v_r} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{R + h_0} \right)} = m_0 e^{-\frac{g_P R^2 t}{v_r (R + h_0) (R + h_0 + v_0 t)}}.$$

25.B.4. O navă cosmică de masă m_0 se mișcă în spațiu cu viteza v_0 . Ea întâlnește un nor de praf cosmic de lungime l și densitate ρ , care se află în repaus și pe care îl traversează. Considerînd că aria suprafeței frontale a navei cosmice este S și că praful cosmic care lovește nava se lipește de suprafața ei frontală, mărindu-i masa inițială, se cere să se determine viteza v_1 a navei după traversarea norului de praf cosmic și timpul t_1 de traversare. Se consideră că asupra navei cosmice nu acționează nici o forță exterioară.

Rezolvare. Masa m_2 de praf cosmic atașată la un moment dat t la masa inițială m_0 a navei cosmice este $m_2 = \rho S x$, în care x este distanța parcursă de navă în interiorul norului de praf cosmic (fig. 25.B.4), iar masa navei cosmice la același moment va fi: $m = m_0 + m_2 = m_0 + \rho S x$.

Se aplică apoi ecuația (25.2, a) proiectată pe direcția mișcării, în care se introduc: $\bar{F} = 0$, $m_1 = 0$, $\bar{v}_{r2} = -\bar{v}$, $dm = dm_2 = \rho S \cdot dx$. Rezultă:

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt} v, \text{ adică: } \frac{dv}{v} = -\frac{dm}{m}.$$

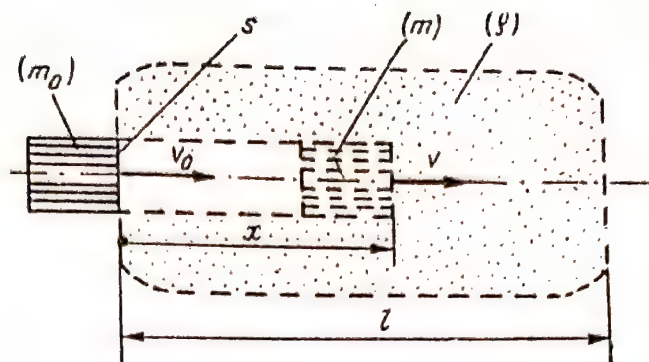


Fig. 25.B.4

Integrând ultima ecuație și ținând seama de condițiile inițiale: $t = 0$, $v = v_0$, $m = m_0$, se obține:

$$v = v_0 \frac{m_0}{m} = v_0 \frac{m_0}{m_0 + \rho S x}; \quad (a)$$

$$v_1 = v_0 \frac{m_0}{m_0 + \rho S l}.$$

Integrând, în raport cu timpul, ecuația notată cu (a) și ținând seama că la $t = 0$ avem $x = 0$, se obține ecuația de mișcare:

$$\rho S x^2 + 2m_0 x = 2m_0 v_0 t.$$

De aici se obține: $t_1 = \frac{\rho S l + 2m_0}{2m_0 v_0} l$.

25.B.5. Să se găsească legea de mișcare $x = x(t)$ și legea de variație a masei unei rachete care este lansată pe verticală, în sus, de la înălțimea x_0 , cu viteza v_0 și care se mișcă cu accelerația $a = \text{constant}$. Se cere, de asemenea, înălțimea totală h_1 la care se ridică racheta avînd în vedere și urcarea rachetei după terminarea arderii combustibilului. Se cunosc masa inițială m_0 și masa finală m_f ale rachetei, precum și viteza v_r de ieșire a gazelor de ardere din motorul rachetei, care este constantă.

Se neglijează rezistența aerului și variația accelerației gravitaționale g cu altitudinea.

Rezolvare. Viteza rachetei și înălțimea ei (notată cu x) la un moment dat sînt:

$$v = v_0 + at; \quad (a)$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2. \quad (b)$$

Se proiectează apoi ecuația (25.1) pe direcția mișcării și se obține:

$$ma = -mg - \frac{dm}{dt} v_r, \text{ de unde } \frac{dm}{m} = -\frac{a+g}{v_r} dt.$$

Integrînd și ținînd seama că la $t = 0$ avem $m = m_0$, se obține legea de variație a masei rachetei:

$$m = m_0 e^{-\frac{a+g}{v_r} t}. \quad (c)$$

În momentul terminării arderii combustibilului avem $t = t_f$ și $m = m_f$ și, ca urmare, din relațiile (c), (a), (b) rezultă, respectiv :

$$t_f = \frac{v_r}{a+g} \cdot \ln \frac{m_0}{m_f} = \frac{v_r}{a+g} \cdot \ln z; \quad v_f = v_0 + \frac{a}{a+g} v_r \cdot \ln z;$$

$$x_f = x_0 + \frac{v_0 v_r}{a+g} \cdot \ln z + \frac{1}{2} \frac{a}{(a+g)^2} v_r^2 \cdot \ln^2 z, \text{ unde } z = \frac{m_0}{m_f}.$$

Înălțimea totală la care se ridică racheta este :

$$h_1 = x_f + \frac{v_f^2}{2g} = x_0 + \frac{v_0^2}{2g} + \frac{v_0 v_r}{g} \cdot \ln z + \frac{a}{a+g} \cdot \frac{v_r^2}{2g} \cdot \ln^2 z.$$

25.B.6. Pentru cercetarea straturilor superioare ale atmosferei se folosește o rachetă cu trei trepte care este lansată de la sol vertical, în sus, fără viteză inițială ($v_0 = 0$). Raportul între încărcătura utilă a fiecărei trepte și restul masei rachetei fără combustibilul acelei trepte este $\varepsilon = 1/2$, iar vitezele relative de scurgere a gazelor din motoarele celor trei trepte sînt respectiv : $v_{r1} = 2\,200$ m/s, $v_{r2} = 2\,400$ m/s, $v_{r3} = 2\,800$ m/s. Cunoscînd timpul de ardere a combustibilului pentru fiecare treaptă : $\tau_1 = 30$ s, $\tau_2 = 40$ s, $\tau_3 = 50$ s ; viteza atinsă de fiecare treaptă a rachetei după arderea integrală a combustibilului acelei trepte : $v_1 = 2\,500$ m/s, $v_2 = 5\,000$ m/s, $v_3 = 8\,000$ m/s și masa aparatului de cercetare care trebuie lansată în atmosferă $m_s = 100$ kg, se cere să se afle masa inițială a rachetei și cantitatea de combustibil necesară fiecărei trepte. Se va neglija rezistența aerului, variația accelerației gravitaționale g cu altitudinea și efectul rotației Pămîntului.

(Prin încărcătură utilă a unei trepte date se înțelege masa inițială a tuturor treptelor următoare, iar pentru ultima treaptă masa satelitului propriu-zis sau masa aparatului lansată pentru cercetare).

Rezolvare. Se introduc următoarele notații (fig. 25.B.6) :

m_s = masa aparatului sau satelitului = încărcătura utilă a treptei a treia ;

m_3 = masa rachetei fără prima și a doua treaptă și fără combustibilul treptei a treia ;

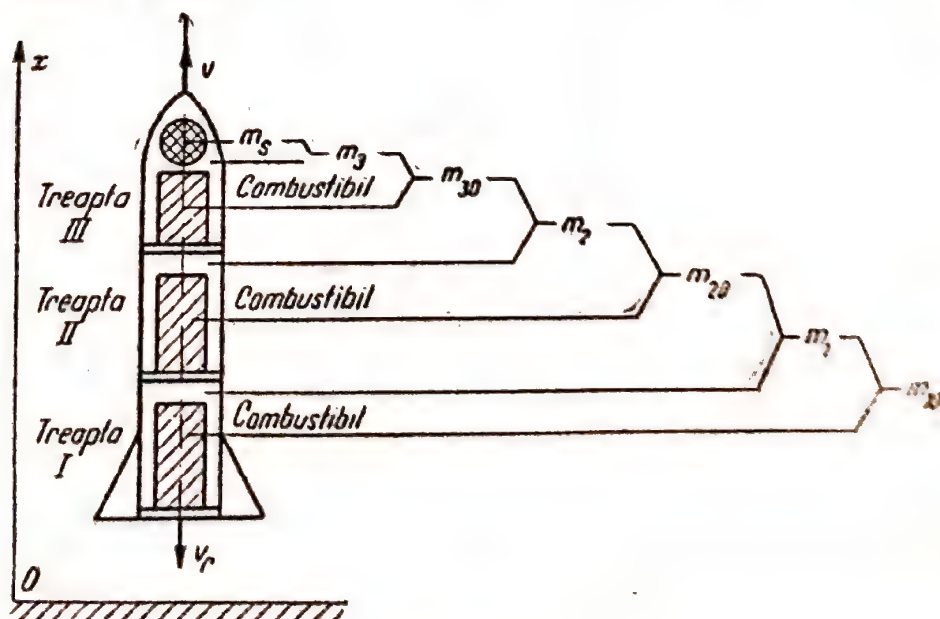


Fig. 25.B.6

- m_{30} = masa inițială a treptei a treia (cu aparatura sau satelitul) = încărcătura utilă a treptei a doua;
 m_2 = masa rachetei fără prima treaptă și fără combustibilul treptei a doua;
 m_{20} = suma maselor inițiale ale treptelor a doua și a treia (cu aparatura sau satelitul) = încărcătura utilă a treptei întâi;
 m_1 = masa rachetei fără combustibilul treptei întâi;
 m_{10} = masa inițială a rachetei.

Proiectând relația (25.1) pe direcția mișcării, adică pe verticală, se obține, pentru o treaptă oarecare a rachetei:

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - \frac{dm}{dt} v_r, \text{ sau: } dv = -gdt - v_r \frac{dm}{m},$$

Integrând și ținând seama că la $t = 0$, $v = v_0$ și $m = m_0$, rezultă:

$$v = v_0 - gt + v_r \cdot \ln \frac{m_0}{m}. \quad (a)$$

Dacă se ține seama de notațiile introduse și de faptul că viteza finală a unei trepte este viteză inițială pentru treapta următoare; la sfârșitul perioadei de ardere a combustibilului fiecărei trepte se obține conform relației (a):

$$\begin{aligned}
 v_1 &= -g\tau_1 + v_{r1} \cdot \ln \frac{m_{10}}{m_1}; \quad v_2 = v_1 - g\tau_2 + v_{r2} \cdot \ln \frac{m_{20}}{m_2}; \\
 v_3 &= v_2 - g\tau_3 + v_{r3} \cdot \ln \frac{m_{30}}{m_3}. \quad (b)
 \end{aligned}$$

Din relațiile (b) se obțin numerele lui Tsiolkovski:

$$\begin{aligned}
 z_1 &= \frac{m_{10}}{m_1} = e^{\frac{v_1 + g\tau_1}{v_{r1}}}; \quad z_2 = \frac{m_{20}}{m_2} = e^{\frac{v_2 - v_1 + g\tau_2}{v_{r2}}}; \\
 z_3 &= \frac{m_{30}}{m_3} = e^{\frac{v_3 - v_2 + g\tau_3}{v_{r3}}},
 \end{aligned}$$

iar apoi, având în vedere că:

$$\varepsilon_1 = \frac{m_{20}}{m_1}; \quad \varepsilon_2 = \frac{m_{30}}{m_2}; \quad \varepsilon_3 = \frac{m_s}{m_3}, \quad (\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon), \quad (c)$$

se obține succesiv:

$$\begin{aligned}
 m_3 &= \frac{m_s}{\varepsilon_3}; & m_{30} &= m_3 z_3 = m_s \frac{z_3}{\varepsilon_3}; \\
 m_2 &= \frac{m_{20}}{\varepsilon_2} = m_s \frac{z_3}{\varepsilon_2 \varepsilon_3}; & m_{20} &= m_2 z_2 = m_s \frac{z_2 z_3}{\varepsilon_2 \varepsilon_3}; \\
 m_1 &= \frac{m_{10}}{\varepsilon_1} = m_s \frac{z_2 z_3}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}; & m_{10} &= m_1 z_1 = m_s \frac{z_1 z_2 z_3}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}.
 \end{aligned}$$

Rezultă apoi masa de combustibil necesară pentru fiecare din cele trei trepte ale rachetei:

$$m_{c1} = m_{10} - m_1 = m_s \frac{z_1 z_2 (z_1 - 1)}{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3}; \quad m_{c2} = m_{20} - m_2 = m_s \frac{z_3 (z_2 - 1)}{\epsilon_2 \epsilon_3};$$

$$m_{c3} = m_{30} - m_3 = m_s \frac{z_3 - 1}{\epsilon_3}.$$

Introducând datele numerice se obține:

$$z_1 = 3,561; \quad z_2 = 3,337; \quad z_3 = 3,478;$$

$$m_{10} = 33\,063 \text{ kg}; \quad m_{c1} = 23\,778 \text{ kg}; \quad m_{c2} = 3\,251 \text{ kg}; \quad m_{c3} = 496 \text{ kg}.$$

25.B.7. O rachetă este lansată pe verticală, în sus, de la înălțimea x_0 , cu viteza v_0 (fig. 25.B.7). Viteza v_r de ieșire a gazelor de ardere din motorul rachetei este constantă. Masa inițială a rachetei este m_0 , iar masa finală este m_f .

Se cere să se determine viteza v a rachetei în funcție de masa m a acesteia la un moment dat și de timpul t . Presupunând apoi că masa rachetei variază după legile: 1) $m = m_0(1 - \alpha t)$ și 2) $m = m_0 e^{-\alpha t}$, în care α este o constantă dată care caracterizează legea de ardere a combustibilului, se cere să se găsească: legea de mișcare a rachetei, viteza v , și înălțimea h , atinse de rachetă în momentul terminării arderii combustibilului, forța de reacție F_r și accelerația rachetei a , precum și înălțimea totală h_1 atinsă de rachetă (inclusiv înălțimea câștigată din energia cinetică pe care o are racheta în momentul terminării arderii combustibilului).

Să se determine apoi legea de variație a masei rachetei (legea de ardere a combustibilului) pentru care, cu cantitatea de combustibil ($m_0 - m_f$) dată, înălțimea totală h_1 atinsă de rachetă este maximă.

Se va neglija rezistența aerului și variația accelerației gravitaționale g cu altitudinea.

Rezolvare. Se aplică ecuația (25.1) proiectată pe direcția mișcării:

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - \frac{dm}{dt} v_r, \text{ sau: } dv = -g dt - \frac{dm}{m} v_r.$$

Integrând ecuația obținută și ținând seama de condițiile inițiale: $t = 0$, $v = v_0$, $m = m_0$, rezultă:

$$v = v_0 - gt + v_r \cdot \ln \frac{m_0}{m}. \quad (a)$$

La sfârșitul perioadei de ardere a combustibilului când $t = t_f$ și $m = m_f$, viteza rachetei va fi:

$$v_f = v_0 - gt_f + v_r \cdot \ln \frac{m_0}{m_f} = v_0 - gt_f + v_r \cdot \ln z, \quad (b)$$

unde $z = \frac{m_0}{m_f}$ este numărul lui Tsiolkovski.

Integrând din nou ecuația (a) în raport cu timpul și ținând seama că la $t = 0$, $x = x_0$, se obține:

$$x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + v_r \int_0^t \left(\ln \frac{m_0}{m} \right) dt. \quad (c)$$

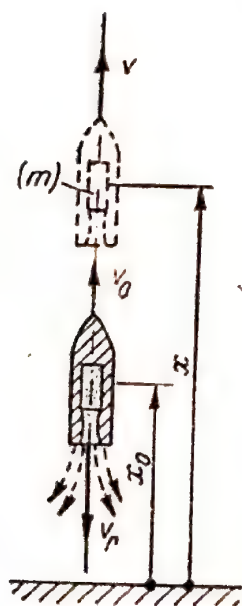


Fig. 25.B.7

Pentru a putea găsi legea de mișcare a rachetei $x = x(t)$ este necesar să se cunoască modul de scurgere a jetului de gaze din motorul rachetei, adică variația masei rachetei în raport cu timpul.

1) Dacă $m = m_0(1 - \alpha t)$, ceea ce înseamnă că debitul masic de gaze evacuate din motorul rachetei este $Q_m = |dm/dt| = m_0\alpha = \text{constant}$, din relațiile (a) și (c) se obține:

$$v = v_0 - gt - v_r \cdot \ln(1 - \alpha t);$$

$$x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + \frac{v_r}{\alpha} [\alpha t + (1 - \alpha t) \cdot \ln(1 - \alpha t)].$$

La sfârșitul perioadei de ardere a combustibilului:

$$t_f = \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{m_f}{m_0}\right) = \frac{z-1}{\alpha z}; \quad v_f = v_0 - g \frac{z-1}{\alpha z} + v_r \cdot \ln z;$$

$$h_f = x_0 + v_0 \frac{z-1}{\alpha z} - \frac{1}{2}g \left(\frac{z-1}{\alpha z}\right)^2 + v_r \frac{z-1 - \ln z}{\alpha z}.$$

În cazul variației liniare a masei rachetei în raport cu timpul, forța reactivă este constantă, iar accelerația rachetei crește cu timpul:

$$F_r = -\frac{dm}{dt} v_r = m_0 \alpha v_r = \text{const.}; \quad a = \frac{dv}{dt} = v_r \frac{\alpha}{1 - \alpha t} - g.$$

2) Dacă $m = m_0 e^{-\alpha t}$, din relațiile (a) și (c) rezultă:

$$v = v_0 - gt + v_r \alpha t;$$

$$x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{2}v_r \alpha t^2,$$

iar la sfârșitul perioadei de ardere:

$$t_f = \frac{1}{\alpha} \cdot \ln z; \quad v_f = v_0 + \frac{v_r \alpha - g}{\alpha} \cdot \ln z;$$

$$h_f = x_0 + \frac{v_0}{\alpha} \cdot \ln z + \frac{v_r \alpha - g}{2\alpha^2} \cdot \ln^2 z.$$

În cazul variației exponențiale a masei rachetei în raport cu timpul, forța reactivă scade exponențial cu timpul, iar accelerația rachetei este constantă:

$$F_r = -\frac{dm}{dt} v_r = v_r m_0 \alpha e^{-\alpha t}, \quad a = \frac{dv}{dt} = v_r \alpha - g = \text{const.}$$

În ambele cazuri (1 și 2), înălțimea totală atinsă de rachetă este:

$$h_1 = h_f + \frac{v_f^2}{2g}. \quad (d)$$

Pentru a determina legea de variație a masei rachetei pentru care h_1 este maxim, se presupune că această lege are forma $m = m_0 \cdot f(\alpha, t)$ în care $f(\alpha, t)$ este o funcție oarecare de parametrul α (care caracterizează modul în care se face arderea combustibilului) și de timpul t . În acest caz h_1 este dat de relația (d), în care v_r se obține din relația (a) în care

se face $t = t_f$ și $m = m_f$, iar h_f din relația (c) în care se face $t = t_f$ și $m = m_0 \cdot f(\alpha, t)$. Se obține:

$$h_1 = x_0 + v_0 t_f - \frac{1}{2} g t_f^2 - v_r \int_0^{t_f} [\ln f(\alpha, t)] dt + \frac{1}{2g} (v_0 - g t_f + v_r \ln z)^2 \quad (c)$$

În relația obținută $z = \frac{m_0}{m_f}$ este constant, iar t_f depinde de α . Valoarea parametrului α pentru care h_1 devine maxim se obține făcînd $\frac{\partial h_1}{\partial \alpha} = 0$. Derivînd în raport cu α expresia lui h_1 dată de (c) și ținînd seama la derivarea integralei* că limita ei superioară t_f depinde de α , se obține:

$$v_0 \frac{\partial t_f}{\partial \alpha} - g t_f \frac{\partial t_f}{\partial \alpha} - v_r \left[\int_0^{t_f} \frac{\frac{\partial f(\alpha, t)}{\partial \alpha}}{f(\alpha, t)} \cdot dt + \frac{\partial t_f}{\partial \alpha} \ln f(\alpha, t_f) \right] - (v_0 - g t_f + v_r \ln z) \frac{\partial t_f}{\partial \alpha} = 0,$$

iar apoi ținînd seama că $f(\alpha, t_f) = \frac{1}{z}$ și reducînd termenii asemenea:

$$\int_0^{t_f} \frac{\partial f(\alpha, t)}{\partial \alpha} \cdot \frac{dt}{f(\alpha, t)} = 0.$$

Această ultimă integrală nu poate fi nulă decît dacă intervalul de integrare este nul, adică dacă $t_f = 0$, deoarece $\frac{\partial f(\alpha, t)}{\partial \alpha} \cdot \frac{1}{f(\alpha, t)} \neq 0$.

Rezultă că, pentru o cantitate de combustibil dată, înălțimea totală h_1 atinsă de rachetă este maximă dacă arderea combustibilului este instantanee, adică sub formă de explozie.

Dacă arderea combustibilului rachetei are loc instantaneu, rezultă că $\frac{dm}{dt} = -\infty$, ceea ce corespunde unei accelerații infinite a rachetei:

$$a = \frac{F_r - mg}{m} = \frac{F_r}{m} - g = -\frac{dm}{dt} \cdot \frac{v_r}{m} - g = \infty - g = \infty.$$

Accelerațiile pe care le poate suporta racheta sînt însă limitate la o valoare maximă. Dacă se respectă această restricție și se dorește ca înălțimea totală h_1 atinsă de rachetă să fie maximă, racheta trebuie să se miște, în timpul arderii combustibilului, cu accelerație constantă și egală cu cea maximă admisă. După cum s-a văzut la punctul 2 al problemei, în acest caz masa rachetei variază exponențial în raport cu timpul (vezi problema 25.B.5).

Dacă arderea combustibilului are loc instantaneu, viteza imprimată rachetei se calculează prin aplicarea teoremei conservării cantității de mișcare (ca în cazul ciocnirilor):

$$m_f v_f - m_c v_r = 0, \text{ de unde } v_f = \frac{m_c}{m_f} v_r, \text{ în care } m_c = m_0 - m_f = \\ = \text{masa combustibilului.}$$

* Dacă $I(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(\alpha, t) dt$, $\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} \frac{\partial f(\alpha, t)}{\partial \alpha} dt + \frac{db}{d\alpha} f(\alpha, b) - \frac{da}{d\alpha} f(\alpha, a)$.

PROBLEME GENERALE DE DINAMICĂ

26.1. Un punct material de masă m pornește cu viteza inițială v_0 pe porțiunea rectilinie $OA = l$ (coeficient de frecare μ), apoi continuă mișcarea pe arcul de cerc de rază R , și unghi la centru θ , fără frecare ($\mu = 0$). Să se determine: viteza în punctul B , v_B ; reacțiunea normală N_B ; poziția x în care punctul atinge suprafața orizontală în cădere liberă; viteza v_C cu care atinge această suprafață; viteza v'_C după ciocnirea suprafeței orizontale, coeficientul de restituire e al ciocnirii fiind cunoscut; distanța x_1 atinsă după ciocnire (fig. 26.1).

Aplicație numerică: $m = 1$ (kg), $v_0 = 10$ (m/s), $l = 4$ (m), $\mu = 0,2$, $R = 2$ (m), $\theta = 60^\circ$; $e = \frac{1}{2}$, $g = 10$ (m/s²).

Rezolvare. Se aplică teorema variației energiei cinetice între pozițiile O și B :

$$E_B - E_0 = L_{OB}; \quad \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -\mu m g l - m g h,$$

deci:

$$v_B^2 = v_0^2 - 2\mu g l - 2gR(1 - \cos \theta); \quad \text{rezultă } v_B = 8 \text{ (m/s)}.$$

Pentru aflarea reacțiunii N_B , se proiectează ecuația fundamentală a dinamicii pe direcția normalei în punctul B :

$$m \frac{v_B^2}{R} = N_B - m g \cos \theta; \quad \text{rezultă } N_B = 37 \text{ (N)}.$$

Ecuațiile parametrice ale mișcării punctului greu, pe parabola BC , considerînd axele de referință xBy , se scriu:

$$x = v_B t \cos \theta; \quad y = v_B t \sin \theta - \frac{g t^2}{2}; \quad y_C = -R(1 - \cos \theta).$$

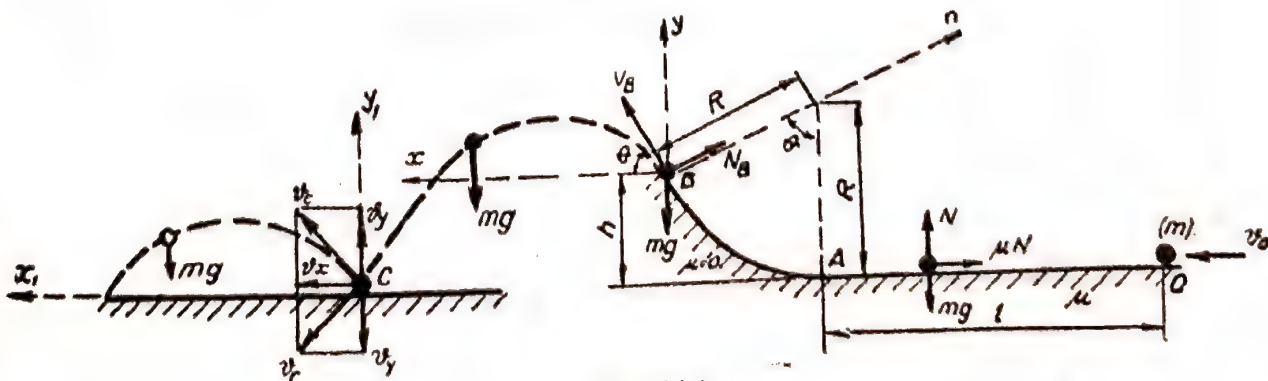


Fig. 26.1

Înlocuind cu datele numerice se obțin :

$$x = 4t; \quad y = 4\sqrt{3}t - 5t^2; \quad y_c = -1; \quad \text{rezultă } x = 6,08 \text{ (m)}.$$

Viteza de cădere în punctul C se obține derivând ecuațiile parametrice :

$$v_x = \dot{x} = v_B \cdot \cos \theta; \quad v_y = \dot{y} = v_B t \sin \theta - gt.$$

Rezultă :

$$v_{cx} = 4; \quad v_{cy} = -8,28; \quad v_c = 9,1 \text{ (m/s)}.$$

După ciocnirea oblică, în C, componenta v_x rămîne neschimbată, iar componenta v_y , influențată de ciocnire, schimbă semnul, multiplicat cu coeficientul e :

$$v'_x = v_x = v_B \cos \theta = 4$$

$$v'_y = ev_y = 4,14.$$

Deci, rezultă $v'_c = 4,3 \text{ (m/s)}$.

După ciocnire, ecuațiile parametrice ale mișcării, scrise față de axele x_1Cy_1 , devin :

$$x_1 = v'_x t_1 = 4t_1;$$

$$y_1 = v'_y t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = 4,14t_1 - 5t_1^2 = 0.$$

Rezultă pentru punctul de cădere pe sol :

$$t_1 = 0,83 \text{ (s)} \quad \text{și} \quad x_1 = 3,3 \text{ (m)}.$$

26.2. Se dă o bară omogenă AB de lungime l și greutate G , care se află inițial în repaus la $\theta = \theta_0$ (fig. 26.2, a). Bara începe să se miște sub acțiunea greutății proprii. Neglijînd frecările, să se calculeze pentru o anumită poziție θ valorile vitezei și accelerației instantanee de rotație ale barei și reacțiunile din cele două reazeme.

Rezolvare.

Metoda I. Bara are mișcare plană, centrul instantaneu de rotație fiind în I . Deoarece se neglijează frecările și singura forță activă este greutatea barei, se aplică teorema de variație a energiei cinetice pentru calculul valorilor instantanee ale lui ω și $\dot{\omega}$. Pentru momentul inițial (repaus), rezultă $E_1 = 0$.

Energia cinetică E_2 se calculează aplicînd formula lui Koenig pentru momentul în care bara are față de I viteza unghiulară instantanee ω :

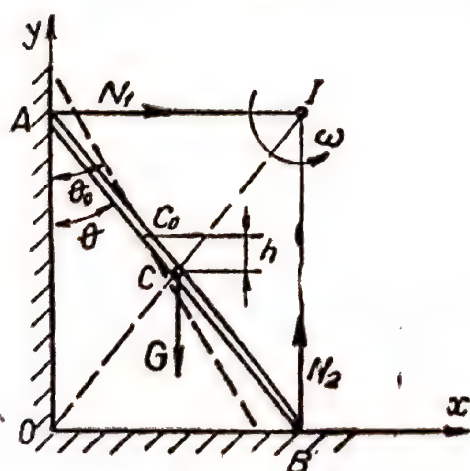
$$E_2 = \frac{1}{2} \frac{G}{g} v_c^2 + \frac{1}{2} \frac{Gl^2}{12g} \omega^2,$$

unde :

$$v_c = IC\omega = \frac{l}{2} \omega.$$

Înlocuind, se obține :

$$E_2 = \frac{Gl^2}{6g} \omega^2.$$



a)
Fig. 26.2, a

Lucrul mecanic între poziția inițială ($\theta = \theta_0$, $\omega = 0$) și cea finală (θ , ω) este $L_{12} = Gh = G \frac{l}{2} (\cos \theta_0 - \cos \theta)$.

Introducând expresiile calculate în $E_2 - E_1 = L_{1-2}$, se obține:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l} (\cos \theta_0 - \cos \theta)}, \quad \dot{\omega} = \frac{3g}{2l} \sin \theta.$$

Pentru calculul reacțiunilor, se aplică teorema de mișcare a centrului de masă proiectată pe axele sistemului de referință fix:

$$\frac{d}{dt} (m\bar{v}_c) = \Sigma \bar{F}_c;$$

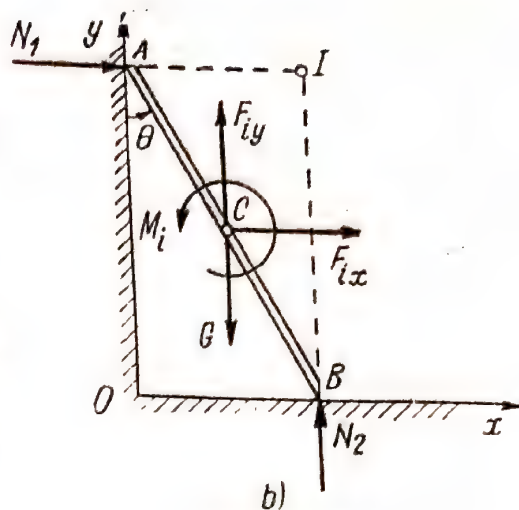


Fig. 26.2, b

$$(Ox); \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{G}{g} \frac{l}{2} \omega \cos \theta \right) = N_1;$$

$$(Oy); \quad - \frac{d}{dt} \left(\frac{G}{g} \frac{l}{2} \omega \sin \theta \right) = N_2 - G.$$

Efectuînd calculele, rezultă:

$$N_1 = \frac{Gl}{2g} (\dot{\omega} \cos \theta - \omega^2 \sin \theta); \quad N_2 = G - \frac{Gl}{2g} (\dot{\omega} \sin \theta + \omega^2 \cos \theta).$$

Dacă se înlocuiesc valorile lui ω și $\dot{\omega}$, se obține:

$$N_1 = \frac{3G}{8} [3 \sin 2\theta - 4 \sin \theta \cos \theta_0];$$

$$N_2 = G \left[1 - \frac{3}{4} (1 + 2 \cos \theta_0 \cos \theta - 3 \cos^2 \theta) \right].$$

Metoda a II-a — aplicarea principiului lui d'Alembert (fig. 26.2, b). Coordonatele centrului de masă C sînt:

$$x_c = \frac{l}{2} \sin \theta; \quad y_c = \frac{l}{2} \cos \theta.$$

Prin derivare se deduc componentele vitezei și accelerației centrului de masă:

$$\dot{x}_c = \frac{l}{2} \dot{\theta} \cos \theta; \quad \dot{y}_c = - \frac{l}{2} \dot{\theta} \sin \theta;$$

$$\ddot{x}_c = \frac{l}{2} (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta); \quad \ddot{y}_c = - \frac{l}{2} (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta).$$

Forța de inerție are componentele:

$$F_{ix} = - \frac{G}{g} \ddot{x}_c = - \frac{Gl}{2g} (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta);$$

$$F_{iy} = - \frac{G}{g} \ddot{y}_c = \frac{Gl}{2g} (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta).$$

Cuplul de inerție este:

$$M_i = -J_c \ddot{\theta} = -\frac{Gl^2}{12g} \ddot{\theta}.$$

Se menționează că în figura 26.2, *b* componentele forței de inerție și cuplul de inerție s-au figurat cu sensul lor pozitiv, iar în calcule s-au introdus cu semnele respective, rezultate mai înainte.

Scriind ecuațiile de echilibru dinamic, rezultă (fig. 26.2, *b*):

$$(\Sigma X_i = 0); \quad N_1 + F_{ix} = 0; \quad (a)$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad N_2 - G + F_{iy} = 0; \quad (b)$$

$$(\Sigma M_i = 0); \quad \frac{Gl}{2} \sin \theta + F_{ix} \frac{l}{2} \cos \theta - F_{iy} \frac{l}{2} \sin \theta + M_i = 0. \quad (c)$$

Ecuația (c) se mai scrie sub forma:

$$\begin{aligned} \frac{Gl}{2} \sin \theta - \frac{Gl^2}{4g} \ddot{\theta} \cos^2 \theta + \frac{Gl^2}{4g} \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{Gl^2}{4g} \ddot{\theta} \sin^2 \theta - \\ - \frac{Gl^2}{4g} \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{Gl^2}{12g} \ddot{\theta} = 0. \end{aligned}$$

Efectuînd calculele se obține ecuația diferențială a mișcării:

$$\ddot{\theta} - \frac{3g}{2l} \sin \theta = 0,$$

care coincide cu cea obținută anterior.

Cu ecuațiile (a) și (b) se calculează reacțiunile:

$$N_1 = -F_{ix} = \frac{Gl}{2g} (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta);$$

$$N_2 = G - F_{iy} = G - \frac{Gl}{2g} (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta),$$

care coincid cu cele deduse mai înainte.

Metoda a III-a — folosind ecuațiile Lagrange. Energia cinetică este:

$$E = \frac{Gl^2}{6g} \dot{\theta}^2.$$

Funcția de forță este:

$$U = mgy = -G \frac{l}{2} \cos \theta,$$

unde s-a ținut seama că greutatea este orientată în sens opus axei *Oy*.

Ecuația lui Lagrange $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial E}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta}$ se scrie în cazul de față:

$$\frac{Gl^2}{3g} \ddot{\theta} = G \frac{l}{2} \sin \theta,$$

de unde rezultă ecuația diferențială a mișcării:

$$\ddot{\theta} - \frac{3g}{2l} \sin \theta = 0.$$

Integrind se obține :

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{3g}{2l} \cos \theta = C.$$

Constanta de integrare se calculează cu condițiile inițiale $t = 0$:

$$\theta = \theta_0; \quad \dot{\theta} = 0, \quad \text{deci : } C = \frac{3g}{2l} \cos \theta_0.$$

Prin urmare, legea de mișcare este :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{l} (\cos \theta_0 - \cos \theta),$$

rezultat care coincide cu cel obținut anterior :

Metoda a IV-a — folosind ecuațiile canonice ale lui Hamilton. Impulsul generalizat este :

$$p = \frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} = \frac{Gl^2}{3g} \dot{\theta}, \quad \text{de unde } \dot{\theta} = \frac{3g}{Gl^2} p.$$

Funcția lui Hamilton calculată cu formula de definiție este :

$$\begin{aligned} H = p\dot{\theta} - (E + U) &= \frac{3g}{Gl^2} p^2 - \frac{Gl^2}{6g} \cdot \frac{9g^2}{Gl^4} p^2 + \frac{Gl}{2} \cos \theta = \\ &= \frac{3g}{2Gl^2} p^2 + \frac{Gl}{2} \cos \theta. \end{aligned}$$

Ținând seama că legăturile sînt scleronome, funcția lui Hamilton se mai poate calcula și cu relația :

$$\begin{aligned} H = E + V = E - U &= \frac{Gl^2}{6g} \frac{9g^2}{Gl^4} p^2 + \frac{Gl}{2} \cos \theta = \\ &= \frac{3g}{2Gl^2} p^2 + \frac{Gl}{2} \cos \theta. \end{aligned}$$

Ecuațiile canonice ale lui Hamilton :

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{\theta}; \quad \frac{\partial H}{\partial \theta} = -\dot{p}$$

devin, în cazul de față :

$$\frac{3g}{Gl^2} p = \dot{\theta}; \quad -\frac{Gl}{2} \sin \theta = -\dot{p}.$$

Din prima ecuație se obține :

$$\frac{3g}{Gl^2} \dot{p} = \ddot{\theta},$$

introducînd acest rezultat în a doua ecuație, rezultă :

$$\ddot{\theta} = \frac{3g}{2l} \sin \theta,$$

care coincide cu ecuația diferențială a mișcării stabilită anterior.

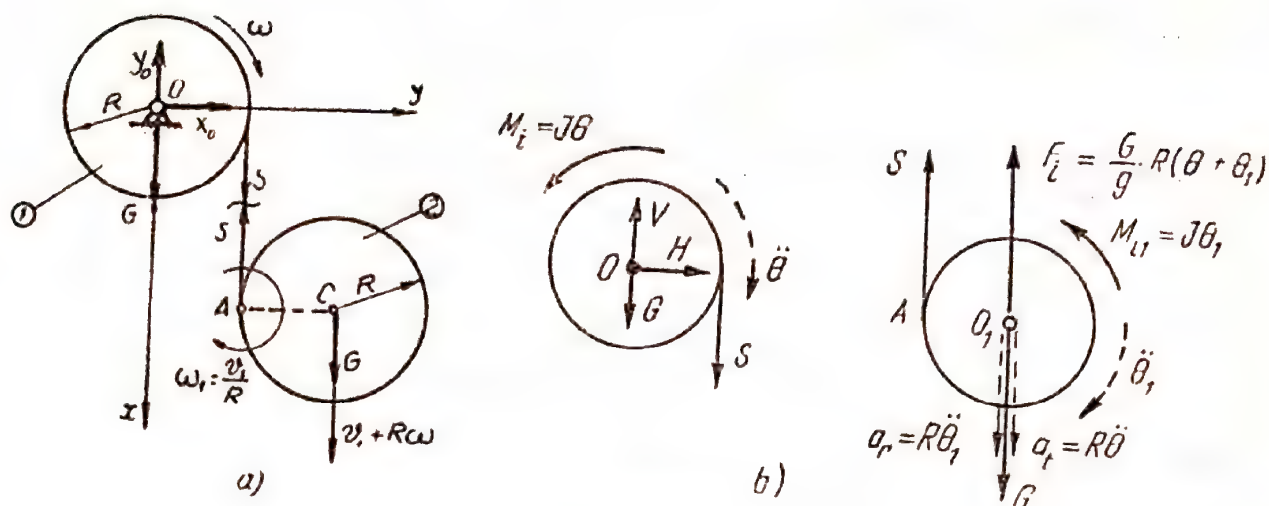


Fig. 26.3, a, b

26.3. Să se studieze mișcarea sistemului de corpuri din figura 26.3, a sub acțiunea greutății proprii a corpurilor. Firul este considerat fără greutate proprie.

Rezolvare.

Metoda I. Sistemul are două grade de libertate. Centrul C al discului (2) are față de fir o viteză v_1 , iar firul, la rîndul lui, viteza $R\omega$ cu care se desfășoară de pe discul (1).

Pentru corpul (1) se aplică, pentru studiul mișcării, numai teorema de variație a momentului cinetic:

$$(O); \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{GR^2}{2g} \omega \right) = SR.$$

Pentru corpul (2) se aplică atît teorema de mișcare a centrului de masă proiectată pe sistemul fix xOy , cît și teorema de variație a momentului cinetic față de centrul de greutate C al discului:

$$(Ox); \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{G}{g} (v_1 + R\omega) \right] = G - S;$$

$$(C); \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{GR^2}{2g} \frac{v_1}{R} \right) = SR.$$

Rezolvînd, rezultă:

$$a_1 = \frac{2g}{5}; \quad \dot{\omega} = \frac{2g}{5R}; \quad S = \frac{G}{5}.$$

Metoda a II-a — prin aplicarea principiului d'Alembert. Problema avînd două grade de libertate se alege ca parametri geometrice unghiurile θ față de O și θ_1 față de A .

Se izolează fiecare corp și se introduce torsorul forțelor de inerție în centrul de masă al fiecărui corp (fig. 26.3, b). Pentru discul O se introduce cuplul de inerție care are modulul $\frac{GR^2}{2g} \ddot{\theta}$. Pentru discul C , care efectuează o mișcare plan paralelă, forța de inerție se calculează cu accelerația absolută,

care în cazul de față de se obține prin însumarea accelerației de transport $a_t = R\ddot{\theta}$ și a accelerației relative $a_r = R\ddot{\theta}_1$; cuplul de inerție este $\frac{GR^2}{2g}\ddot{\theta}_1$.

Ecuatiile de echilibru dinamic sînt:

— pentru discul O :

$$(\Sigma M_O = 0); \quad \frac{GR^2}{2g}\ddot{\theta} - SR = 0; \quad (a)$$

— pentru discul C :

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad S + \frac{G}{g}R(\ddot{\theta} + \ddot{\theta}_1) - G = 0; \quad (b)$$

$$(\Sigma M_C = 0); \quad \frac{GR^2}{2g}\ddot{\theta}_1 - SR = 0. \quad (c)$$

Din ecuațiile (a) și (c) se deduce:

$$\ddot{\theta} = \ddot{\theta}_1. \quad (d)$$

Ținînd seama de relația (d) și eliminînd tensiunea S între ecuațiile (a) și (b), rezultă:

$$\ddot{\theta} = \frac{GR}{2g}\ddot{\theta} = G - 2\frac{GR}{g}\ddot{\theta},$$

de unde se obțin:

$$\ddot{\theta} = \frac{2}{5}\frac{g}{R} \quad \text{și} \quad S = \frac{G}{5}.$$

Metoda III-a — prin aplicarea ecuațiilor lui Lagrange. Energia cinetică a sistemului se calculează cu vitezele absolute și are expresia, ținînd seama că discul O efectuează o mișcare de rotație, iar discul C o mișcare plan paralelă:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} J_O \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_O \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{G}{g} (R\dot{\theta} + R\dot{\theta}_1)^2 = \\ &= \frac{G}{g} R^2 \left(\frac{3}{4} \dot{\theta}^2 + \frac{3}{4} \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta} \dot{\theta}_1 \right). \end{aligned}$$

Funcția de forță este:

$$U = \Sigma m_i g y_i = G(l_0 + R\theta + R\theta_1),$$

unde l_0 este lungimea inițială a firului dintre discuri.

Forțele generalizate sînt:

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial \theta} = GR; \quad Q_2 = \frac{\partial U}{\partial \theta_1} = GR.$$

Ecuatiile lui Lagrange sînt:

$$\left(\frac{3}{2} \ddot{\theta} + \ddot{\theta}_1 \right) \frac{GR^2}{g} = GR; \quad \left(\ddot{\theta} + \frac{3}{2} \ddot{\theta}_1 \right) \frac{GR^2}{g} = GR,$$

sau:

$$\frac{3}{2} \ddot{\theta} + \ddot{\theta}_1 = \frac{g}{R}; \quad \ddot{\theta} + \frac{3}{2} \ddot{\theta}_1 = \frac{g}{R}.$$

Rezolvând acest sistem se deduc:

$$\ddot{\theta} = \frac{2}{5} \frac{g}{R}; \quad \ddot{\theta}_1 = \frac{2}{5} \frac{g}{R},$$

adică aceleași rezultate.

26.4. În interiorul unui cilindru fix de rază R se mișcă un al doilea cilindru de greutate G și rază r (unde $r < R$), rostogolindu-se fără alunecare (fig. 26.4, a). Considerând că cilindrul mobil efectuează mici oscilații față de poziția de echilibru, se cere să se calculeze pulsația acestor oscilații. Se neglijează frecările.

Rezolvare. Din condiția de rostogolire fără alunecare, punctul de contact A este centrul instantaneu de rotație. Viteza centrului C al cilindrului mobil este:

$$v_c = (R - r) \dot{\theta} = r \Omega,$$

unde Ω este viteza unghiulară față de centrul instantaneu de rotație. Deci:

$$\Omega = \frac{R - r}{r} \dot{\theta} = \frac{R - r}{r} \omega, \quad \text{unde } \omega = \dot{\theta}.$$

Accelerația unghiulară a cilindrului mobil este:

$$\epsilon = \dot{\Omega} = \frac{R - r}{r} \ddot{\theta}.$$

În continuare problema va fi rezolvată prin mai multe metode.

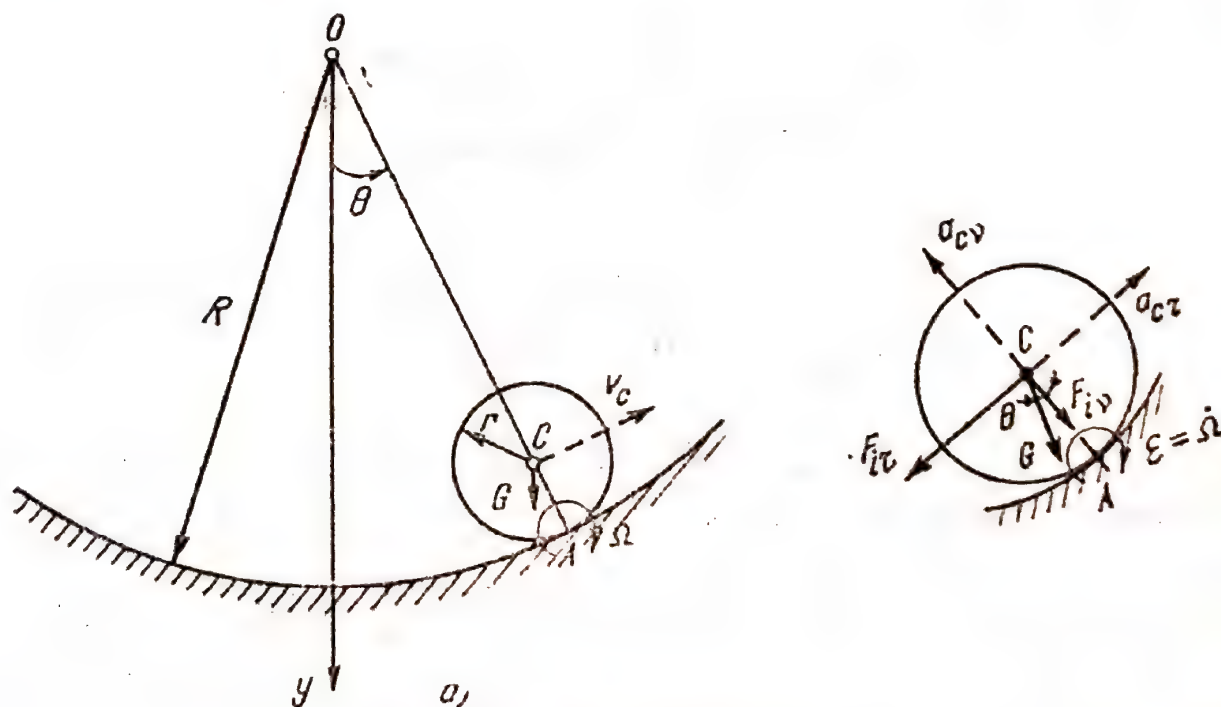


Fig. 26.4, a, b

Metoda I. Aplicarea teoremei conservării energiei mecanice. Energia cinetică a cilindrului care efectuează o mișcare plană este:

$$E = \frac{1}{2} \frac{G}{g} v_c^2 + \frac{1}{2} J_c \Omega^2 = \frac{1}{2} \frac{G}{g} [(R-r)\dot{\theta}]^2 + \frac{1}{2} \frac{GT^2}{2g} \frac{(R-r)^2}{r^2} \dot{\theta}^2 =$$

$$= \frac{3}{4} \frac{G}{g} (R-r)^2 \dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} \frac{G}{g} (R-r)^2 \omega^2. \quad (a)$$

Energia potențială este:

$$V = G(R-r)(1 - \cos \theta).$$

Fiind un sistem conservativ, se aplică teorema conservării energiei mecanice $E + V = \text{const}$, de unde $\frac{d}{dt}(E + V) = 0$, care în cazul de față conduce la:

$$\frac{3G}{2g} (R-r)^2 \ddot{\theta} + G(R-r) \sin \theta \cdot \dot{\theta} = 0. \quad (b)$$

Pentru micile oscilații se aproximează $\sin \theta \approx \theta$, deci relația (b) devine:

$$\ddot{\theta} + \frac{2g}{3(R-r)} \theta = 0, \quad (c)$$

care reprezintă ecuația unei vibrații armonice a cărei pulsație este:

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}.$$

Metoda a II-a. Aplicarea teoremei de variație a energiei cinetice $dE = dL$ sau, care se mai poate scrie $\frac{dE}{dt} = \frac{dL}{dt}$, se obține:

$$\frac{d}{dt}(E - L) = 0.$$

Fiind sistem conservativ ($L = -V$), rezultă:

$$\frac{d}{dt}(E + V) = 0,$$

ecuație care coincide cu cea scrisă mai înainte.

Metoda a III-a. Aplicarea principiului lui d'Alembert (fig. 26.4, b). Accelerația centrului de greutate G are două componente (în mișcarea față de O): $a_{cv} = (R-r)\dot{\theta}^2$ și $a_{ct} = (R-r)\ddot{\theta}$. În consecință, torsorul forțelor de inerție este format din:

$$F_i \begin{cases} F_{iv} = \frac{G}{g} (R-r)\dot{\theta}^2; \\ F_{it} = \frac{G}{g} (R-r)\ddot{\theta}. \end{cases}$$

$$M_i = J_c \varepsilon = \frac{Gr^2}{2g} \frac{R-r}{r} \ddot{\theta}.$$

Scriind ecuația de momente față de A , se obține :

$$(\Sigma M_A = 0); \quad M_t + F_{tr}r + Gr \sin \theta = 0,$$

sau :

$$\frac{Gr^2}{2g} \frac{R-r}{r} \ddot{\theta} + \frac{G}{g} (R-r) \ddot{\theta} + Gr \sin \theta = 0. \quad (d)$$

Pentru micile oscilații $\sin \theta \approx \theta$, deci ecuația (c) devine :

$$\frac{3}{2g} (R-r) \ddot{\theta} + \theta = 0, \quad \text{sau:} \quad \ddot{\theta} + \frac{2g}{3(R-r)} \theta = 0,$$

care coincide cu ecuația (c).

Metoda a IV-a. Aplicarea ecuațiilor lui Lagrange sub forma :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial E}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta}.$$

Energia cinetică a sistemului este, conform relației (a) :

$$E = \frac{3}{4} \frac{G}{g} (R-r)^2 \dot{\theta}^2.$$

Funcția de forță este (fig. 26.4, a) :

$$U = mgy = G(R-r) \cos \theta.$$

Introducând aceste rezultate în ecuația lui Lagrange, rezultă :

$$\frac{3G}{2g} (R-r)^2 \ddot{\theta} = -G(R-r) \sin \theta.$$

Efectuând calculele și aproximând $\sin \theta \approx \theta$, se obține :

$$\ddot{\theta} + \frac{2g}{3(R-r)} \theta = 0,$$

care coincide cu ecuația (c).

26.5. Un automotor se deplasează pe o cale ferată orizontală cu viteza v_0 . Apoi, mărindu-se progresiv puterea motorului, viteza automotorului crește cu accelerație constantă de la v_0 la v_1 în timp ce el parcurge distanța D , iar după aceea el se deplasează cu viteza v_1 constantă. Automotorul, fără osii și roți, are masa M și centrul de masă în punctul C a cărui poziție este dată prin distanțele l_1, l_2, h (fig. 26.5, a). Cele două osii O_1, O_2 , împre-

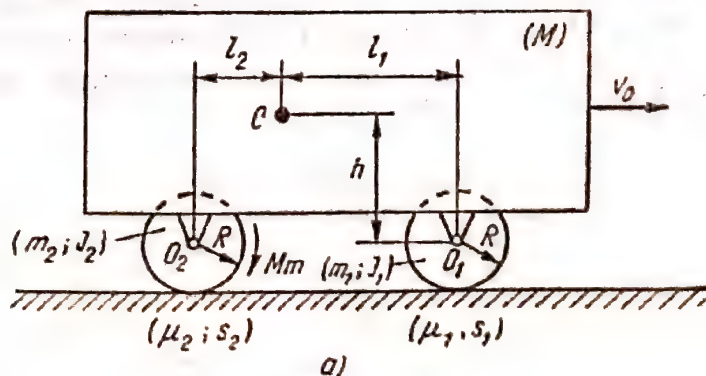


Fig. 26.5, a

ună cu roțile fixate rigid pe fiecare din ele, au respectiv masele m_1 , m_2 , iar momentele lor de inerție față de axele de simetrie O_1 , O_2 sînt respectiv J_1 , J_2 . Razele R ale celor patru roți sînt egale între ele, iar coeficienții de frecare de rostogolire între roțile O_1 , O_2 și șine sînt, respectiv, s_1 , s_2 .

Se cere să se determine: valorile M_{m0} , M_m , M_{m1} ale momentului motor care trebuie aplicat la roata motoare O_2 , situată în spate, în timpul celor trei faze ale mișcării; diagrama de variație a puterii motorului în raport cu timpul, precum și puterea maximă P_{max} pe care trebuie să o dezvolte motorul în timpul mișcării accelerate. Este dat randamentul η al mecanismului de transmitere a mișcării de la motor la roata motoare.

Se cer, de asemenea, coeficienții de frecare de alunecare μ_1 , μ_2 dintre roțile O_1 , O_2 și șine necesari pentru ca roțile să nu patineze în timpul accelerării mișcării.

Rezolvare. În timpul mișcării accelerate automotorul are accelerația $a = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2D} = \text{constantă}$ și viteza $v = v_0 + a(t - t_0)$, iar roțile au accelerația unghiulară $\varepsilon = \frac{a}{R} = \text{constant}$ și viteza unghiulară $\omega = \frac{v}{R} = \omega_0 + \varepsilon(t - t_0)$.

Se separă cele două osii de restul automotorului și se aplică fiecăruia din cele trei corpuri obținute prin separare principiul lui d'Alembert (fig. 26.5, b). Scriind ecuațiile de echilibru dinamic pentru fiecare corp, se obține:

$$(\Sigma X_i = 0); \quad X_2 - X_1 - F_t = 0, \text{ unde } F_t = Ma; \quad (a_1)$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad Y_1 + Y_2 - Mg = 0; \quad (a_2)$$

$$(\Sigma M_{O_2} = 0); \quad Y_1(l_1 + l_2) - Mgl_2 + F_t h = 0. \quad (a_3)$$

$$(\Sigma X_i = 0); \quad X_1 - F_{t1} - T_1 = 0, \text{ unde } F_{t1} = m_1 a; \quad (b_1)$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad N_1 - Y_1 - m_1 g = 0; \quad (b_2)$$

$$(\Sigma M_A = 0); \quad X_1 R - F_{t1} R - M_{t1} - M_{r1} = 0, \text{ unde } M_{t1} = J_1 \varepsilon = J_1 \frac{a}{R}. \quad (b_3)$$

$$|T_1| < \mu_1 |N_1|; \quad (b_4)$$

$$|M_{r1}| = s_1 |N_1|. \quad (b_5)$$

$$(\Sigma X_i = 0); \quad T_2 - X_2 - F_{t2} = 0, \text{ unde } F_{t2} = m_2 a; \quad (c_1)$$

$$(\Sigma Y_i = 0); \quad N_2 - Y_2 - m_2 g = 0; \quad (c_2)$$

$$(\Sigma M_B = 0); \quad M_m - X_2 R - F_{t2} R - M_{t2} - M_{r2} = 0, \text{ unde } M_{t2} = J_2 \varepsilon = J_2 \frac{a}{R}. \quad (c_3)$$

$$|T_2| < \mu_2 |N_2|; \quad (c_4)$$

$$|M_{r2}| = s_2 |N_2|. \quad (c_5)$$

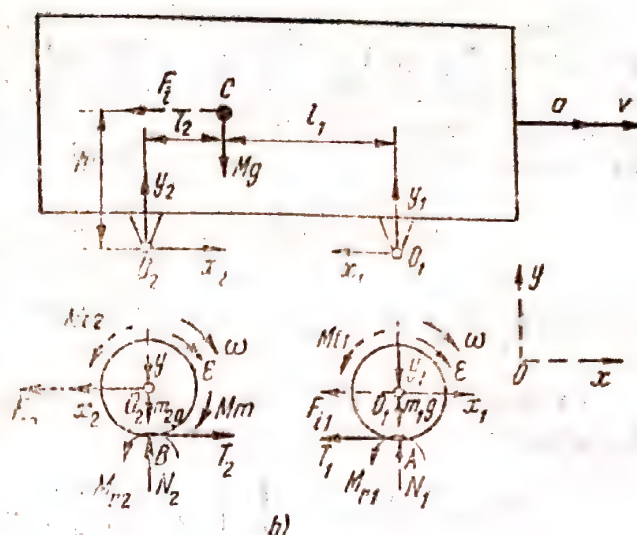


Fig. 26.5, b

Prin rezolvarea sistemului de ecuații și inegalități obținute rezultă succesiv: Y_1 și Y_2 din ecuațiile (a_3) și (a_2) ; N_1 și N_2 din ecuațiile (b_2) și (c_2) ; X_1 și X_2 din ecuațiile (b_3) , (b_3) și (a_1) , iar din ecuațiile (c_3) și (c_3) se obține momentul motor M_m , necesar pentru antrenarea roții motoare în timpul accelerării automotorului:

$$M_m = g \left[s_1 \left(m_1 + \frac{l_2}{l_1 + l_2} M \right) + s_2 \left(m_2 + \frac{l_1}{l_1 + l_2} M \right) \right] + aR \left(M + m_1 + m_2 + \frac{J_1 + J_2}{R^2} + M \frac{h}{l_1 + l_2} \cdot \frac{s_2 - s_1}{R} \right) = \text{constant.} \quad (d)$$

În timpul mișcării uniforme a automobilului ($a = 0$) cu viteza v_0 sau v_1 , momentul motor necesar este:

$$M_{m0} = M_{m1} = g \left[s_1 \left(m_1 + \frac{l_2}{l_1 + l_2} M \right) + s_2 \left(m_2 + \frac{l_1}{l_1 + l_2} M \right) \right]. \quad (e)$$

Puterile dezvoltate de motor în timpul mișcărilor uniforme ale automotorului cu vitezele v_0 și v_1 sînt constante și date, respectiv, de relațiile:

$$P_0 = \frac{M_{m0}\omega_0}{\eta} = \frac{M_{m0}v_0}{\eta R}; \quad P_1 = \frac{M_{m1}v_1}{\eta R} = \frac{M_{m0}v_1}{\eta R} > P_0, \quad (f)$$

unde $M_{m0} = M_{m1}$ este dat de relația (e).

În timpul mișcării uniform accelerate a automotorului, puterea motorului crește liniar cu timpul, după relația:

$$P = \frac{M_m \omega}{\eta} = \frac{M_m v}{\eta R} = \frac{M_m}{\eta R} [v_0 + a(t - t_0)] = \frac{M_m}{\eta R} \left[v_0 + \frac{v_1^2 - v_0^2}{2D} (t - t_0) \right], \quad (g)$$

unde M_m este dat de relația (d).

Făcînd $v = v_0$ sau $v = v_1$ în relația (g), se obțin puterile dezvoltate de motor la începutul, respectiv, la sfîrșitul perioadei de accelerare:

$$P'_0 = \frac{M_m v_0}{\eta R} > P_0 \quad (h)$$

$$P'_1 = \frac{M_m v_1}{\eta R} > P_1 > P_0. \quad (i)$$

Diagrama de variație a puterii motorului cu timpul este prezentată în figura 26.5, c, iar puterea maximă pe care trebuie să o dezvolte motorul este $P_{max} = P'_1$.

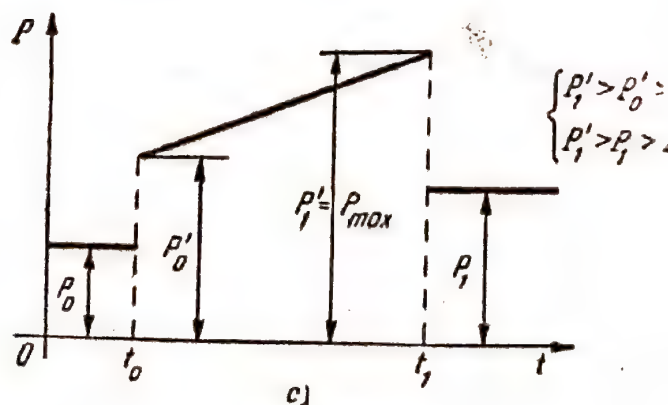


Fig. 26.5, c

În continuare, din ecuațiile (b₁) și (c₁) se obțin T_1 și T_2 , iar din inegalitățile (b₄) și (c₄) se obțin μ_1 și μ_2 :

$$\mu_1 > \frac{|T_1|}{|N_1|} = \frac{s_1}{R} + \frac{J_1 a}{R^2 \left(m_1 g + \frac{g l_2 - a h}{l_1 + l_2} M \right)}; \quad (j_1)$$

$$\mu_2 > \frac{|T_2|}{|N_2|} = \frac{\left(M + m_1 + m_2 + \frac{J_1}{R^2} \right) a + \frac{s_1}{R} \left(m_1 g + \frac{g l_2 - a h}{l_1 + l_2} M \right)}{m_2 g + \frac{g l_1 + a h}{l_1 + l_2} M}. \quad (j_2)$$

Se menționează că pentru ca reacțiunea N_1 să nu se anuleze și să-și păstreze sensul în timpul accelerării automotorului, trebuie respectată inegalitatea:

$$N_1 = m_1 g + \frac{g l_2 - a h}{l_1 + l_2} M \geq 0, \text{ de unde } a \leq g \frac{M l_2 + m_1 (l_1 + l_2)}{M h}. \quad (k)$$

Observație.

Dacă roata motoare este situată în față, relațiile (j₁) și (j₂) devin:

$$\mu_1 > \frac{\left(M + m_1 + m_2 + \frac{J_2}{R^2} \right) a + \frac{s_2}{R} \left(m_2 g + \frac{g l_1 + a h}{l_1 + l_2} M \right)}{m_1 g + \frac{g l_2 - a h}{l_1 + l_2} M};$$

$$\mu_2 > \frac{s_2}{R} + \frac{J_2 a}{R^2 \left(m_2 g + \frac{g l_1 + a h}{l_1 + l_2} M \right)},$$

iar relațiile (d), ..., (i) și (k) rămân neschimbate.

Bibliografie

1. Appel, P. *Traité de mécanique rationnelle*. Ed. Gauthier—Villars. Paris, 1955.
2. Atanasiu, M. *Mecanica*. Editura didactică și pedagogică. București, 1973.
3. Bălan, Șt. *Culegere de probleme de mecanică*. Editura Didactică și Pedagogică, București, ed. III, 1977.
4. Bălan, Șt. *Lecții complementare de mecanică*. Editura Didactică și Pedagogică, București, ed. II, 1975.
5. Bălan, Șt. și Beiu-Paladi, E. *Curs de mecanică teoretică*. Editura Ministerului Învățământului. București, 1960.
6. Buchholtz, N. N., Voronkov, I. M., Minakov, I. A. *Culegere de probleme de mecanică rațională*. Editura Tehnică. București, 1952.
7. Buzdugan, Gh. *Culegere de probleme de mecanică*. Editura Institutului Politehnic. București, 1949.
8. Boiangiu, D. D. și Murgulescu, S. *Mecanica*. Litografia Inst. Politehnic. București, 1979—1981.
9. Ciorănescu, N. *Ecuatiile mecanicii analitice*. Editura Politehnicii. București, 1938.
10. Demian, T. *Mecanisme și elemente constructive de mecanică fină*. Editura Didactică și Pedagogică. București, 1970.
11. Gantmacher, F. *Lectures in analytical mechanics*. Ed. Mir. Moscova, 1970.
12. Harris, C. și Crede, C. *Șocuri și vibrații*. Editura Tehnică. București, vol. I, 1968.
13. Iacob, C. *Mecanică teoretică*. Editura Didactică și Pedagogică. București, ed. II, 1980.
14. Ioachimescu, A. *Mecanica rațională*. Biblioteca Gazetei matematice. Imprimeria Națională. București, 1947.
15. Ionescu-Ghermănescu, L., Rusiu, Gh., Tiperciuc, Gh. *Mecanica tehnică*. Litografia Inst. Politehnic. București, 1973.
16. Landau, L. și Lifșitș, F. *Mecanica*. Editura Tehnică. București, 1966.
17. Livovski, L. *Mecanica și teoria elasticității*. Inst. de Petrol, Gaze și Geologie. București, 1970.
18. Loițianski, L. G. și Lurie, A. I. *Kurs teoreticeskoi mehaniki*. Gostehizdat, vol. I—II, ed. V, Moscova, 1954—1955.
19. Manolescu, N., Kovacs, F., Orănescu, A. *Teoria mecanismelor și mașinilor*. Editura Didactică și Pedagogică. București, 1972.
20. Méchtcherski, I. *Recueil de problèmes de mécanique rationnelle*. Ed. Mir. Moscova, 1973.
21. Nekrasov, A. I. *Curs de mecanică teoretică*. Editura Tehnică. București, 1955.
22. Nihouil, I. C. J. *Cours moderne de mécanique*. Ed. Albin Michel. Paris, 1968.
23. Plăcinteanu, I. I. *Mecanica vectorială și analitică*. Editura Tehnică. București, 1958.
24. Pelecudă, Chr. *Teoria mecanismelor spațiale*. Editura Academiei R.S.R. București, 1972.
25. Rădoi, M. și Deciu, E. *Mecanica*. Editura Didactică și Pedagogică. București, ed. II, 1981.

26. Rădoi, M., Deciu, E., Voiculescu, D. *Elemente de vibrații mecanice*. Editura Tehnică. București, 1973.
27. Ripianu, A. *Dinamica*. Inst. Politehnic. Cluj, 1955.
28. Ripianu, A. *Mecanica solidului rigid*. Editura Tehnică. București, 1973.
29. Sarian, M. *Mecanica și rezistența materialelor*. Vol. I, *Mecanica*. Editura Didactică și Pedagogică. București, ed. III, 1965.
30. Silaș, Gh. *Mecanica. Vibrații mecanice*. Editura Didactică și Pedagogică. București, 1968.
31. Silaș, Gh. și Groșanu, I. *Mecanica*. Editura Didactică și Pedagogică. București, 1981.
32. Silaș, Gh., Rădoi, M. ș.a. *Culegere de probleme de vibrații mecanice*. Vol. I. Editura Tehnică. București, 1967.
33. Staicu, Șt. *Mecanica*. Litografia Inst. Politehnic. București, 1973.
34. Stan, A. și Grumăzescu, M. *Probleme de mecanică*. Editura Didactică și Pedagogică. București, ed. III, 1973.
35. Stoenescu, A. și Silaș, Gh. *Mecanica teoretică*. Editura Didactică și Pedagogică. București, ed. III, 1963.
36. Stoenescu, A., Ripianu, A., Atanasiu, M. *Culegere de probleme de mecanică*. Editura Didactică și Pedagogică. București, ed. II, 1965.
37. Suslov, G. R. *Mecanică rațională*. Editura Tehnică. București, 1950.
38. Timoshenko, S. *Théorie des vibrations*, Librairie Polytechnique Béranger. Paris, 1954.
39. Timoshenko, S., și Young, D. H. *Dynamique supérieure*. Librairie Polytechnique Béranger. Paris, 1950.
40. Țițeica, G. *Probleme de mecanică*. Editura Didactică și Pedagogică. București, 1977.
41. Vălcovici, V., Bălan, Șt., Voinea, R. *Mecanica teoretică*. Editura Tehnică. București, ed. III, 1968.
42. Voinaroski, R. *Mecanica teoretică*. Editura Didactică și Pedagogică. București, 1968.
43. Voinea, R. *Mecanica teoretică*. Tipografia și litografia învățămîntului. București, 1956.
44. Voinea, R., Voiculescu, D., Ceașu, V. *Mecanica*. Editura Didactică și Pedagogică. București, 1975.
45. Colectivul Catedrei de mecanică I.P.B. (responsabili Sarian, M. și Boiangiu, D. *Culegere de probleme de mecanică*, vol. I și II. Editura Didactică și Pedagogică. București, 1962.

CUPRINS

Prefața	3	Cap. 14. Dinamica mișcării relative a punctului material. Repausul relativ	195
Cap. 1. Conceptele fundamentale și conceptele de lucru ale mecanicii newtoniene.	5	14.A. Prezentare teoretică	195
1.A. Principiile fundamentale ale mecanicii newtoniene și problemele ei	11	14.B. Aplicații la dinamica mișcării relative și la repausul relativ a punctului material	197
Cap. 2. Reducerea sistemelor de forțe. Elemente de teoria vectorilor alunecători.	17	Cap. 15. Introducere în dinamica sistemelor materiale. Mărimi dinamice	201
2.A. Prezentare teoretică	17	15.A. Prezentare teoretică	201
2.B. Aplicații la reducerea sistemelor de forțe	27	15.B. Aplicații la calculul mărimilor dinamice	214
Cap. 3. Centre de greutate (de masă). Vectori legați de pământ	39	Cap. 16. Teoremele cantității de mișcare și momentului cinetic	224
3.A. Prezentare teoretică	39	16.A. Prezentare teoretică	224
3.B. Aplicații la determinarea centrelor de masă (greutate)	45	16.B. Aplicații la teoremele cantității de mișcare și momentul cinetic	228
Cap. 4. Statica punctului material liber și cu legături	58	Cap. 17. Teoremele energiei mecanice	242
4.A. Prezentare teoretică	58	17.A. Prezentare teoretică	242
4.B. Aplicații la statica punctului material	63	17.B. Aplicații la teoremele energiei mecanice	244
Cap. 5. Statica solidului rigid liber și cu legături	73	Cap. 18. Dinamica solidului rigid	251
5.A. Prezentare teoretică	73	18.A. Prezentare teoretică	251
5.B. Aplicații la statica solidului rigid liber și cu legături	80	18.B. Aplicații la dinamica solidului rigid	255
Cap. 6. Statica sistemelor de solide	92	Cap. 19. Ciocniri. Percuții	262
6.A. Prezentare teoretică	92	19.A. Prezentare teoretică	262
6.B. Aplicații la statica sistemelor	94	19.B. Aplicații la ciocniri	269
Cap. 7. Grinzi cu zăbrele	109	Cap. 20. Principiul lui d'Alembert. Metoda cinetostatică	279
7.A. Prezentare teoretică	109	20.A. Prezentare teoretică	279
7.B. Aplicații la grinzi cu zăbrele	111	20.B. Aplicații la principiul lui d'Alembert și metoda cinetostatică	280
Cap. 8. Statica firelor	118	Cap. 21. Principiul deplasărilor virtuale	292
8.A. Prezentare teoretică	118	21.A. Prezentare teoretică	292
8.B. Aplicații la statica firelor	121	21.B. Aplicații la principiul lucrului mecanic virtual	295
Cap. 9. Cinematica punctului	126	Cap. 22. Ecuațiile lui Lagrange	303
9.A. Prezentare teoretică	126	22.A. Prezentare teoretică	303
9.B. Aplicații la cinematica punctului	133	22.B. Aplicații la ecuațiile lui Lagrange	304
Cap. 10. Cinematica solidului rigid	144	Cap. 23. Ecuațiile canonice ale lui Hamilton	311
10.A. Prezentare teoretică	144	23.A. Prezentare teoretică	311
10.B. Aplicații la cinematica solidului rigid	154	23.B. Aplicații la ecuațiile canonice ale lui Hamilton	312
Cap. 11. Cinematica mișcării relative a punctului	165	Cap. 24. Vibrații mecanice	315
11.A. Prezentare teoretică	165	24.A. Prezentare teoretică	315
11.B. Aplicații la cinematica mișcării relative a punctului	166	24.B. Aplicații la vibrații mecanice	322
Cap. 12. Dinamica punctului material liber și cu legături.	172	Cap. 25. Dinamica punctului de masă variabilă	338
12.A. Prezentare teoretică	172	25.A. Prezentare teoretică	338
12.B. Aplicații la dinamica punctului material	178	25.B. Aplicații la dinamica punctului de masă variabilă	339
Cap. 13. Forțe centrale	190	Cap. 26. Probleme generale de dinamică	342
13.A. Prezentare teoretică	190	<i>Bibliografie</i>	369
13.B. Aplicații la forțe centrale	192		